5. Differentiaalilaskentaa

5.1. Raja-arvo

Esim. $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$ ei ole määritelty, kun $x=1$.

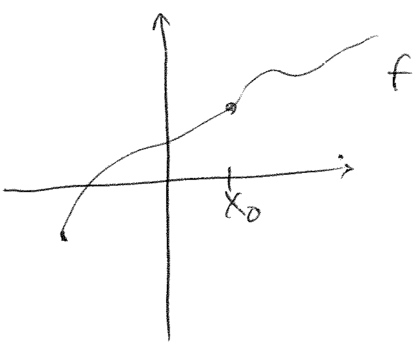
Kuitenkin

x	0,8	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1	1,2
$f(x)$	3,8	3,9	3,99	3,999	—	4,001	4,01	4,1	4,2

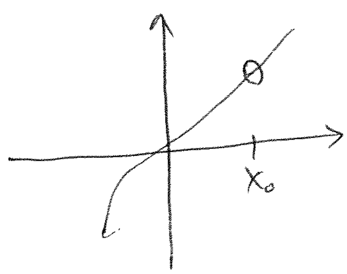
Näyttää siltä, että $f(x)$ lähestyy neljää kun x lähestyy lukua 1. Sanotaan, että funktiolla f on raja-arvo 4 pisteessä 1. Tätä merkitään $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 4$ tai

$f(x) \to 4$ kun $x \to 1$.

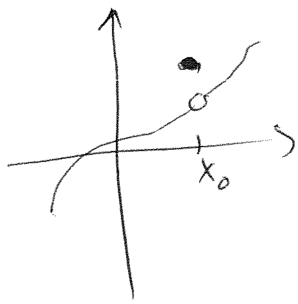
Yleisesti funktiolla f on kohdassa $x=x_0$ raja-arvo a, merkitään $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, jos arvot $f(x)$ lähestyvät a:ta kun x lähestyy x_0:aa. Funktion f ei tarvitse olla määritelty pisteessä x_0.



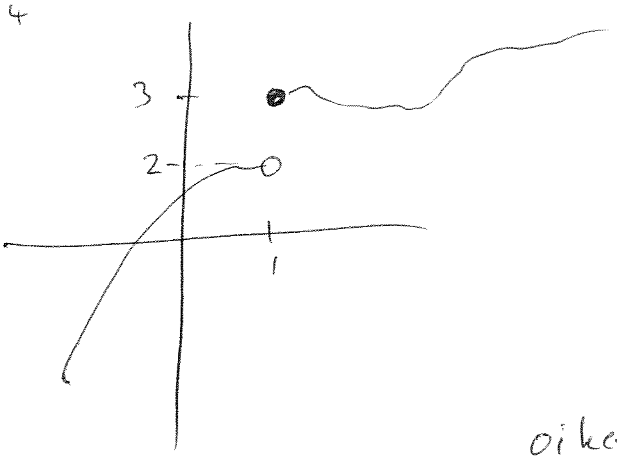
f määr kun $x=x_0$ ja $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$



f:a ei määritelty kun $x=x_0$, mutta raja-arvo olemassa



f määr. kun $x=x_0$ raja-arvo olemassa mutta $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$



f määritelty kun $x=1$ ja $f(1)=3$, mutta jos lähestytään $x=1$:tä vasemmalta saadaan vasemman puoleinen raja-arvo $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$ ja oikealta lähestyttäessä oikean puoleinen raja-arvo $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$.

Funktiolla ei ole raja-arvoa, sillä oikean- ja vasemmanpuoliset raja-arvot eroavat.

Funktiolla f on raja-arvo pisteessä x_0 jos toispuoleiset raja-arvot ovat samat.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

5.1.1. Raja-arvoja

1) $\lim_{x \to x_0} k = k \quad (k \in \mathbb{R} \text{ vakio})$

2) $\lim_{x \to x_0} x = x_0$

(Jos $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$, niin)

3) $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$

4) $\lim_{x \to x_0} \left(k f(x) \right) = k \lim_{x \to x_0} f(x)$

5) $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) g(x) \right) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right) \left(\lim_{x \to x_0} g(x) \right)$

6) $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$ jos $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

4, $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{kun } x<0 \\ 1 & \text{kun } x \geq 0 \end{cases}$ Onko raja-arvoa & pisteessä $x=0$?

