4.4. Potenssi- ja juurifunktiot

$n = \cancel{0}\, 1, 2, 3, \ldots$

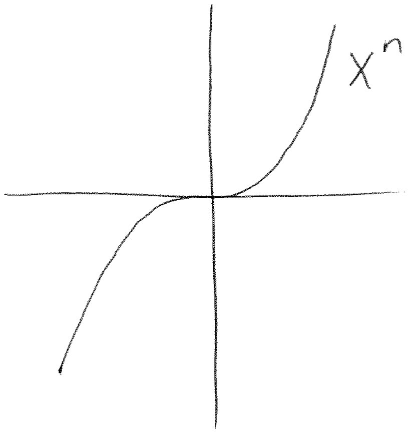
Potenssifunktio on muotoa $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko.

Jos n on parillinen f:n arvojoukko on $[0, \infty)$ ja jos n on pariton arvojoukko on $\mathbb{R}$.

Jos n on pariton on f aidostikasvava. ja yhtälöllä $x^n = a$ yksi ratkaisu

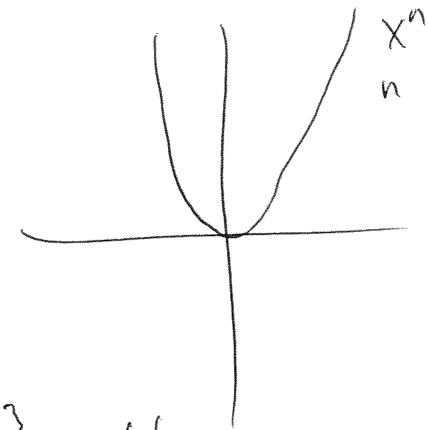
$$x = \sqrt[n]{a}.$$



x^n n pariton

Jos n on parillinen, niin yhtälöllä $x^n = a$ ja $a > 0$ on kaksi ratkaisua

$$x = \pm\sqrt[n]{a}$$ ja jos $a < 0$ ratkaisuja ei ole.



x^n n parillinen

Esim.

a) $\sqrt[3]{-64} = -4$, sillä $(-4)^3 = -64$

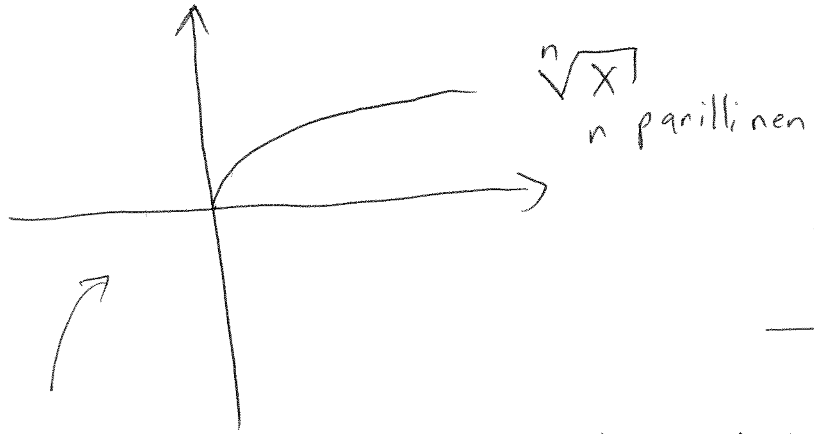
b) $\sqrt[4]{81} = 3$ sillä $3^4 = 81$

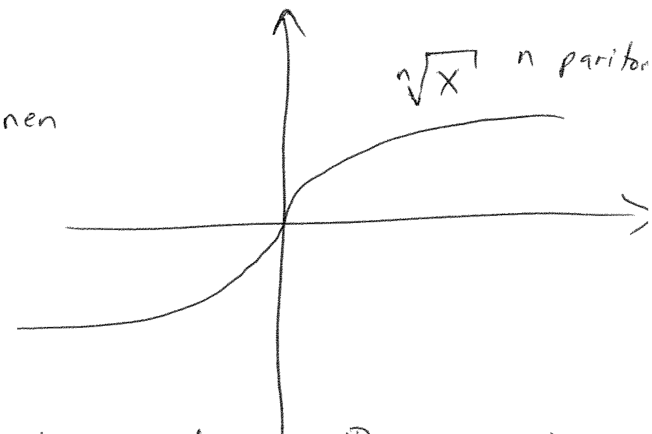
c) $\sqrt[4]{-16}$ ei ole määritelty. ~~sillä~~

d) $\sqrt[6]{1000000} = 10$, sillä $10^6 = 1000000$.

(38) Juurifunktio on potenssifunktion käänteisfunktio.

Kun n on parillinen arvo- ja määrittelyjoukko on $[0,\infty)$
ja kun n on pariton —||— on $\mathbb{R}$.





Koska x^n, n parillinen ei ole aidosti monotoninen $\mathbb{R}$:ssä, pitää määrittelyjoukkoa rajoittaa, esim. $[0,\infty)$ kelpaa.

