VEKTORIANALYYSI

Luento 7

Käyrän pinnan yli otettu pintaintegraali.

Edellä laskimme pintaintegraaleja tasopintojen yli. Nyt oletamme, että pinnat ovat kolmessa ulottuvuudessa olevia käyriä pintoja.

Olkoon $\mathcal{S}$ pinta, jonka karteesinen yhtälö on

$$F(x,y,z)=0.$$

Oletetaan, että tästä yhtälöstä voidaan ratkaista *z*,

$$z=g(x,y).$$

Silloin voimme esittää pinnan yhtälön muodossa

$$\mathrm{g}(x,y)-z\equiv f(x,y,z)=0.$$

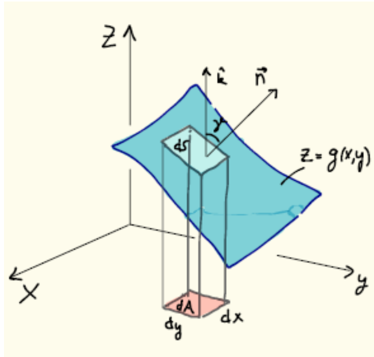
Tämän pinnan yksikkönormaali pisteessä (*x*,*y*,*z*) on

$$\begin{aligned}
\hat{n}(x,y,z) &= \frac{\nabla f(x,y,z)}{\left|\nabla f(x,y,z)\right|} \\
&= \frac{1}{\left|\nabla f\right|}\left[(\partial_x f)\hat{i}+(\partial_y f)\hat{j}+(\partial_z f)\hat{k}\right] \\
&= \frac{(\partial_x g)\hat{i}+(\partial_y g)\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{(\partial_x g)^2+(\partial_y g)^2+1}}.
\end{aligned}$$

Pintaintegraalissa käyrän pinnan pinta-alkio dS pisteessä (x,y,z) kerrotaan integroitavan funktion arvolla tuossa pisteessä. Integrointi helpottuu, jos pinta-alkio dS

projisioidaan *xy*-tasoon, jossa sitä vastaa pinta-alkio *dA* (ks. kuva)

$$dA = \left|\hat{n}\cdot\hat{k}\right| dS = \cos\gamma\, dS.$$



Edellisen sivun kaavasta seuraa

$$\left|\hat{n}\cdot\hat{k}\right| = \left|\frac{-1}{\sqrt{(\partial_x g)^2 + (\partial_y g)^2 + 1}},\right|$$

joten

$$dS = \sqrt{(\partial_x g)^2 + (\partial_y g)^2 + 1}\, dA.$$

Kun tämä pinta-alkion korjaus otetaan huomioon, voidaan funktion $U(x, y, z)$ pintaintegraali yli kaarevan pinnan S korvata integraalilla yli projektiopinnan A seuraavasti:

$$\iint_S dS\; U(x,y,z) = \iint_A dA \sqrt{(\partial_x g)^2 + (\partial_y g)^2 + 1}\;\; U(x,y,g(x,y)).$$

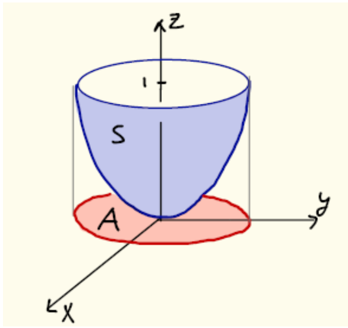
Tämä onnistuu silloin, kun mikään pinnan S ei ole kohtisuorassa (*x*,*y*)-tasoa vastaan, jolloin olisi *dA* = 0. Täytyy etsiä sopiva projektiosuunta, ettei näin pääse käymään.

Huomaa, että vektorifunktion pintaintegraali palautuu skalaarifunktioiden integraaleiksi, kun vektori esitetään komponenttimuodossa:

$$\iint_S dS\;\; \vec{U}(x,y,z) = \hat{\imath}\iint dS\;\; U_x + \hat{\jmath}\iint dS\;\; U_y + \hat{k}\iint dS\;\; U_{z.}$$

***

Esimerkki: Lasketaan pyörähdysparaabelin $z = x^2 + y^2$ ala, kun $x^2 + y^2 \leq 1$ (kuvassa pinta S).



Pinta projisoituu (x, y) -tason yksikköympyräksi. Pinnan yhtälöstä $z = x^2 + y^2 = g(x, y)$ saadaan $\partial_x g = 2x$ ja $\partial_y g = 2y$, joten pinnan ala on (integroitava funktio on 1)

$$\text{Ala}=\iint_S dS = \iint_A \underbrace{dA}_{=dxdy} \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1}.$$

Kannattaa siirtyä napakoordinaatteihin:

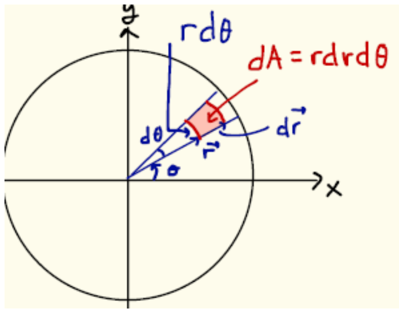
$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Pinta tulee käytyä läpi, kun $\theta = 0...2\pi, \quad r = 0...1.$

Lasketaan Jacobin determinantti:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \partial_r x & \partial_r y \\ \partial_\theta x & \partial_\theta y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$



Tämä tarkoittaa, että $dxdy = rdrd\theta.$

Alaksi saadaan

$$\text{Ala} = \iint_A drd\theta \; r\sqrt{1+4(x^2+y^2)} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \; r\sqrt{1+4r^2}$$

$$= \left[\theta\right]_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}(1+4r^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

***