Lasketaan toispuoleiset raja-arvot.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 2x = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$

Raja-arvoa ei ole, sillä toispuoleiset raja-arvot ovat erit.

5.2 Jatkuvuus

Funktio f on jatkuva pisteessä x_0 jos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ eli}$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Muutoin funktio on epäjatkuva pisteessä x_0.

Funktion jatkuvuus pisteessä x_0 edellyttää, että funktio on määritelty pisteessä x_0 (ja sen lähellä) ja raja-arvo on olemassa ja yhtä suuri kuin funktion arvo.

Määrittelyjoukossaan jatkuvia ovat

- Polynomifunktiot $P(x)$
- Rationaalifunktiot $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (P, Q polynomifunktioita
- juurifunktiot $\sqrt[n]{x}$ $n \in \mathbb{N}$ ja potenssifunktiot x^r $r \in \mathbb{R}$.
- eksponenttifunktiot a^x $(a>0)$ ja $\log_a x$ $(a>0$ ja $a\neq 1)$
- $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$

Jos funktiot f ja g ovat jatkuvia ja c vakio niin

cf, $f \pm g$, fg, $|f|$, $\frac{f}{g}$ ja $g \circ f$ ovat jatkuvia

Esim.

1) Jos $P(x)$ on polynomi, niin

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$ eli raja-arvo saadaan sijoittamalla

2) $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x+5}{x^3-2}$$

Koska $\lim_{x \to 1} x^2+x+5 = 1+1+5 = 7$ ja

$\lim_{x \to 1} x^3-2 = -1 \neq 0$ joten kohdan 6, perusteella

$$\lim \frac{x^2+x+5}{x^3-2} = \frac{7}{-1} = -7.$$

3) $$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$$

Koska $\lim_{x \to -1} x+1 = 0$, raja-arvoa ei voi ottaa erikseen osoittajasta ja nimittäjästä.

Kaikilla $x \neq -1$ $\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x-1$

Tällöin $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \to -1} x-1 = -2.$

4) $$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

sillä $\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ kunhan $x_0 \geq 0$. Lisää myöhemmin.

määrittelyjoukossaan.

Esim.

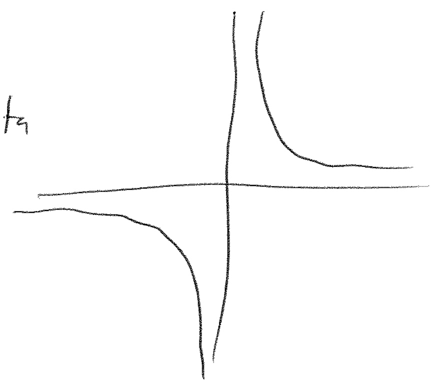
a) $f(x) = 8x^7 + 5x + 3$ on jatkuva, koska se on polynomi.

b) $g(x) = \frac{1}{x}$ on jatkuva (kun määritelty)

c) $h(x) = \cos e^{x}$ on jatkuva sillä se on jatkuvien funktioiden $\cos x$ ja e^x yhdistetty funktio

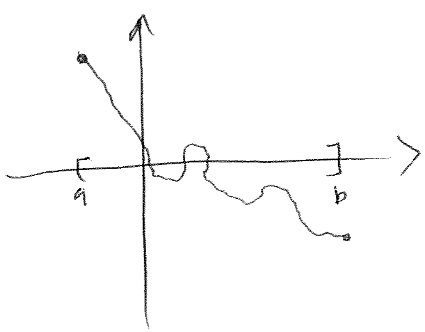
d) $\cos e^x + 8x^7 + 5x + 3$ on jatkuva, koska se on kahden ~~yhdistetyn~~ jatkuvan funktion summa.