Yleisesti käytetään seuraavaa merkintää:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad \text{missä } a>0, \ \cancel{m,n\in\mathbb{Z}} \ n\in\mathbb{N} \ m\in\mathbb{Z}$$

Esim. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, $a>0$.

Tämä on yhteen sopiva aiemmin kerrottujen potenssin laskusääntöjen kanssa.

Esim

a) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \left(64^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{6}} = \left(2^6\right)^{\frac{1}{6}} = 2$

b) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = a^{\frac{8}{12}+\frac{3}{12}} = a^{\frac{11}{12}}$

Eksponenttina voi olla myös mikä tahansa reaaliluku. Tällöin kantaluvun on oltava positiivinen. Likiarvoja saa laskimesta

esim $(\sqrt{3})^{\pi} \approx 5,62$

ja $(\sqrt{3})^{\pi} = 3^{\frac{\pi}{2}} \approx 5,62$,

4.5. Eksponentti- ja logaritmifunktio

Esim. Hiivaa kasvatettaessa hiivaviljelmän massa kasvaa 7,2 kertaiseksi joka päivä. Alussa massa on 200 g. ~~Paljonko hiivaa 200 g viikon kuluttua?~~

Päiviä n	massa (kg)
0	$0,2$
1	$7,2 \cdot 0,2$
2	$7,2^2 \cdot 0,2$
3	$7,2^3 \cdot 0,2$
n	$7,2^n \cdot 0,2$

Viikon kuluttua hiivaa on $7,2^7 \cdot 0,2 \approx 200\,t$.

Paljonko hiivaa oli 2 päivää sitten?

Merkitään kysyttyä massaa x:llä.

$$x \cdot (7,2)^2 = 0,2 \quad \text{eli} \quad x = (7,2)^{-2} \cdot 0,2 \approx 3,8\,g.$$

Muuttuja (aika) on eksponenttina.

4.5.2

Eksponenttifunktiolla tarkoitetaan muotoa $f(x)=a^x$ olevia funktioita.

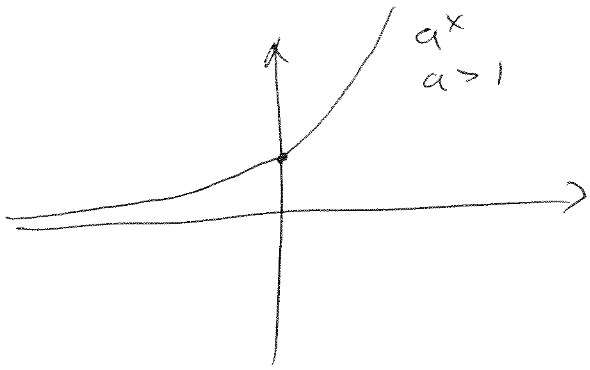
Tässä $a>0$. Määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$, ~~ja eksponenttifunktion~~

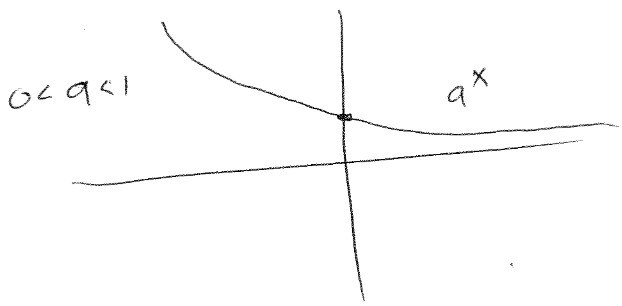
Jos $a>1$ on funktio aidosti kasvava.

Jos $0<a<1$ on funktio aidosti vähenevä.

Näissä tapauksissa funktion arvojoukko on $]0,\infty[$.

Jos $a=1$, niin on $f(x)=1^x=1$ eli f on vakiofunktio.





Aidon ~~Km~~ monotonisuuden nojalla kaikille luvuille x_1, x_2 ja $a\neq 1$, $a>0$ on totta, että $a^{x_1}=a^{x_2}$ täsmälleen silloin kun $x_1=x_2$.

Jos $a>1$, niin $a^{x_1}>a^{x_2} \iff x_1>x_2$.

Jos $0<a<1$, niin $a^{x_1}>a^{x_2} \iff x_2>x_1$.

Esim.

1) Ratkaise

$$4\cdot 16^x=\frac{1}{8}$$

$$2^2(2^4)^x=2^{-3}$$

$$2^{2+4x}=2^{-3}$$

eksp. f. on monotoninen

$$2+4x=-3 \qquad x=-\frac{5}{4}.$$

3 b) $0{,}2^x > 1$

$0{,}2^x > 0{,}2^0$

Koska $0{,}2 < 1$ on $0{,}2^x$ aidosti vähenevä funktio ja em. ey toteutuu kun $x < 0$.

4.5.2 Logaritmifunktio

4.5. alussa ollut hiivaesimerkki kertoo hiivan määrän annetun ajan kuluttua. Hiivanmäärä x vuorokauden kuluttua saadaan funktiosta $h(x) = 0{,}2 \cdot 7{,}2^x$. Milloin hiiva on 1000 kg?

