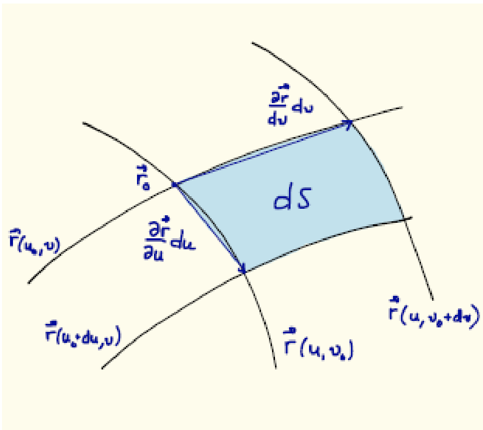
VEKTORIANALYYSI

Luento 8

Yleinen pinta. Edellä oletimme, että tason yhtälöstä voidaan ratkaista z funktiona x:stä ja y:stä. Näin ei aina ole tai ei ole viisasta näin toimia vaan kaikki karteesiset koordinaatit parametrisoidaan uusien muuttujien avulla.

Katsotaan nyt, millainen pinta-alkio dS virittyy pisteeseen $\vec{r}_0(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$, kun parametreihin u ja v tehdään infinitesimaaliset lisäykset du ja dv. Parametrin u muutos vastaa vektoria

$$
\begin{aligned}
&[x(u_0+du,v_0)-x(u_0,v_0)]\hat{\imath}+[y(u_0+du,v_0)-y(u_0,v_0)]\hat{\jmath} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +[z(u_0+du,v_0)-z(u_0,v_0)]\hat{k} \\
&=\frac{\partial x}{\partial u}du\hat{\imath}+\frac{\partial y}{\partial u}du\hat{\jmath}+\frac{\partial z}{\partial u}du\hat{k} \\
&=\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\Big|_{(u_0,v_0)}du.
\end{aligned}
$$



Parametrin v muutos vastaa puolestaan vektoria

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\Big|_{(u_0,v_0)}dv.$$

Pinta-alkiota dS voidaan approksimoida näiden kahden vektorin virittämällä suorakaiteella, jonka pinta-ala saadaan niiden ristitulon itseisarvona:

$$dS = \left| \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du \right) \times \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv \right) \right| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| dudv = \left| \vec{n} \right| dudv.$$

Integraalissa pinta-alkiot kutistuvat kohti nollaa, jolloin approksimaatiosta tulee tarkka tulos.

Vektori $\vec{n}$,

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v},$$

on kahden pinnalla olevan vektorin ristitulona kohtisuorassa pintaa vastaan eli se on pinnan normaalivektori. Ristitulon määritelmän mukaan

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \hat{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \hat{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \hat{k},$$

jossa viimeisessä lausekkeessa kertoimet ovat Jacobin determinantteja. Pinta-alkioksi saadaan siis

$$\begin{aligned} dS &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| dudv \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)^2} \; dudv. \end{aligned}$$

Funktion f pintaintegraali pinnan S yli on silloin

$$\iint_S dS\, f = \iint_S dudv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| f(\vec{r}(u,v))$$

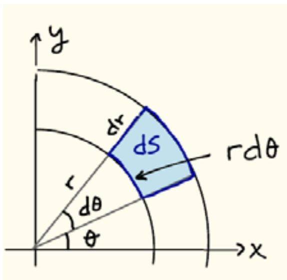
$$= \iint_S dudv \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)^2}\; f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)$$

Napa-, sylinteri- ja pallokoordinaatistot

Aiemmassa esimerkissä käytimme tasointegraalia suorittaessamme *napakoordinaatistoa* eli teimme muuttujanvaihdon

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta.$$

Integroinnin olisi voinut tietenkin tehdä myös karteesisia koordinaatteja käyttäen, mutta napakoordinaatteja r, θ käyttämällä lasku oli huomattavasti helpompi. Pinta-alkion todettiin olevan (ks. kuva)

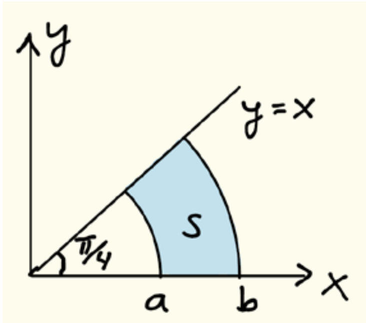


$$dS = rdrd\theta.$$

***

Esimerkki: S on xy-tasossa oleva alue, jota rajoittavat x-akseli ja suora $y = x$ ja jossa $a \le \sqrt{x^2 + y^2} \le b.$ Laske funktion $f = y^2 / x^2$ pintaintegraali tämän alueen yli.

Alueen geometrinen muoto suosittelee napakoordinaattien käyttöä:



$$I = \iint_S dxdy\, f(x,y) = \iint_S rdrd\theta\, f(r,\theta),$$

jossa $f(r,\theta) = (r\sin\theta)^2 / (r\cos\theta)^2 = \tan^2\theta.$

(Huomaa fyysikkojen käytännöllinen merkitsemistapa: uusissa muuttujissa saatavaa funktiota merkitään samalla kirjaimella *f* kuin alkuperäistä funktiota, vaikka ne ovat funktiona ihan erilaisia - toinen on muuttujien neliöiden suhde, toinen on toisen muuttujan tangentin neliö.)