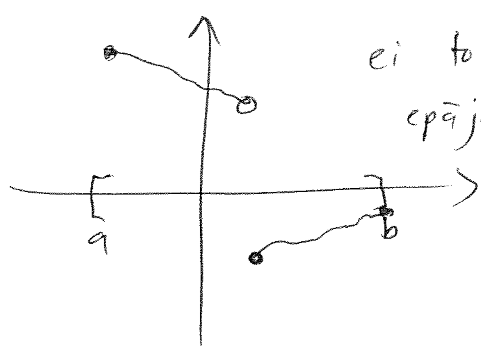
Huom. $f(x) = \frac{1}{x}$:n kuvaaja on epäyhtenäinen. Tämä on mahdollista koska määrittelyjoukko $x \neq 0$ on myös epäyhtenäinen. Jos jatkuvan funktion ~~on määritelty jollain välillä~~ määrittelyjoukko on väli, niin kuvaaja on aina yhtenäinen käyrä.



Bolzanon Lause

Jos f on jatkuva funktio suljetulla välillä $[a,b]$, ja jos f saa välin päätepisteissä erimerkkiset arvot, niin välillä (a,b) on ainakin yksi nollakohta.





ei totta epäjatkuville funktioille.

Esim

Bolzanon lauseen perusteella välillä $[a,b]$ jatkuvan funktion nollakohta haarukoimalla.

esim. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^5 + x - 1$ on jatkuva välillä $[0,1]$ ja $f(0) = -1$, $f(1) = 1$. B:n lauseen mukaan f:llä on nollakohta välillä $[0,1]$.

Koska $f(\frac{1}{2}) = -\frac{15}{32}$, nollakohta on välillä $[\frac{1}{2}, 1]$

Jatketaan näin. $f(\frac{3}{4}) < 0$ — || — $[\frac{3}{4}, 1]$

$f(\frac{7}{8}) > 0$ — || — $[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}]$

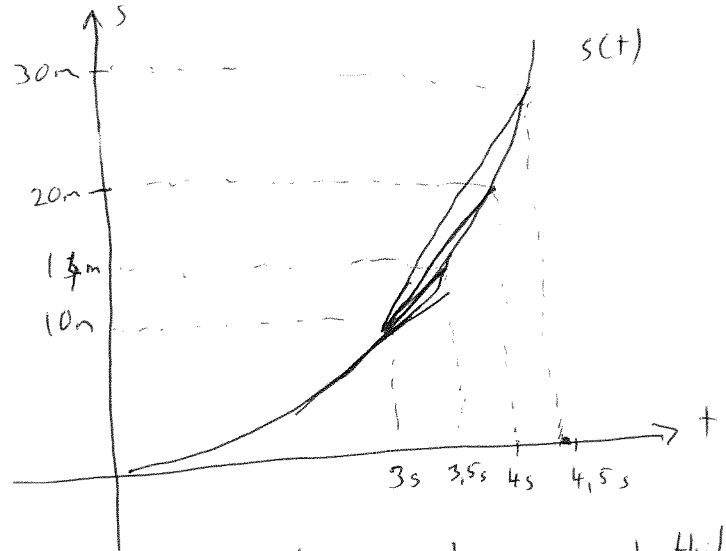
0,85   0,85

Nollakohta on 1-desimaalin tarkkuudella

0,8.

5.3. Derivaatta

Esim.



Funktio $s(t)$ kertoo kappaleen paikan eri hetkillä.
Mikä on keskinopeus väleillä $3s - 4,5s$, $3s - 4s$, $3s - 3,5s$?

Keskinopeus

$$\frac{s(4,5) - s(3)}{4,5s - 3s} = \frac{30m - 10m}{1,5s} = \frac{40}{3}m \approx 13,3\,m/s$$

$$\frac{s(4) - s(3)}{4s - 3s} = 10m/s$$

$$\frac{s(3,5) - s(3)}{3,5s - 3s} = \frac{4m}{0,5s} = 8\,m/s$$

Mikä on paras arvio hetkelliselle nopeudelle?
Tarkasteluvälin lyhentäminen ~~pitäisi~~ parantaa arviota, joten ~~hetkellinen nopeus pitäisi olla~~ päädytään raja-arvoon

$$\lim_{x \to 3} \frac{s(x) - s(3)}{x - 3}.$$

Edellisessä kuvassa sekantit näyttävät lähestyvän suoran tangenttia, ja niiden kulmakertoimet lähestyvät käyrän tangentin kulmakerrointa.