$h(x) = 1000$

$0{,}2 \cdot 7{,}2^x = 1000$

$7{,}2^x = \cancel{20000}\ 5000$

Mitä nyt ...

Kokeillaan laskimella

$7{,}2^5 \approx 19350$	$7{,}2^4 \approx 2687$
~~$7{,}2^{5.1} \approx 23600$~~	$7{,}2^{4{,}2} \approx 3988$
~~$7{,}2^{5{,}05} \approx 21400$~~	$7{,}2^{4{,}3} \approx 4859$

Vastaus jossain ~~5:n~~ 4,3:n ja ~~5,05:n~~ 4,4:n välillä.

Joskus näitä yhtälöitä voi ratkoa suoraan kuten

$2^x = \frac{1}{8}$

$2^x = 2^{-3}$

$x = -3$, koska 2^x on aidosti kasvava.

Tuntemattoman eksponentin ratkaisemiseen käytetään usein logaritmifunktiota, joka on eksponenttifunktion käänteisfunktio.

Määritelmä

Luvun $b>0$ a-kantainen logaritmi on se eksponentti x, joka toteuttaa yhtälön $a^x=b$.

Luvun b a-kantaista logaritmia merkitään $\log_a b$

Esim.

Laske

a) $\log_2 16$ b) $\log_3 \sqrt[6]{3}$ c) $\log_{10} \frac{1}{1000000}$

a)

$2^4=16$ joten $\log_2 16 = 4$

b) $\sqrt[6]{3} = 3^{\frac{1}{6}}$ joten ~~$3^x = 3^{\frac{1}{6}}$ kun $x=\frac{1}{6}$~~

$\log_3 \sqrt[6]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{1000000} = 10^{-6}$ $\log_{10} 10^{-6} = -6.$

Logaritmin määritelmän mukaan seuraavat laskusäännöt ovat voimassa, kun $a>0$ ja $a \neq 1$:

1)

$\log_a a^p = p$

2) $\log_a 1 = 0$ $(a^0=1)$

3) $\log_a a = 1$ $(a^1=a)$

4) $a^{\log_a x} = x$ (kun $x>0$)

Potenssin laskusäännöistä seuraavat laskusäännöt ($x>0$, $y>0$, $a>0$ ja $a \neq 1$)

5) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

6) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

7) $\log_a x^p = p \log_a x$

8) $\log_a x = \dfrac{\log_k x}{\log_k a}$ ($k>0$ ja $k \neq 1$)

Viimeinen kohta kertoo miten kantaluku vaihdetaan

Yleisiä kantalukuja ovat 10 ja $e = 2{,}7182818\ldots$

Jatkossa merkitään $\log_{10} x =: \lg x$ ja $\log_e x = \ln x$.

Laskimissa merkitään usein $\log_{10} \cancel{x} = \log$.

~~Ensimmäinen~~ 10-kantaista sanotaan Briggsin logaritmiksi ja e-kantaista luonnolliseksi tai Neperin kannaksi (e = Neperin luku).

Esim

a) $\lg 50 + \lg 2 = \lg(50 \cdot 2) = \lg 100 = 2$

b) $4^{2+3\log_4 3} = 4^2 \cdot 4^{3\log_4 3} = 16 \cdot 4^{\log_4 3^3} = 16 \cdot 27 = 432$.

c) ~~Ratkaise~~ $\log_3(9\sqrt[4]{3}) = \log_3(3^2 \cdot 3^{\frac{1}{4}}) = \log_3 3^{\frac{9}{4}} = \underset{7)}{\frac{9}{4}} \underset{3)}{\log_3 3} = \frac{9}{4}$.

d) Ratkaise $2^x = 5{,}2$.

Otetaan 10-kantainen logaritmi puolittain

Saadaan

$$\lg 2^x = \lg 5{,}2$$

$$x \lg 2 = \lg 5{,}2$$

$$x = \frac{\lg 5{,}2}{\lg 2}$$

Vastausta ei voi enää sieventää, mutta laskimesta voi laskea oikealle vastaukselle likiarvon $\dfrac{\lg 5{,}2}{\lg 2} \approx 2{,}379$.

~~Yhteenveto~~

Logaritmi eksponenttifunktion käänteisfunktiona.

Funktio $f:]0,\infty[\to \mathbb{R}$ $f(x) = \log_a x$ on funktion

Olkoon $a > 0$, $a \neq 1$.

$g(x) = a^x$ käänteisfunktio. f on aidosti monotoninen (kasvava jos $a > 1$ ja vähenevä jos $0 < a < 1$.).

