

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO  
MATEMATIIKAN JA  
TILASTOTIETEEN LAITOS  
LUENTOMONISTE 66

UNIVERSITY OF JYVÄSKYLÄ  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
AND STATISTICS  
LECTURE NOTES 66

**MIKKO SAARIMÄKI**

**REAALISIA VEKTORIAVARUUKSIA  
JA OMINAISARVOJA**

KURSSILLE  
LINEAARINEN ALGEBRA JA GEOMETRIA 2

JYVÄSKYLÄ  
2012

# SISÄLTÖ

<b>LUKIJALLE</b>	<b>1</b>
<b>I KERTAUSTA JA TÄYDENNYSTÄ</b>	<b>5</b>
1 LINEAARIKUVAUS JA MATRIISI .....	5
Eukleideen avaruus 5	
Suora summa 6	
Lineaarikuvaus 7	
Yleinen projektio 7	
Ortogonaaliprojektio 8	
Matriisi 9	
Determinantti 9	
2 OSITETTU MATRIISI .....	10
Ositus 10	
Käänteismatriisi ja determinantti 12	
<b>II KANNAN VAIHTO</b>	<b>15</b>
3 KOORDINAATTIEN JA MATRIISIN VAIHTO .....	15
Koordinaattien vaihto 15	
Lineaarikuvausten matriisin vaihto 16	
4 MATRIISIEN YHTÄLÄISYYS .....	18
5 ORTONORMAALIN KANNAN VAIHTO .....	19
<b>III OMINAISARVOT</b>	<b>21</b>
6 OMINAISARVOT JA -VEKTORIT .....	21
Ominaisarvoyhtälö 21	
Karakteristinen polynomi ja yhtälö 23	
7 DIAGONALISOITUVUUS .....	27
Ominaisarvojen kertaluvut 27	
Ominaiskanta 27	
Diagonalisoituvan matriisin potenssit 30	
Ominaisarvojen summa ja tulo 31	
Spektraaliesitys 32	
<b>IV SYMMETRINEN MATRIISI JA NELIÖMUOTO</b>	<b>34</b>
8 SYMMETRISEN MATRIISIN DIAGONALISOITUVUUS .....	34
Ortogonaalinen diagonalisoituvuus 34	
Symmetrinen matriisi 34	
9 NELIÖMUOTO .....	38
Neliömuoto 39	
Definiittisyys 40	
10 TOISEN ASTEEN YHTÄLÖ .....	41
Yleinen muoto 41	
Koordinaatisto 42	
Normaalimuoto 42	
11 TOISEN ASTEEN KÄYRÄ .....	44
12 TOISEN ASTEEN PINTA .....	49

<b>V VEKTORIAVARUUS</b>	<b>53</b>
13 REAALINEN VEKTORIAVARUUS .....	53
Vektoriavaruus 53	
Aliavaruus 54	
14 KANTA JA DIMENSIO .....	58
Lineaarinen riippuvuus 58	
Kanta 59	
Dimensio 60	
Koordinaatit 62	
<b>VI LINEAARIKUVAUS JA MATRIISI</b>	<b>63</b>
15 LINEAARIKUVAUS .....	63
16 LINEAARIKUVAKSEN KUVA JA YDIN .....	65
17 MATRIISI .....	67
<b>VII SISÄTULOAVARUUS</b>	<b>70</b>
18 SISÄTULO .....	70
Sisätulo 70	
Pituus, kohtisuoruus ja kulma 71	
19 ORTOGONAALISUUS .....	73
Ortonormaali kanta 73	
Ortogonaalikomplementti 76	
Isometria 77	
20 ADJUNGAATTI JA PNS-RATKAISU .....	77
Adjungaatti 77	
Paras arviokratkaisu 78	
Pns-suora 79	
21 QR-HAJOTELMA .....	80
<b>HENKILÖITÄ</b>	<b>82</b>
<b>KIRJALLISUUTTA</b>	<b>83</b>
<b>HAKEMISTO</b>	<b>85</b>