4. Käyrän lokaaleja ominaisuuksia

Käyrän tangentti.

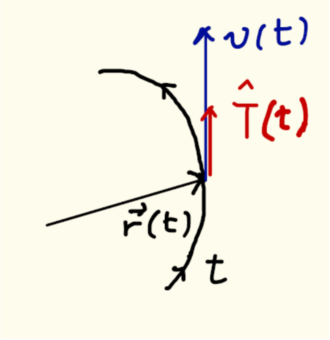
A 11.4

Tarkastellaan parametrisoitua käyrää $\vec{r}(t)$. Parametrilla *t* ei tarvitse olla mitään fysikaalista merkitystä, mutta seuraavassa kannattaa ajatella, että se on aika ja käyrä on jonkin kappaleen rata 3-ulotteisessa avaruudessa. Tiedämme, että vektori (nopeus)

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

on kussakin radan pisteessä $\vec{r}(t)$ radan tangentin suuntainen, joten **tangentin suuntainen yksikkövektori** $\vec{T}(t)$ saadaan jakamalla $\vec{v}(t)$ pituudellaan:

$$\hat{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \Big/ \left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|.$$

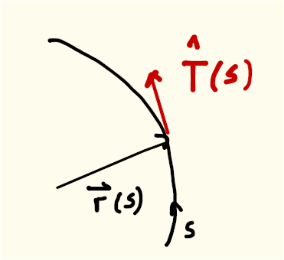


Vektorin $\hat{T}(t)$ suunta vastaa käyrän suunnistusta.

Pisteen $\vec{r}(t)$ kohdalla käyrää pitkin edetään ajassa *dt* matka $ds = v(t)dt$. Tämä pätee kaikille radan parametrisaatioille, myös sille, jossa *parametrina käytetään käyrän kaarenpituutta s.* Tässä parametrisaatiossa nopeus on *v*(*s*) ja parametrin muutos on *ds*, joten saadaan yhtälö $ds = v(s)ds$ eli kun kaarenpituutta käytetään kaaren parametrisointiin, kaarella edetään ”nopeudella” 1.

Kaarenpituusparametrisoinnin tapauksessa käyrän tangentin suuntainen yksikkövektori on

$$\hat{T}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}.$$



(Katso oppikirjan esimerkki 1 kappaleessa 11.4.)

Käyrän kaarevuus ja yksikkönormaali

Käytetään käyrälle kaarenpituusparametrisaatiota

$$\vec{r} = \vec{r}(s).$$

Koska tangenttivektori $\hat{T}(\mathrm{s}) = d\vec{r}/ds$ on yksikkövektori, on

$$\hat{T}(s) \cdot \hat{T}(s) = 1.$$

Derivoidaan tämä yhtälö puolittain, jolloin saadaan

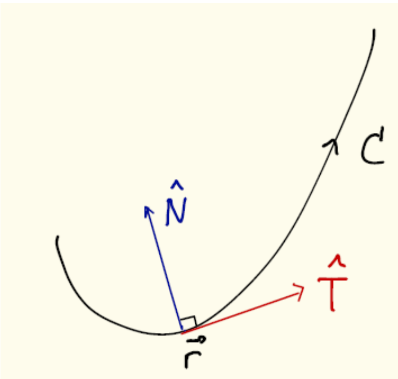
$$2\hat{T}(s) \cdot \frac{d\hat{T}(s)}{ds} = 0.$$

Tämä osoittaa, että $d\hat{T}(s)/ds$ ja $\hat{T}(s)$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Derivaatta $d\hat{T}(s)/ds$ mittaa sitä, miten voimakkaasti käyrän tangentin suunta muuttuu pisteessä $\vec{r}(s)$. Määritellään **käyrän kaarevuus** $\kappa(s)$ (kappa) pisteessä $\vec{r}(s)$ seuraavasti (”kiihtyvyys”):

$$\kappa(s) = \left| \frac{d\hat{T}(s)}{ds} \right|.$$

Tämän käänteislukua $\rho(s) = 1/\kappa(s)$ sanotaan **kaarevuussäteeksi**.

Kaarevuus(säde) tulee fysiikassa vastaan mm. optiikassa (esim. käyrät



peilipinnat) ja mekaniikassa (esim. teiden kaarteiden suunnittelu).