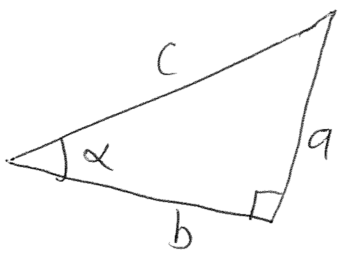
4.6 Trigonometriset funktiot

Suorakulmaisessa kolmiossa on määritelty trigonometriset funktiot

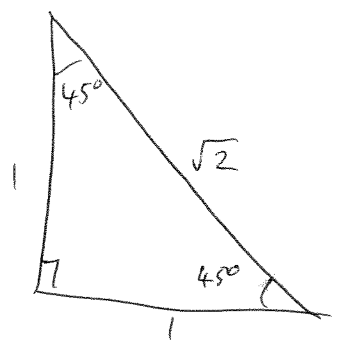
$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

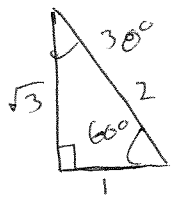


Trigonometristen funktioiden tarkkoja arvoja saadaan mm. seuraavista muistikolmioista



$\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 45° = 1$



$\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$

$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

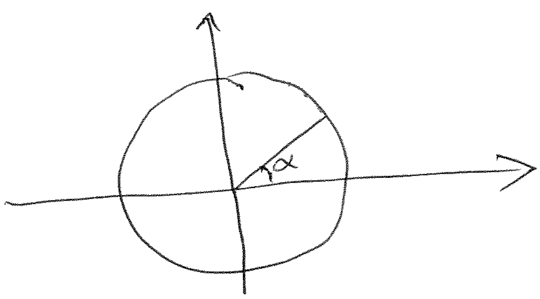
$\tan 60° = \sqrt{3}$.

Näin määriteltyinä trigonometriset funktiot on määritelty vain muuttujan arvoille välillä $0° - 90°$.

Jatkossa pyrimme määrittelemään trigonometriset funktiot yleisemmin, mutta ensin on vaihdettava asteet luonnollisempaan kulmamittaan.

4.6.1 Radiaani

Sijoitetaan tarkasteltava kulma yhsikköympyrään (kp. origo säde 1) s.e. toinen kylki on x-akselilla



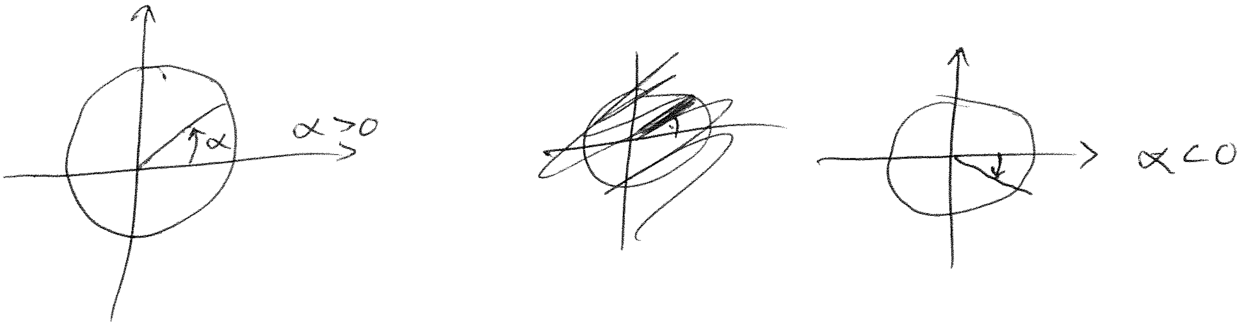
Kulmaa vastaavan kaaren pituus on suoraan verrannollinen kulman suuruuteen.

Ts. kulman kokoa voidaan mitata kaaren pituudella.

Kulman suuruus radiaaneina on vastaavan kaaren pituuden ja säteen suhde.

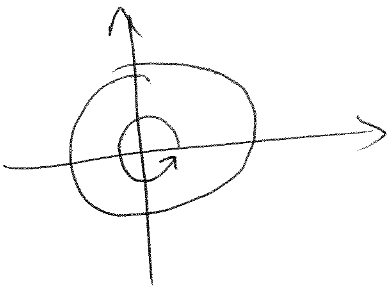
Yhsikköympyrässä kulman suuruus radiaaneina on kaaren pituus.

Lisäksi sovitaan, että vastapäivään kierrettessä kulman suuruus on positiivinen ja myötäpäivään kierrettäessä negatiivinen.

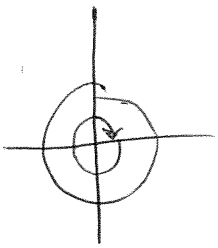


Radiaaneille ei yleensä merkitä yksikköä. Tarvittaessa merkitään rad. esim. 3 rad tai π rad.

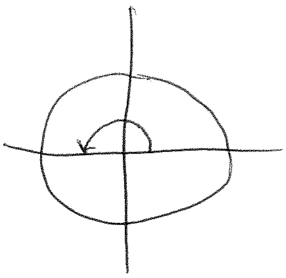
Esim.



