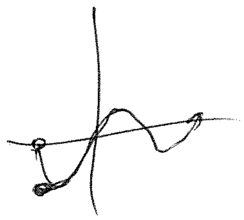
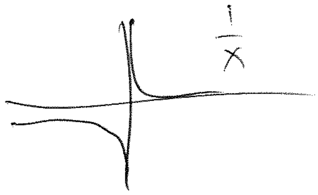
Kertaus

Yhtälöt ja epäyhtälöt

- ~~Jatkuva funktio voi vaihtaa merkkiään~~ vain ~~Jos jatkuva fu~~

Jatkuva funktio voi vaihtaa merkkiään väleillä joilla on ~~nol~~ funktiolla on nollakohtia tai pisteitä joissa se ei ole määritelty.





- nollakohtia etsitty
  - 2. asteen yhtälöistä
  - joistain korkeamman asteen yhtälöistä
  - murtoyhtälöistä
  - neliöjuuriyhtälöistä
  - itseisarvoyhtälöistä
  - sin, cos, tan yhtälöistä

(murtoyhtälöistä, neliöjuuriyhtälöistä, itseisarvoyhtälöistä:) määrittelyjoukko!

- epäyhtälöiden ratkaiseminen $f(x)>0$ (kun f on jatkuva funktio)
  1. Etsi nollakohdat ja selvitä määrittelyjoukko.
  2. Selvitä merkki ~~…~~ määrittelyjoukossa.
     - Tapa 1: kokeilemalla. (Merkki voi vaihtaa vain nollakohdissa. Riittää tarkastaa yksipiste per väli.)
     - ~~…~~ Joskus voi käyttää merkkikaaviota tms.

Esim. Ratkaistaan epäyhtälö $\dfrac{x\cdot(x^2-4)}{x^2+2x-3} \leq 0$.

Ratkaistaan ensin osoittajan ja nimittäjän nollakohdat

$x(x^2-4) = x(x-2)(x+2) = 0$ kun $x=0$, $x=2$, $x=-2$

ja 2-asteen yhtälön ratkaisukaavan mukaan

$x^2+2x-3=0$ kun $x=+1$ tai $x=-3$ eli lauseke ei määritelty kun $x = -3$, $x=1$

Merkkikaavio

	-3		-2		0		1		2	
$x(x^2-4)$	$-$		$-$		$+$		$-$		$-$	$+$
x^2+2x-3	$+$		$-$		$-$		$-$		$+$	$+$
$\dfrac{x(x^2-4)}{x^2+2x-3}$	$-$		$+$		$-$		$+$		$-$	$+$

Merkit saatu sijoittamalla

$3(3^2-4) = 15$

$-3((-3)^2-4) = -15$

$-1((-1)^2-4) = 3$

$1(1^2-4) = -3$

x^2+2x-3:n kuvaaja ylöspäin aukeava paraabeli

V: $x < -3$, $-2 \leq x \leq 0$ tai $1 < x \leq 2$.

Analyyttinen Geometria

- $Ax+By+C=0$ suoran yhtälö

  $y = kx+b$

  $y-y_0 = k(x-x_0)$

- ympyrän yhtälö

  $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$ (x_0,y_0) kp ja

  $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$

- Leikkauspisteiden etsiminen yhtälöitä yhtälöpareja ratkaisemalla.

$$\begin{cases} y = kx+b \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2 \end{cases}$$

Reaalifunktiot

- Yhdistetyt funktiot ja käänteisfunktiot
  - $f: A \to B$ käänteisfunktio $f^{-1}: B \to A$

    $f(f^{-1}(x)) = x$

    $f^{-1}(f(y)) = y$

    kaikille $x \in B$, $y \in A$

  - Esim e^x ln, 10^x, $\log x$ x^2, $x^{\frac{1}{2}}$ jne.
- Muista myös sin, cos, tan + yhtälön ratkaisu

- Kasvavuus- ja vähenevyys (+ aidot)

Differentiaalilaskenta

- Raja-arvojen laskeminen (joissain tapauksissa).
- Derivaatta pisteessä x

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad \left(= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right)$$

kuvaa ~~lokaalia~~ hetkellistä kasvunopeutta.

- Derivointisäännöt ja niiden käyttö (erityisesti tulon, osamäärän ja yhdistetyn funktion derivointi)

- f on aidosti kasvava ~~jos~~ välillä $[a,b]$ jos $f'(x) > 0$ kaikissa $[a,b]$:n pisteissä.

  aid. väh. jos $f'(x) < 0$.

- lokaalit ääriarvot pisteissä, joissa derivaatta on nolla ja vaihtaa merkkiään

Esim.
Etsi funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ lokaalit ääriarvot ! ja selvitä niiden tyyppi

Määritelty kun $x > 0$.

Etsitään derivaatan nollakohdat ~~Koska~~ koska lokaalit ääriarvot voivat olla vain pisteissä joissa $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{x \cdot D(\ln x) - (Dx)\ln x}{x^2} = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

ja $\frac{1-\ln x}{x^2} = 0 \quad | \cdot x^2$

Kun $1 - \ln x = 0$

$1 = \ln x \quad | e^{(\ldots)}$

$e^1 = e^{\ln x}$

$e = x$

Tämä on ainoa derivaatan nollakohta. $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ on jatkuva kun $x>0$.