Käyrän tangenttia vastaan kohtisuoraa yksikkövektoria

$$\hat{N}(s) = \frac{d\hat{T}}{ds} \Big/ \left| \frac{d\hat{T}}{ds} \right|$$

kutsutaan käyrän **yksikkönormaaliksi** pisteessä $\vec{r}(s)$.

Käyrän torsio eli kiertymä

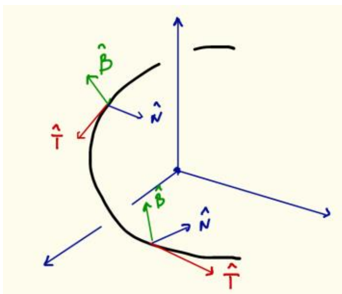
Kaareutumisen lisäksi käyrä voi 3-ulotteisessa tapauksessa myös vääntyä eli se ei pysy välttämättä kaiken aikaa samassa tasossa. Tämän käyttäytymisen kuvaamiseen tarvitaan kolmas vektori, joka on kohtisuorassa $\hat{T}$:n ja $\hat{N}$:n määräämää tasoa vastaan; sellainen vektori on

$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}.$$

Koska $\hat{B}$ on yksikkövektori, on $d\hat{B}/ds \perp \hat{B}$. Edelleen (huom. $\hat{N} \times \hat{N} = 0$)

$$\frac{d\hat{B}}{ds} = \frac{d}{ds}(\hat{T} \times \hat{N}) = \underbrace{\frac{d\hat{T}}{ds}}_{= \kappa \hat{N}} \times \hat{N} + \hat{T} \times \frac{d\hat{N}}{ds} = \hat{T} \times \frac{d\hat{N}}{ds},$$

joten on myös $d\hat{B}/ds \perp \hat{T}$. Näemme siis, että $d\hat{B}/ds$ on yhdensuuntainen vektorin $\hat{N}$ kanssa:



$$\frac{d\hat{B}}{ds} = -\tau(s)\hat{N}(s).$$

Lukua $\tau(s)$ sanotaan käyrän **kiertymäksi** eli **torsioksi**.

Vektoria $\hat{N}$ kutsutaan käyrän **päänormaaliksi** ja vektoria $\hat{B}$ **sivunormaaliksi**. Yhdessä tangenttivektorin $\hat{T}$ kanssa ne muodostavat kolmiulotteisen avaruuden oikeakätisen kannan $(\hat{T}, \hat{N}, \hat{B})$, samaan tapaan kuin $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$. Ne määrittelevät jokaisessa käyrän pisteessä $\vec{r}(t)$ ns. **Frenet'n koordinaatiston**.

Huom. Parametrisoidun käyrän muoto on täysin määrätty, kun tunnetaan sen kaarevuus $\kappa(s)$ ja kiertymä $\tau(s)$ kussakin pisteessä.

Kaarevuus ja kiertymä yleisessä parametrisaatiossa

Johdetaan edelliset tulokset yleisen käyrän parametrisaation $\vec{r} = \vec{r}(t)$ tapauksessa (*t* on ”aika”). Esitetään tulokset käyttäen ”nopeutta” $\vec{v}$ ja ”kiihtyvyyttä” $\vec{a}$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\vec{T},$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{T}) = \frac{dv}{dt}\hat{T} + v\underbrace{\frac{d\hat{T}}{dt}}_{=\frac{d\hat{T}}{ds}\frac{ds}{dt}} = \frac{dv}{dt}\hat{T} + v^2\kappa\hat{N}.$$

Lisäksi

$$\vec{v} \times \vec{a} = v\frac{dv}{dt}\underbrace{\hat{T} \times \hat{T}}_{=0} + v^3\kappa\underbrace{\hat{T} \times \hat{N}}_{=\hat{B}} = v^3\kappa\hat{B}.$$

Näistä seuraa

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{v}, \quad \hat{B} = \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{\left|\vec{v} \times \vec{a}\right|}, \quad \kappa = \frac{\left|\vec{v} \times \vec{a}\right|}{v^3}.$$