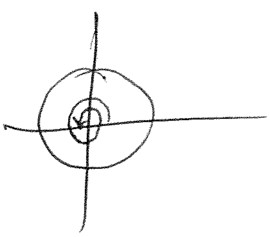
2π rad



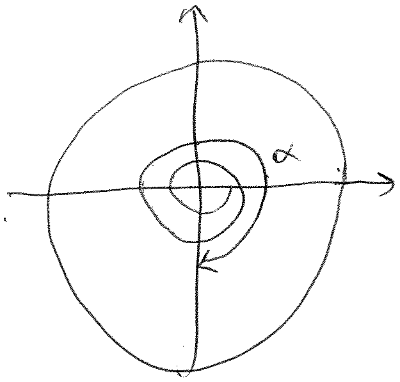
-2π rad



π rad



3π rad



$$\alpha = \left(4 + \tfrac{1}{2}\right)\pi \text{ rad} = \tfrac{9}{2}\pi \text{ rad}$$

Koska $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$, niin on $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$

ja $1^\circ = \cancel{\frac{2\pi}{360} \text{ rad}} \quad \frac{\pi}{180} \text{ rad}$

Esim Muuta 30° radiaaneiksi.

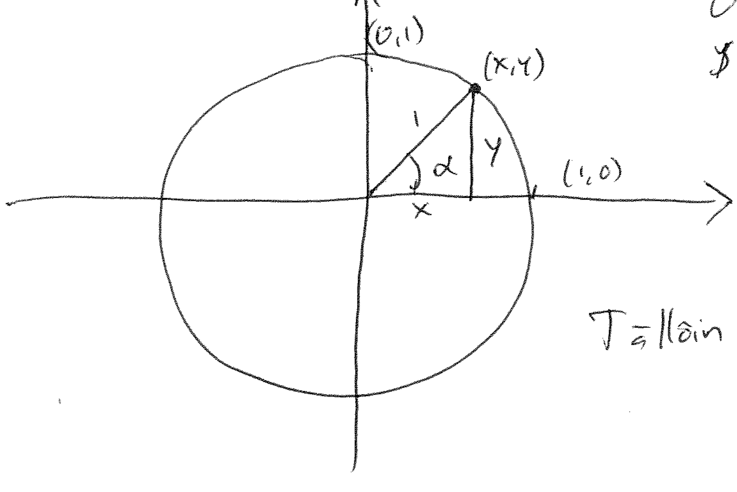
$$30^\circ = 30 \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Muuta $\frac{4}{3}\pi$ rad

$$\frac{4}{3}\pi \text{ rad} = \frac{4}{3}\pi \frac{180^\circ}{\pi} = 240^\circ.$$

4.6.2. Trigonometriset funktiot

Olkoon α terävä kulma sijoitettuna yksikköympyrään



Tällöin $\sin\alpha = \frac{y}{1} = y$

$\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$

$\tan\alpha = \frac{y}{x}$

Siis trigonometristen funktioiden arvot saadaan kulman kyljen ja yksikköympyrän leikkauspisteiden koordinaateista.

48

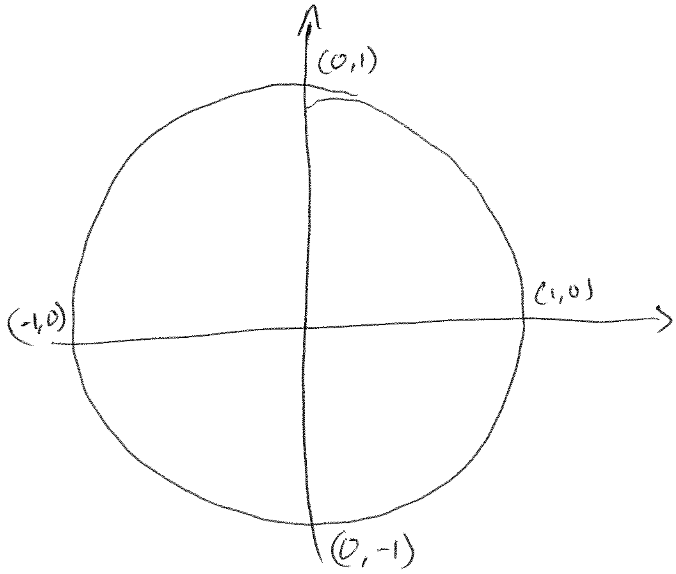
Määritellään nyt trigonometristen funktioiden arvot kaikille kulmille edellisen havainnon perusteella.

Jos α on kulma ja (x, y) kulmaa vastaava piste ympyrän kehällä, niin määritellään $\sin\alpha = y$ ja $\cos\alpha = x$ ja ~~$\tan\alpha = \frac{y}{x}$~~

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \text{ kunhan } \cos\alpha = x \neq 0.$$