5.3.1. Määritelmä

Funktion f derivaatta kohdassa x_0, merkitään $f'(x_0)$ on

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\text{Erotusosamäärä.}} \quad (\text{Erotusosamäärän raja-arvo})$$

mikäli raja-arvo on olemassa.

Huom.

Derivaatta kuvaa funktion hetkellistä kasvunopeutta. Geometrisesti tulkittuna se on funktion tangentin kulmakerroin ko. pisteessä.

(Määritelmän voi kirjoittaa myös muotoon $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
Sijoita edelliseen määritelmään $x = x_0+h$.)

Funktio on derivoituva, ~~jos sillä on~~ pisteessä x_0 jos sillä on erotusosamäärän raja-arvo ko. pisteessä ja funktio on derivoituva jos sillä on derivaatta jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä.

Derivaatta funktion määrittämistä kutsutaan derivoinniksi.

Derivaattaa merkitään joskus myös Df tai $\frac{df}{dx}$.
jos muuttuja on x.

Esim. Määritä funktion $f(x) = 2x^2+5$ derivaatta pisteessä 3.

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{2x^2+5-(2\cdot 3^2+5)}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{2x^2-18}{x-3} = 2\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$$

$$= 2\lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} = 2\lim_{x \to 3}(x+3) = 2\cdot(3+3) = 12.$$

Määritelmää käyttäen derivointi on usein työlästä.
Määritelmällä johdetaan derivointisääntöjä joita käytetään derivoidessa.

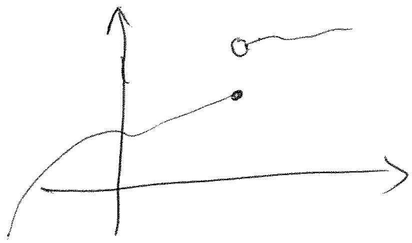
Esim. Määritä funktion $f(x) = 2x^2+5$ derivaatta pisteessä x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{2x^2+5-2x_0^2-5}{x-x_0} = 2\lim_{x \to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = 2\lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}$$

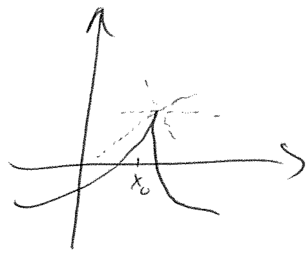
$$= 2\lim (x+x_0) = 4x_0$$

Funktiolla ei ole derivaattaa esim. seuraavissa tilanteissa

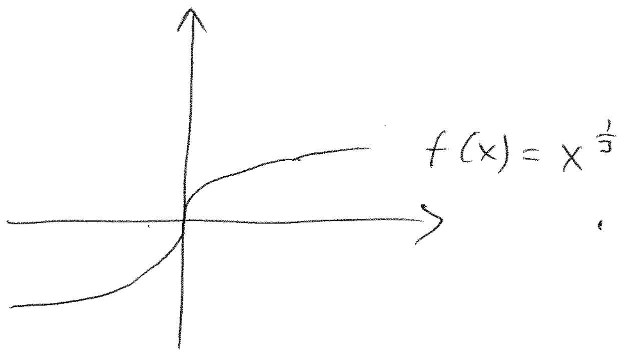
- f ei ole jatkuva



- f:n kuvaajalle ei voi asettaa yksikäsitteistä tangenttia



- f:n kuvaajan tangentti on pystysuora



5.3.2. Derivointisääntöjä

Oletetaan, että funktiot f ja g ovat derivoituvia ja $c \in \mathbb{R}$ vakio.

1)
$$Dc = 0$$
$$\left(\forall x_0 \in \mathbb{R} \ \lim_{x \to x_0} \frac{c-c}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0 \right)$$

2)
$$D(cf(x)) = c f'(x)$$
$$\left(\lim_{x \to x_0} \frac{cf(x) - cf(x_0)}{x-x_0} = c \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = c f'(x_0) \right)$$

3)
$$D x^r = r x^{r-1} \quad \forall r \in \mathbb{R}, \text{ erityisesti } Dx = 1$$
$$\left(\lim_{x \to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1 \right).$$

4) $D(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)$ (Todistus kuten kohta 2).)