Integroimisjärjestyksen voi valita vapaasti, koska integroimisrajoihin ei jää muuttujia (katsoin tan-integraalin Wolfram Alphasta):

$$I = \int_0^{\pi/4} d\theta \left[\int_a^b dr\, r \tan^2\theta \right] = \left[\int_0^{\pi/4} d\theta\ \tan^2\theta \right] \left[\int_a^b dr\, r \right]$$

$$= \left[\tan\theta - \theta\right]_0^{\pi/4} \left[r^2/2 \right]_a^b = (1/2 - \pi/4)(b^2/2 - a^2/2)$$

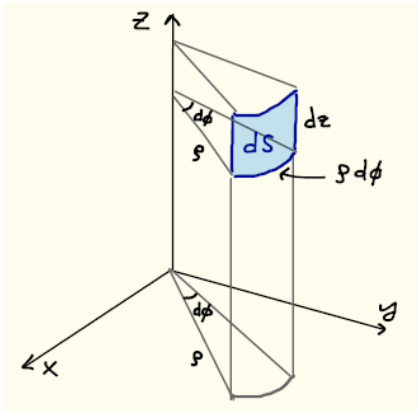
$$= \frac{4-\pi}{8}(b^2 - a^2).$$

***

Napakoordinaatisto on esimerkki *käyräviivaisista koordinaatistoista*. Kolmiulotteisten pintaintegraalien tapauksessa käytetään usein kahta muuta käyräviivaista koordinaatistoa, *sylinterikoordinaatistoa* ja *pallokoordinaatistoa*.

Sylinterikoordinaatisto:

$$x = \rho\cos\phi, \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = \rho\sin\phi,$$
$$z = z.$$



Sylinteripinnalla sylinterin säde ρ on vakio, joten pinta-alkio dS on esitettävissä differentiaalin $d\phi dz$ avulla. Kuvasta nähdään geometrisesti, että

$$dS = \rho d\phi dz.$$

Saman tuloksen saa myös edelle annetusta yleisestä kaavasta

$$dS = dudv\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}$$
$$= d\phi dz\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(\phi,z)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(\phi,z)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(\phi,z)}\right)^2}$$
$$= d\phi dz\sqrt{\underbrace{\left(\begin{vmatrix}\partial_\phi y & \partial_\phi z\\ \partial_z y & \partial_z z\end{vmatrix}\right)^2}_{=\rho^2\sin^2\phi} + \underbrace{\left(\begin{vmatrix}\partial_\phi z & \partial_\phi x\\ \partial_z z & \partial_z x\end{vmatrix}\right)^2}_{=\rho^2\cos^2\phi} + \underbrace{\left(\begin{vmatrix}\partial_\phi x & \partial_\phi y\\ \partial_z x & \partial_z y\end{vmatrix}\right)^2}_{=0}}$$
$$= \rho d\phi dz.$$

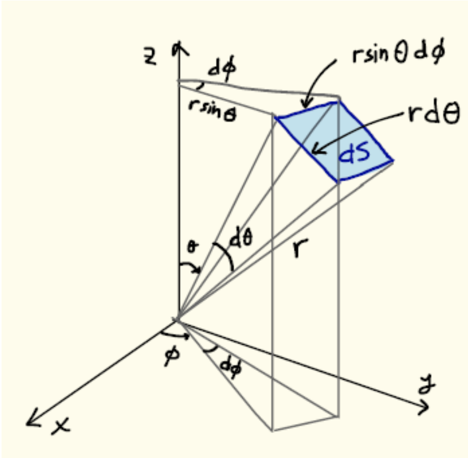
***

Esimerkki: Lasketaan R-säteisen ja h-korkuisen sylinterin reunavaipan pinta-ala.

$$A = \iint dS = \int_0^h \int_0^{2\pi} R dz d\phi = R\left[z\right]_0^h \left[\phi\right]_0^{2\pi} = 2\pi Rh.$$

Pallokoordinaatisto:

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi,$$
$$z = r\cos\theta.$$



Pallon pinnalla olevaksi pinta-alkioksi saadaan kuvasta geometrisesti

$$dS = (rd\theta)(r\sin\theta d\phi) = r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi.$$

Tämänkin voi saada myös em. yleisestä kaavasta:

$$dS = d\phi d\theta \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(\phi,\theta)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(\phi,\theta)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(\phi,\theta)}\right)^2}$$

$$= d\phi d\theta \sqrt{\underbrace{\left(\begin{vmatrix}\partial_\phi y & \partial_\phi z \\ \partial_\theta y & \partial_\theta z\end{vmatrix}\right)^2}_{(-r^2\sin^2\theta\cos\phi)^2} + \underbrace{\left(\begin{vmatrix}\partial_\phi z & \partial_\phi x \\ \partial_\theta z & \partial_\theta x\end{vmatrix}\right)^2}_{(r^2\sin^2\theta\sin\phi)^2} + \underbrace{\left(\begin{vmatrix}\partial_\phi x & \partial_\phi y \\ \partial_\theta x & \partial_\theta y\end{vmatrix}\right)^2}_{(-r^2\sin\theta\cos\theta)^2}}$$

$$= d\phi d\theta \sqrt{(r^2\sin^2\theta)^2 + (r^2\sin\theta)^2(1-\sin^2\theta)}$$

$$= r^2 \sin\theta d\phi d\theta.$$

***

Esimerkki: Lasketaan R-säteisen pallon pinta-ala.

$$S = \iint_S dS = \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\pi} d\theta R^2 \sin\theta$$
$$= R^2 \left[\phi\right]_0^{2\pi} \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}$$
$$= R^2 (2\pi)(2) = 4\pi R^2.$$

***