Tällöin derivaatan merkki voi vaihtua välillä $(0,\infty)$ vain derivaatan nollakohdassa $x=e$.

Koska $f'(1) = \frac{1-\ln 1}{\cancel{x}^2} = 1 > 0$

ja $f'(\cancel{e}\,3) = \frac{1-\ln 3}{3^2} \approx -0{,}011 < 0$

on f kasvava aid. välillä $(0, e]$ ja aid. vähenevä välillä $[e,\infty)$

f'	+	−
f	↗	↘

Siis f:llä on lokaali maksimi risteessä $x=e$
$f(e) = \frac{1}{e}$.

Vaikka funktiolla olisi lokaaleja maksimeja ja minimejä se ei välttämättä saa suurinta tai pienintä arvoaan.

Esim. $g(x) = x^3 - x$ ei saavuta suurinta tai pienintä arvoaan, sillä g saa mielivaltaisen suuria ja pieniä arvoja kun x on pieni tai riittävän suuri.

- Suljetulla välillä jatkuva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa
  & ~~Derivoituva~~ jos funktio on lisäksi derivoituva niin suurin ja pienin arvo saadaan välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa.

• Riittää derivoida funktio, etsiä derivaatan nollakohdat

Integraalilaskentä

- ~~F:n~~
- F on f:n integraalifunktio jos $F'(x) = f(x)$ kaikissa pisteissä jossa f määritelty.

- $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

- Tarkista integrointi aina derivoimalla.
- Yhdistetyn funktion integroimissääntö. $\int f'(x)\, g'(f(x))\,dx = g(f(x)) + C$

Esim.

a) $\int \sin(3x)\,dx$

Luonnollinen

$f(x) = 3x \qquad f'(x) = 3$

$g'(x) = \sin x \qquad g(x) = -\cos x$

$$= \int \frac{1}{3} \cdot \underbrace{3}_{f'(x)} \underbrace{\sin(3x)}_{g'(f(x))}\,dx = \frac{1}{3} \int 3 \sin(3x)\,dx = \frac{1}{3}(-\cos(3x)) + C$$

$$= -\frac{1}{3}\cos 3x + C$$

Tarkistetaan derivoimalla:

$$D\left(-\frac{1}{3}\cos(3x) + C\right) = -\frac{1}{3} \underbrace{D(\cos(\overset{f(x)}{3x}))} + \underbrace{DC}_{=0}$$

sisäfunktion derivaatta

$$= -\cancel{\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{(\cancel{-}\sin(3x))}_{\text{ulkofunktion derivaatta pisteessä } 3x} \cdot \cancel{3} = \sin(3x)$$

b) $\int x(1-x^2)^{-2}\,dx \qquad f(x) = 1 - x^2 \qquad g'(x) = x^{-2} \qquad g(x) = -x^{-1}$

$f'(x) = -2x$

$$= \int \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2)\, x\, (1-x^2)^{-2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int -2x(1-x^2)^{-2}\,dx = -\frac{1}{2}\left(-(1-x^2)^{-1}\right) + C = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1} + C$$

Tarkista derivoimalla.

- Käyrän ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{jos} \quad f(x) \geq 0 \text{ välillä } [a,b]$$

$$-\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{jos} \quad f(x) \leq 0 \text{ välillä } [a,b]$$

muuten pilkottava paloihin

Kahden käyrän rajaaman alueen ala

$$\int_a^b f(x)-g(x)\,dx \quad \text{jos} \quad f(x)-g(x) \geq 0 \quad \text{eli} \quad f(x) \geq g(x) \text{ välillä } [a,b]$$

$$-\int_a^b g(x)-f(x)\,dx \quad \text{jos} \quad g(x)-f(x) \geq 0 \quad \text{eli} \quad f(x) \leq g(x) \quad \text{—//—}$$

pilkottava paloihin

Tentti~~vastaus~~

~~Likiarvo~~ Laskujen lisäksi

- Vastatessa ~~[illegible]~~ pyri kertomaan mitä teet ~~[illegible]~~ ja miksi. ~~[illegible]~~

  (Matematiikassa pyritään perustelemaan loogisesti miten asia seuraa oletuksista.)

- Kannattaa katsoa mallia mallivratkaisuista!
- ~~[illegible]~~ Laskimesta saatavat likiarvot eivät ole tarkkoja. ~~Mieluummin tarkat arvot~~ Käyttäkää tarkkoja arvoja.

  Pisteitä saa lähinnä muista asioista kuin vastauksen numeroarvosta.

- Vanhoja tenttejä kopioitavaksi on Ynnän toimistossa MaD 2. krs aula
- Laskuharjoituspisteet vaikuttavat tenthiin ja uusintaan.

  Ilmoittautuminen (päättyy keskiviikkona)

- Kannattaa etsiä lisää tehtäviä esim.
    - Häkkisen monisteesta
    - v. 2013 kurssin sivuilta
    - lukiokirjoista.