5) $D(f(x)\cdot g(x)) = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x).$

6) $$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)\,g(x) - g'(x)\,f(x)}{[g(x)]^2}, \quad \text{kun } g(x) \neq 0.$$

Esim.

a) $D\left(3x^2 + 5x + \frac{6}{x^3} + \sqrt[3]{x} + 2\right)$

$= D(3x^2) + D(5x) + D\left(\frac{6}{x^3}\right) + D\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + D2$

$= 3\,Dx^2 + 5\,Dx + 6\,Dx^{-3} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 0$

$= 6x + 5 - 18x^{-4} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$

b)
$$D\left(\frac{x^2+x}{x^2+2}\right) = \frac{\overbrace{D(x^2+x)}^{=2x+1}(x^2+2) - \overbrace{D(x^2+2)}^{2x}(x^2+x)}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{2x^3+x^2+4x+2 - 2x^3-2x^2}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{-x^2+4x+2}{(x^2+2)^2}.$$

Lisää sääntöjä:

7) $D\,g(f(x)) = g'(f(x))\,f'(x)$ (ketjusääntö)

Esim.
Derivoi $\sqrt{3x^2+x+1}$. Olkoon $f(x) = 3x^2+x+1$ $g(x) = \sqrt{x}$

Tällöin $g(f(x)) = \sqrt{3x^2+x+1}$ ja $g'(x) = D\,x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

ja $f'(x) = 6x+1.$

Tällöin

$$D\, g(f(x)) = g'(f(x))\, f'(x)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(3x^2+x+1\right)^{-\frac{1}{2}}(6x+1) = \tfrac{1}{2}\frac{6x+1}{\sqrt{3x^2+x+1}}.$$

8) Eksponenttifunktio

$$De^x = e^x$$
$$\Big(D\, e^{f(x)} \underset{\uparrow \text{ ketjusääntö}}{=} f'(x)\, e^{f(x)}\Big)$$

$Da^x = \ln a \cdot a^x$, sillä $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ ja $De^{x\ln a} = \ln a \cdot e^{x\ln a}$
$= \ln a \cdot a^x$

Esim

$$De^{-x^3+5x} = ?$$

Merk. $g(x) = e^x$ $\quad f(x) = -x^3+5x$.
Tällöin $e^{-x^3+5x} = g\circ f(x)$ ja ketjusäännöllä (7))

saadaan

$$De^{-x^3+5x} = \underbrace{e^{-x^3+5x}}_{g'(f(x))} \cdot \underbrace{(-3x^2+5)}_{f'(x)}.$$

9) $D\ln|x| = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ $\quad$ (kun $x>0$ $D\ln x = \frac{1}{x}$.

$$\Big(D\ln f(x) = f'(x)\cdot\frac{1}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$D\log_a x = \frac{1}{x\ln a}$, sillä $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow D\log_a x = \frac{1}{\ln a \cdot x}$

10) $D \sin x = \cos x$

$D \cos x = -\sin x$

Huom. "Kulma" x on annettava radiaaneina. Kaavat eivät päde asteille!

Esim.

a) $D(\underbrace{\sin}_{\substack{\text{ulkofunk.} \\ f}} (\underbrace{\cos x}_{\substack{\text{sisäfunk} \\ g}})) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$= \cos(\cos x) \cdot (-\sin x) = -\cos(\cos x) \cdot \sin x.$

b) $x>0$ $D\left(x \cdot \ln \frac{x^2+3}{x}\right) = \underbrace{Dx}_{=1} \cdot \ln \frac{x^2+3}{x} + x \cdot \underbrace{D \ln \frac{x^2+3}{\cancel{x}}}_{?}$

Funktion $\ln \frac{x^2+3}{x}$ derivaatta saadaan ketjusäännöstä.