Esim

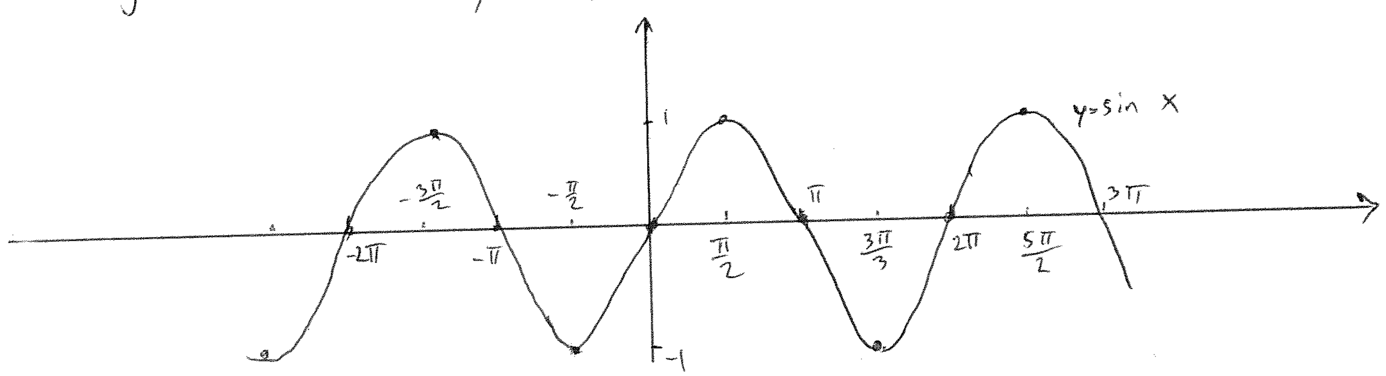
α	kehän piste	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
0	$(1,0)$	0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	$(0,1)$	1	0	ei määr.
π	$(-1,0)$	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	$(0,-1)$	-1	0	ei määr.
2π	$(1,0)$	0	1	0

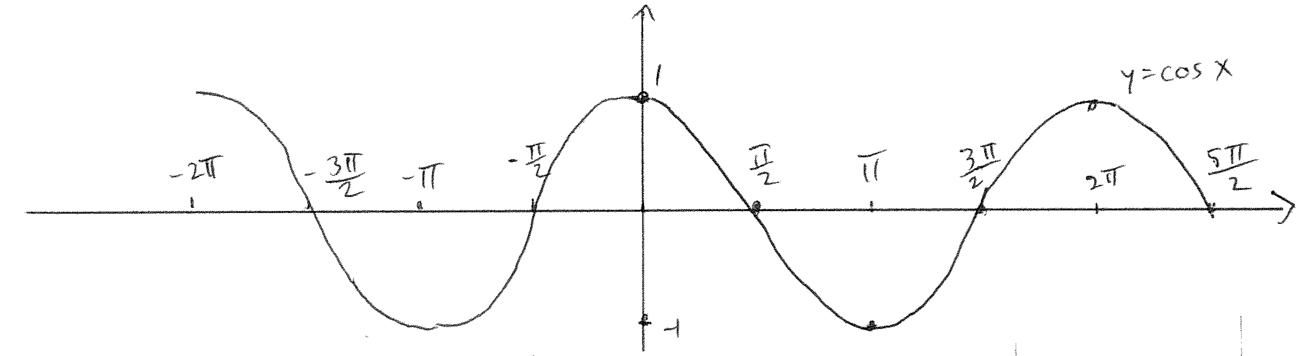


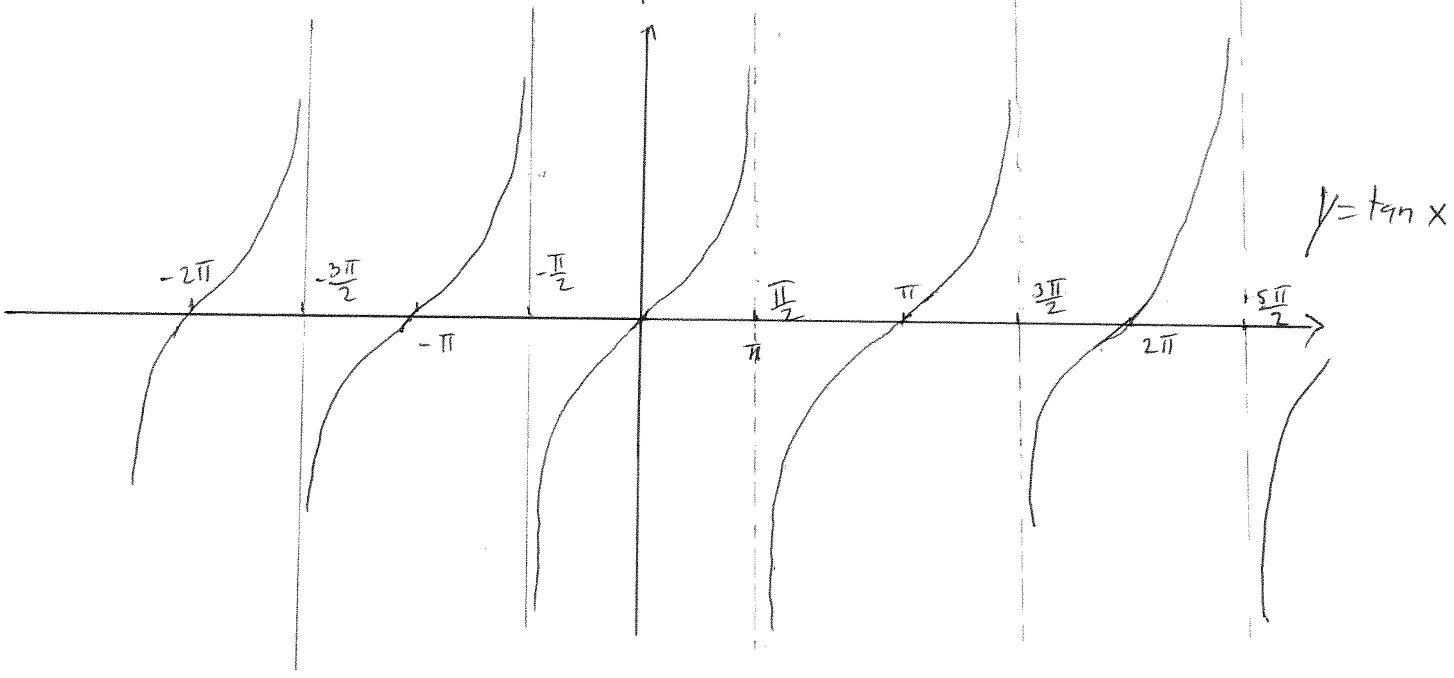
(Likiarvoja saa laskimista, tarkkoja arvoja taulukkokirjoista. (ja muistikolmioista))

