VEKTORIANALYYSI

Luento 9

Ortogonaaliset käyräviivaiset koordinaatistot. Olemme jo monta kertaa esittäneet karteesiset *x*, *y* ja *z* koordinaatit uusia koordinaatteja käyttäen:

$$x = x(u,v,w), \quad y = y(u,v,w), \quad z = z(u,v,w).$$

Jos tämä kuvaus *uvw*-avaruuden ja *xyz*-avaruuden välillä on yksi-yhteen eli pistettä (x,y,z) vastaa yksikäsitteinen *uvw*-avaruuden piste (u,v,w), sanotaan muunnoksen määrittelevän (x,y,z)-avaruuteen *käyräviivaisen koordinaattijärjestelmän*. Silloin u,v ja w ovat *käyräviivaiset koordinaatit*.

Käytännössä yksi-yhteen vaatimuksesta usein livetään ja pidetään riittävänä, että kuvaus on lokaalisti yksi-yhteen eli pisteen (u,v,w) välittömässä läheisyydessä ei ole toista pistettä, joka kuvautuisi samaan pisteeseen(x,y,z). Esimerkiksi napakoordinaatiston pisteet $(1,0)$ ja $(1,2\pi)$ kuvautuvat samaan (x,y)-tason pisteeseen, mutta ne ovat kaukana toisistaan (r,θ)-tasossa. Tämänkin jälkeen kuvaukseen voi liittyä ns. singulaarisia pisteitä, joissa kuvaus ei ole yksi-yhteen, esimerkiksi napakoordinaatistossa kaikki (r,θ)-avaruuden pisteet $(0,\theta)$ - oli θ mikä tahansa - kuvautuvat (x,y)-avaruuden origoon.

Tarkastellaan (x,y,z)-avaruuden ei-singulaarista pistettä P_0. Olkoon sen käyräviivaiset koordinaatit (u_0,v_0,w_0). Ne avaruuden pisteet, joissa $u = u_0$, muodostavat (x, y, z)-avaruudessa pinnan, *u*-pinnan, jota parametrisoivat *v* ja *w*:

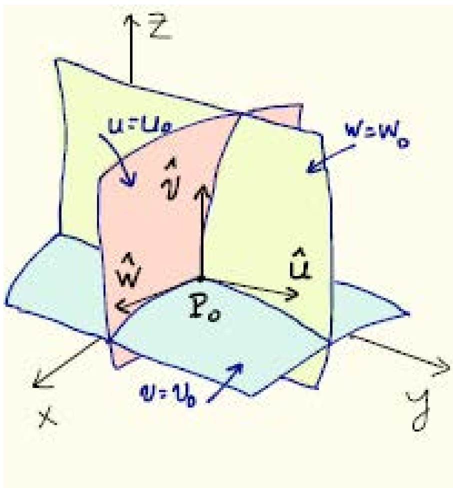
$$x = x(u_0, v, w), \quad y = y(u_0, v, w), \quad z = z(u_0, v, w).$$

Pinta kulkee pisteen P_0 kautta, samoin vastaavat *v*-pinta $v = v_0$ ja *w*-pinta $w = w_0$.

Jos kukin näistä kolmesta pinnasta on pisteessä P_0 kohtisuorassa kahta muuta pintaa vastaan, sanotaan että $[u, v, w]$ muodostaa *xyz*-avaruudessa *ortogonaalisen käyräviivaisen koordinaatiston*.

Tasoparit leikkaavat *koordinaattikäyriä* pitkin. Esimerkiksi tasot $v = v_0$ ja $w = w_0$ leikkaavat *u*-käyrää pitkin, jonka parametriesitys on

$$x = x(u, v_0, w_0), \quad y = y(u, v_0, w_0), \quad w = w(u, v_0, w_0).$$

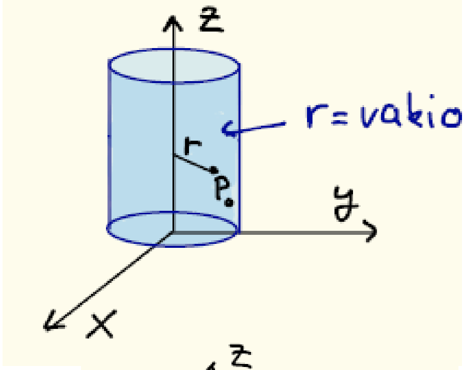


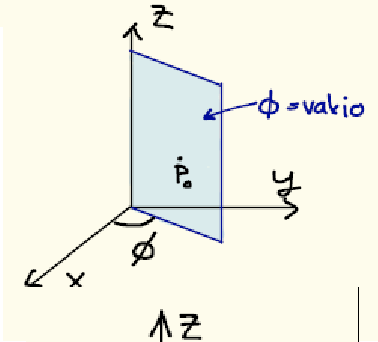
Koska *u*-käyrä on *v*- ja *w*-tasoissa, on sen tangentin suuntainen yksikkövektori $\hat{u}$ pisteessä P_0 kohtisuorassa *u*-tasoa vastaan. Samalla tavalla voidaan määritellä *v*- ja *w*-tasoja vastaan kohtisuorassa olevat yksikkövektorit $\hat{v}$ ja $\hat{w}$. Nämä kolme yksikkövektoria $\hat{u}, \hat{v}$ ja $\hat{w}$ muodostavat pisteessä *paikallisen suorakulmaisen kantavektorijärjestelmän*.

