

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS
LUENTOMONISTE 65

UNIVERSITY OF JYVÄSKYLÄ
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
AND STATISTICS
LECTURE NOTES 65

MIKKO SAARIMÄKI

VEKTORILASKENTAA EUKLIDISISSA AVARUUKSISSA

KURSSILLE

LINEAARINEN ALGEBRA JA GEOMETRIA 1

SISÄLTÖ

LUKIJALLE	1
I VEKTORIAVARUUS	5
1 JOUKKO-OPIN MERKINTÖJÄ	5
2 LUONNOLLISET LUVUT JA TÄYDELLINEN INDUKTIO	7
Induktiivinen päättely 8	
Pienimmän alkion periaate 10	
Rekursiivinen määrittely 10	
3 EUKLEIDEEN AVARUUS	11
Tason koordinaatisto 11	
Yleinen Eukleideen avaruus 14	
4 LINEAARIKOMBINAATIO, VIRITTÄMINEN JA ALIAVARUUS	16
Lineaarikombinaatio 16	
Lineaarinen peite 17	
Aliavaruus 18	
Suora 20	
Affiini aliavaruus 20	
5 EUKLEIDEEN AVARUUDEN GEOMETRINEN RAKENNE	21
Kohtisuoruus, kulma ja pituus tasossa 21	
Sisätulo 22	
Vektorin pituus 23	
Vektorien kulma 25	
Vektorin projektio suoralle 25	
II LINEAARINEN YHTÄLÖRYHMÄ	28
6 LINEAARINEN YHTÄLÖRYHMÄ	28
Graafinen ratkaiseminen 28	
Kaksi yhtälöä ja kaksi tuntematonta 29	
Kolme tuntematonta 30	
7 LAAJENNETTU KERROINMATRIISI JA PORRASMUOTO	31
Eliminointi- ja sijoitusmenettely 31	
Laajennettu kerroinmatriisi ja rivioperaatiot 33	
Porrasmuoto ja perusmuoto 36	
8 GAUSSIN JA JORDANIN MENETELMÄ	37
Rivioperaatiot 37	
Algoritmin kuvaus 37	
Ratkaisujen määrä 40	
9 HOMOGEENINEN YHTÄLÖRYHMÄ	41
III LINEAARINEN RIIPPUVUUS, KANTA JA DIMENSIO	43
10 LINEAARINEN RIIPPUVUUS JA RIIPPUMATTOMUUS	43
Lineaarisen riippuvuuden selvittäminen 45	
GJ-menetelmän käyttö 47	
Taso 48	
11 KANTA JA DIMENSIO	48
Avaruuden kanta ja dimensio 50	
Aliavaruuden kanta ja dimensio 51	
Yleinen taso ja hypertaso 53	

IV LINEAARIKUVAUS	54
12 KUVAUSTEN PERUSKÄSITTEITÄ	54
13 LINEAARIKUVAUS	55
Lineaarikuvauksen määrittely ja esimerkkejä	55
Lineaarikuvausten summa ja reaalikerta	58
Yhdistetty kuvaus	59
14 LINEAARIKUVAUS JA KANTA	59
15 LINEAARIKUVAUKSEN YDIN JA KUVA	62
Lineaarikuvauksen ydin	62
Lineaarikuvauksen kuvajoukko	64
Dimensiolause	64
16 LINEAARINEN BIJEKTIO, KÄÄNTEISKUVAUS JA ISOMORFISMI	67
Lineaarinen bijektio ja käänteiskuvaus	67
Isomorfismi	68
V MATRIISI	70
17 LINEAARIKUVAUKSEN MATRIISI	70
Lineaarikuvauksen matriisi	71
Matriisinimityksiä	74
Matriisien yhtäsuuruus, summa ja reaalikerta	75
18 MATRIISIEN TULO	76
19 KÄÄNTEISMATRIISI	80
20 KÄÄNTEISMATRIISIN LASKEMINEN	84
21 ALKEISMATRIISIT	86
22 TRANSPONOITU MATRIISI	89
VI DETERMINANTTI	91
23 KÄÄNTYVYYSMITTARI	91
24 DETERMINANTIN REKURSIIVINEN MÄÄRITTELY	93
Palautuskaava	93
25 ALKEISMUUNNOKSET JA DETERMINANTTI	95
Determinantti kääntyvyysmittarina	99
Determinantin laskeminen Gaussin menetelmällä	99
26 TULON JA TRANSPOOSIN DETERMINANTTI	101
27 KEHITYSSÄÄNNÖT	103
28 DETERMINANTIN MULTILINEAARISUUS	104
Lineaarikuvauksen determinantti	106
29 LIITTOMATRIISI	106
30 BIJEKTIOIT JA ALKEISKUVAUKSET	108
Bijektioita ja alkeiskuvaus	108
Alkeiskuvaus ja bijektio	108
VII ORTOGONAALISUUS	110
31 KOHTISUORUUS JA KANTA	110
32 ORTOGONAALIKOMPLEMENTTI JA -PROJEKTIO	112
Hypertaso ja normaalivektori	114
Matriisin ja transpoosin asteet	114
Lineaarikuvausten yleinen rakenne	115
33 GRAMIN JA SCHMIDTIN MENETELMÄ	115
34 ISOMETRIA	117
Suuntaissärmiön tilavuus	119
35 ISOMETRIAN KARAKTERISOINTEJA	120
HENKILÖITÄ	121
KIRJALLISUUTTA	122
HAKEMISTO	124