Sini ja kosini voidaan näin määritellä kaikille reaaliluvuille. Tangentti voidaan määritellä vain niille reaaliluvuille x, joille $\cos x \neq 0$.

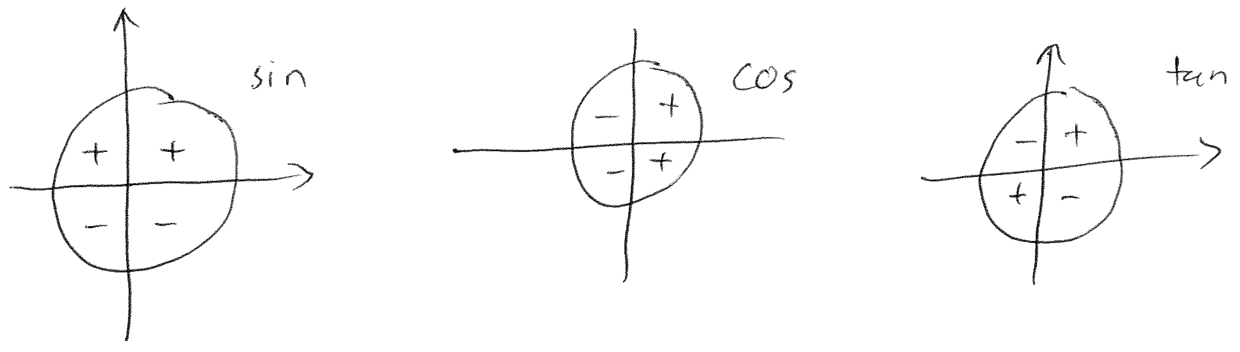
$\cos x = 0$ kun $x = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Sinin ja kosinin arvojoukko on $[-1,1]$ ja tangentin $\mathbb{R}$.







Trig funktioiden merkit näkyvät oheisista kaavioista



Trigonometrisilla funktioilla on myös paljon symmetriaominaisuuksia.

Kun muuttujan arvoja muutetaan 2π:llä (eli ~~kulma~~ muuttuu kierroksen verran) ~~vezr~~ ympyrän kehän piste pysyy samana. Tällöin

$$\sin x = \sin(x + n \cdot 2\pi) \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \cos(x + n \cdot 2\pi) \quad n \in \mathbb{Z}.$$

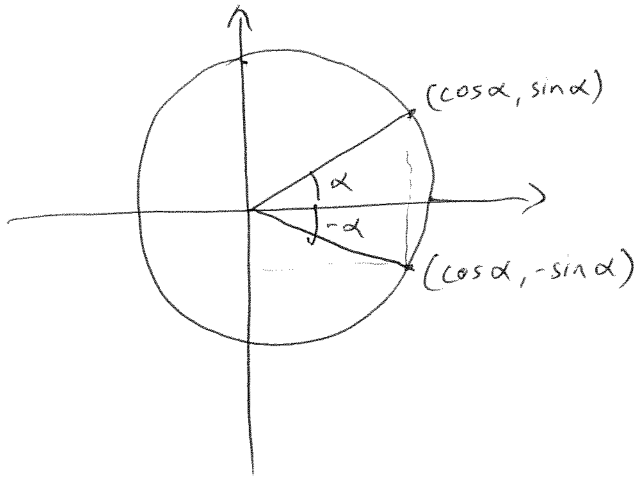
Tangentin arvot toistuvat π:n välein

$$\tan x = \tan(x + n \cdot \pi) \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Lisäksi