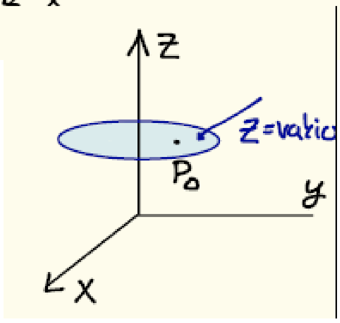
***

Esimerkki: Sylinterikoordinaatiston koordinaattipinnat ja koordinaattikäyrät ovat (ks. kuva)

- Sylinteripinnat, joiden akselina on *z*-akseli. Näillä pinnoilla *r* on vakio. *r*-koordinaattikäyrät ovat vaakatasoaa olevia puolisuoria, jotka lähtevät *z*-akselista.
- Pystysuorat puolitasot, jotka rajoittuvat *z*-akseliin. Niillä pinnoilla ϕ on vakio. ϕ-koordinaattikäyrät ovat vaakatasossa olevia ympyröitä, joiden keskipiste on *z*-akselilla.
- Vaakatasot, jotka ovat kohtisuorassa *z*-akselia vastaan. Näillä pinnoilla on *z* vakio. *z*-koordinaattikäyrät ovat *z*-akselin suuntaisia suoria.







***

Pisteen paikkavektori *xyz*-avaruudessa on käyräviivaisten koordinaattien avulla kirjoitettuna

$$\vec{r} = x(u,v,\mathrm{w})\,\hat{\imath} + y(u,v,\mathrm{w})\,\hat{\jmath} + z(u,v,\mathrm{w})\hat{k}.$$

Sen osittaisderivaatta *u*:n suhteen jossain pisteessä P

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial u}\hat{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial u}\hat{k}$$

on *u*-koordinaattikäyrän tangentin suuntainen tässä pisteessä, koska se kertoo, mihin suuntaan siirrytään, kun *u*:ta muutetaan. Vastaavasti $\partial\vec{r}/\partial v$ ja $\partial\vec{r}/\partial w$ ovat *v*- ja *w*-koordinaattikäyrien tangenttien suuntaisia vektoreita.

Merkitään derivaattavektorien pituuksia

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right| = h_u, \quad \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| = h_v, \quad \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right| = h_w.$$

Niitä kutsutaan *skaalaustekijöiksi*. Vektoreiden suunnat pisteessä P ilmaistaan yksikkövektoreilla

$$\hat{u}_u, \ \hat{u}_v \ \text{ja} \ \hat{u}_w \quad \text{tai} \quad \hat{e}_u, \ \hat{e}_v \ \text{ja} \ \hat{e}_w$$

tai kaikista lyhyimmin yksikkövektoreilla

$$\hat{u}, \ \hat{v} \ \text{ja} \ \hat{w}.$$

Nämä vektorit muodostavat lokaalin oikeakätisen kantavektorijärjestelmän, olettaen että koordinaatit *u, v* ja *w* on valittu sopivassa järjestyksessä.

Voimme siis kirjoittaa

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right| \hat{u} = h_u \hat{u}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| \hat{v} = h_v \hat{v}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right| \hat{w} = h_w \hat{w}.$$

***

Esimerkki: Paikkavektori on sylinterikoordinaateissa esitettynä

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \\ &= \rho\cos\phi\hat{i} + \rho\sin\phi\hat{j} + z\hat{k}. \end{aligned}$$

Saamme

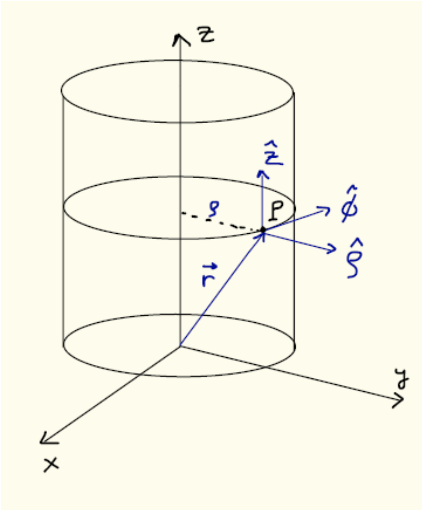
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -\rho\sin\phi\hat{i} + \rho\cos\phi\hat{j}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \hat{k}.$$

Skaalaustekijät ovat

$$h_\rho = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}\right| = 1, \quad h_\phi = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\right| = \rho, \quad h_z = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right| = 1,$$

ja lokaalit kantavektorit ovat

$$\hat{\rho} = \cos\phi\,\hat{i} + \sin\phi\,\hat{j}, \quad \hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j}, \quad \hat{z} = \hat{k}.$$



***

Gradientti, divergenssi ja roottori käyräviivaisissa koordinaateissa.