Koska

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds}\,\frac{ds}{dt} = v\kappa\hat{N},$$

$$= \kappa\hat{N} = v$$

voidaan $\hat{N}$ esittää muodossa

$$\hat{N} = \frac{d\hat{T}}{dt}\bigg/\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|.$$

Ilman johtoa annamme vielä kiertymän kaavan yleisessä parametrisaatiossa (jos johto kiinnostaa, ks. Adams):

$$\tau = \frac{(\vec{v}\times\vec{a})\cdot(d\vec{a}/dt)}{\left|\vec{v}\times\vec{a}\right|^2}.$$

***

Esimerkki: Kaavapyörityksen jälkeen on esimerkki paikallaan. Lasketaan r -säteisen ympyrän kaarevuus ja kaarevuussäde sekä tangentti- ja normaalivektorit $\hat{T}$ ja $\hat{N}$.

Käytetään tavanomaista parametrisaatiota, jossa parametrina on kiertokulma θ:

$$\vec{r}(\theta) = r\cos\theta\hat{i} + r\sin\theta\,\hat{j}.$$

Silloin

$$\vec{v} = -r\sin\theta\hat{i} + r\cos\theta\,\hat{j}, \quad \vec{a} = -r\cos\theta\hat{i} - r\sin\theta\,\hat{j}$$

ja

$$\vec{v}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ -r\cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = (r^2\sin^2\theta + r^2\cos\theta)\hat{k}.$$

Tästä saamme kaarevuudeksi

$$\kappa(\theta) = \frac{\left|\vec{v}\times\vec{a}\right|}{v^3} = \frac{\left|r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta\right|}{(r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta)^{3/2}} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}$$

ja kaarevuussäteeksi

$$\frac{1}{\kappa(t)} = r.$$

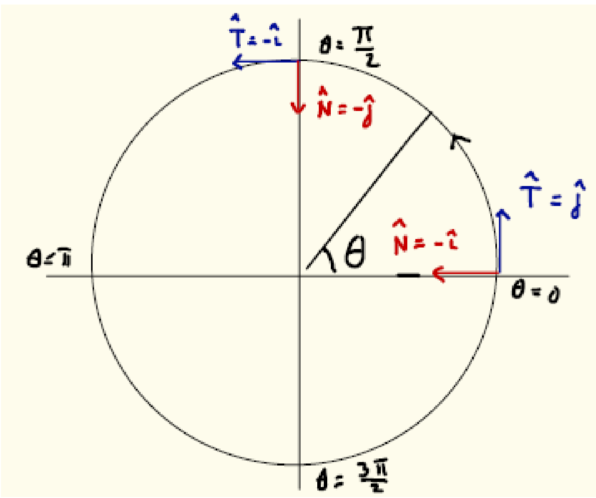
Ympyrän kehän kaarevuus on vakio, kuten arvata saattaa, samoin kaarevuussäde, joka on sama kuin ympyrän säde.

Tangenttivektori on

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{-r\sin\theta\,\hat{i} + r\cos\theta\,\hat{j}}{\sqrt{r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta}} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j},$$

normaalivektori

$$\hat{N} = \hat{N} = \frac{d\hat{T}}{dt}\Bigg/\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right| = \frac{-\cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j}}{\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}} = -\cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j}.$$



***

Esimerkki: Lasketaan käyrän $y = 3x^2 + 1$ kaarevuus.

Voimme parametrisoida käyrän käyttäen parametrina koordinaattia *x*, jolloin

$$\vec{r}(x) = x\hat{i} + (3x^2 + 1)\hat{j}.$$

Lasketaan tästä vektorit $\vec{v} = d\vec{r}/dx$ ja $\vec{a} = d\vec{v}/dx$:

$$\vec{v}(x) = \hat{i} + 6x\hat{j},$$

$$\vec{a}(x) = 6\hat{j}.$$

Kaarevuus on silloin

$$\kappa(x) = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v^3} = \frac{|6\hat{k}|}{(1 + (6x)^2)^{3/2}} = \frac{6}{(1 + (6x)^2)^{3/2}}.$$

Käyrä on paraabeli. Kaarevuus on suurimmillaan, kun $x = 0$, eli paraabelin pohjalla, ja pienenee kohti nollaa, kun x kasvaa kohti $\pm\infty$.

***