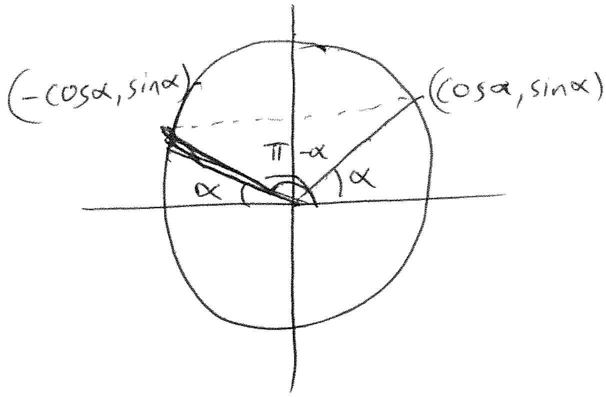
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$



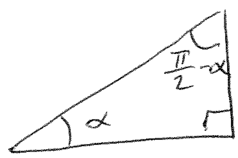
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$



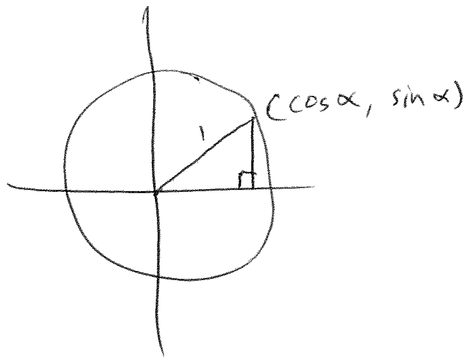
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$



Pythagoraan lause

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$



Esim

a) $\cos \frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

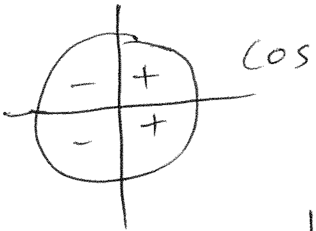
b) Jos $\cos x = -\frac{2}{5}$ ja $\pi < x < 2\pi$, niin mikä on $\sin x$.

Koska $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$ on $\sin^2 x = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$

ja $\sin x = \pm \frac{\sqrt{21}}{5}$.

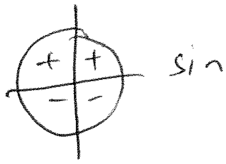
Koska $\cos x < 0$ ja $\pi < x < 2\pi$ on

$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, sillä $\cos x > 0$ kun $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

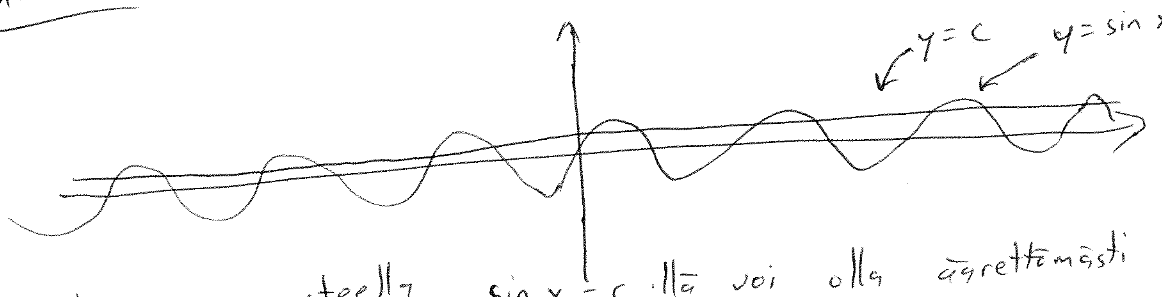


Tällöin myös $\sin x < 0$

juten $\sin x = -\frac{\sqrt{21}}{5}$.



Yhtälöt:



Kuvan perusteella $\sin x = c$:llä voi olla ääretömästi ratkaisuja tai ei yhtään.

Ratkaisemiseen käytetään usein seuraavaa tietoa.

$\sin x = \sin \alpha$ kun

$x = \alpha + n \cdot 2\pi$ tai $x = (\pi - \alpha) + n \cdot 2\pi$ $n \in \mathbb{Z}$

$\cos x = \cos \alpha$

$x = \alpha + n \cdot 2\pi$ tai $x = -\alpha + n \cdot 2\pi$ $n \in \mathbb{Z}$

$\tan x = \tan \alpha$

$x = \alpha + \pi \cdot n \quad n \in \mathbb{Z}$

Esim.

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Koska $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (muistikolmiot)

kaikki ratkaisut ovat

$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n \quad n \in \mathbb{Z}$ ja $x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi n$

$= \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$

b) $\cos 2x = 1$

$\cos 0 = 1$, joten kaikki ratkaisut ~~saadaan~~ ovat

$2x = 0 + 2\pi n$ (ja $2x = -0 + 2\pi n$) $n \in \mathbb{Z}$

eli $x = \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$.

c) yhtälöllä $\sin(\sqrt{3}\, x^2) = 5$ ei ole ratkaisuja sillä

$-1 \le \sin \alpha \le 1$.