Olkoon f jokin funktio ja C käyrä, jolla on parametriesitys $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Funktion suunnattu derivaatta käyrää pitkin $\partial f / \partial s$ voidaan ketjusäännön mukaan kirjoittaa

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial s}. \qquad (*)$$

Toisaalta suunnatun derivaatan määritelmän mukaan (ks. s 36)

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \hat{T} \cdot \nabla f,$$

jossa $\hat{T}$ on käyrän C tangentin suuntainen yksikkövektori,

$$\begin{aligned}\hat{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial s} \\ &= (h_u \hat{u})\frac{\partial u}{\partial s} + (h_v \hat{v})\frac{\partial v}{\partial s} + (h_w \hat{w})\frac{\partial w}{\partial s}.\end{aligned}$$

Tästä seuraa suunnatulle derivaatalle lauseke

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s} &= \hat{T} \cdot \nabla f \\ &= \left[(h_u \hat{u})\frac{\partial u}{\partial s} + (h_v \hat{v})\frac{\partial v}{\partial s} + (h_w \hat{w})\frac{\partial w}{\partial s} \right] \cdot \left[(\nabla f)_u \hat{u} + (\nabla f)_v \hat{v} + (\nabla f)_w \hat{w} \right] \\ &= (h_u \frac{du}{ds})(\nabla f)_u + (h_v \frac{dv}{ds})(\nabla f)_v + (h_w \frac{dw}{ds})(\nabla f)_w.\end{aligned}$$

Vertaamalla kaavaan (*) saamme gradientille ortogonaalisten käyräviivaisten koordinaattien avulla esityksen

$$\begin{aligned}\nabla f &= (\nabla f)_u \hat{u} + (\nabla f)_v \hat{v} + (\nabla f)_w \hat{w} \\ &= \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}.\end{aligned}$$

Skalaarikentän $f(r,\phi,z)$ gradientti sylinterikoordinaateissa on tämän kaavan perusteella

$$\nabla f(\rho,\phi,z) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$
$$= \left(\hat{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) f.$$

Pallokoordinaateissa saadaan puolestaan

$$\nabla f(r,\theta,\phi) = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}$$
$$= \left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right) f.$$

***

Esimerkki: Skalaarikentällä *u* on sylinterikoordinaatistossa lauseke $u(\rho,\phi,z) = \rho\sin\phi.$ Lasketaan *u*:n gradientti:

$$\nabla u = \left(\hat{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(r\sin\phi)$$
$$= \sin\phi\hat{\rho} + \cos\phi\hat{\phi}.$$

Koska $\hat{\rho} = \cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j},\ \ \hat{\phi} = -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}$ (ks. s 62 kaavat) huomataan että gradientti on *ijk*-järjestelmässä yksinkertaisesti $\nabla u = (\sin^2\phi + \cos^2\phi)\hat{j} = \hat{j}.$ Tulos ei hämmästytä, kun huomaa, että $u = \rho\sin\phi = y.$

***

Ilman johtoa annamme vektorikentän $\vec{F}(u,v,w)$ divergenssin ja roottori lausekkeet ortogonaalisissa käyräviivaisissa koordinaateissa (ks. Adams 16.7):

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w F_u)+\frac{\partial}{\partial v}(h_w h_u F_v)+\frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)\right],$$

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}.$$

Fysiikassa tulee usein vastaan divergenssi ja roottori pallokoordinaateissa. Pallokoordinaateissa skaalaustekijöillä on lausekkeet (harj. teht.)

$$h_r=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right|=1,\quad h_\theta=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right|=r,\quad h_\phi=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\right|=r\sin\theta.$$

Yllä annetuista kaavoista voidaan silloin johtaa divergenssin ja roottorin lausekkeet pallokoordinaateissa. Esimerkiksi vektorin $\vec{F}=F_r\hat{r}+F_\theta\hat{\theta}+F_\phi\hat{\phi}$ divergenssi on

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}.$$

Divergenssin ja roottorin lausekkeet voi annetussa käyräviivaisessa koordinaatistossa johtaa myös ketjusäännön avulla. Esimerkiksi divergenssin johto pallokoordinaatistossa lähtee liikkeelle muodosta

$$\nabla\cdot\vec{F}=(\hat{i}\partial_x+\hat{j}\partial_y+\hat{k}\partial_z)\cdot(F_r\hat{r}+F_\theta\hat{\theta}+F_\phi\hat{\phi}).$$

Sitten kirjoitetaan pallokoordinaatiston yksikkövektorit yksikkövektoreiden $\hat{i}$, $\hat{j}$ ja $\hat{k}$ avulla, kehitetään pistetulot ja suoritetaan derivoinnit ketjusääntöä noudattaen, esim.

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

jne. Saatte tehdä tätä harjoituksissa. Menetelmä on suoraviivainen, mutta saattaa koetella jonkin verran kärsivällisyyttä. (Ks. harj.)