$f(x) = \ln x \qquad g(x) = \frac{x^2+3}{x}$

$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad g'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2+3)}{x^2} = \frac{x^2-3}{x^2}$

$D \ln \frac{x^2+3}{\cancel{x}} = f'(g(x))\, g'(x) = \frac{1}{\frac{x^2+3}{x}} \cdot \frac{x^{\cancel{2}}-3}{x}$

$= \frac{x^2-3}{x(x^2+3)}$

Eli

~~Vastaus~~ $\ln \frac{x^2+3}{x} + x \frac{x^2-3}{x(x^2+3)} = \ln \frac{x^2+3}{x} + \frac{x^2-3}{x^2+3}$

5.4. Derivaatan sovelluksia

5.4.1. Funktion monotonisuus

Derivaatta kuvaa funktion hetkellistä kasvunopeutta (tai funktion kuvaajan tangentin kulmakerrointa).

~~Jos~~ Tästä syystä funktion monotonisuutta voi selvittää tarkastelemalla derivaatan merkkiä.

Olkoon f jatkuva välillä $[a,b]$ ja derivoituva välillä (a,b).

- Jos $f'(x) > 0$ koko välillä (yksittäisissä pisteissä voi olla $f'(x)=0$), niin f on aidosti kasvava välillä $[a,b]$.
- Jos $f'(x) < 0$ — ‖ — — ‖ — — — — aidosti vähenevä välillä $[a,b]$.

Esim.

Tarkastellaan funktiota $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

Ratkaistaan derivaatan merkki

$$6x^2 + 6x - 12 = 0$$

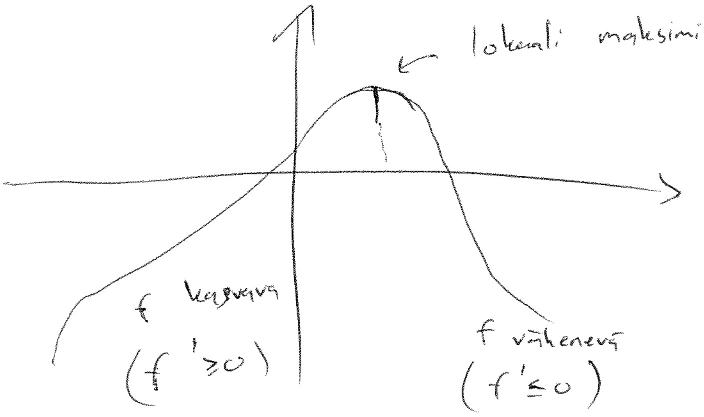
$$\ldots \quad x = -2 \quad \text{tai} \quad x = 1$$

	-2		1	
f'	+		−	+
f	aid. kasv. ↗		aid. väh. ↘	aid. kasv. ↗

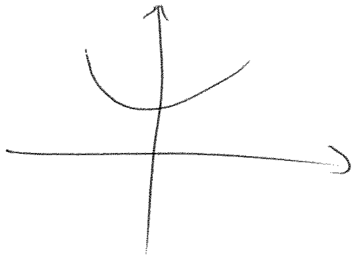
f aidosti kasvava väleillä $(-\infty, -2]$ ja $[1, \infty)$ ja

— ‖ — vähenevä — ‖ — $[-2, 1]$.

5.4.2 Funktion ääriarvot



vast.



Funktiolla f on pisteessä x_0 lokaali maksimi (lok. minimi) $f(x_0)$, jos kaikille x, jotka ovat x_0:in läheisyydessä on $f(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$.

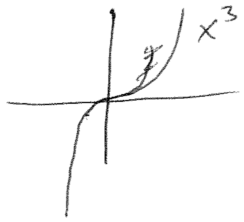
(Eli arvot ovat suurempia kuin ~~lähinalle~~ lähiympäristössä)
(pienempiä)

Jos funktio aid. kasvavasta aid. väh. kyseessä on lok. maksimi
— || — väh. — || kasv. — || — lok. minimi.

Jos tark. funktio on derivoituva, niin ~~ääri~~ lokaaleissa ääriarvo pisteissä funktion derivaatta on nolla ja derivaatan merkki vaihtuu.

Jos merkki vaihtuu, positiivisesta negatiiviseksi piste on lok. maksimi
, negatiivisesta posit. piste on lok. minimi.

Huom. Pelkkä "derivaatta = 0" ei riitä!



Esim.

Määritä funktion $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ lokaalit ääriarvot.

Ko. funktio määritelty kun $x \neq 1$.

Lasketaan f:n derivaatta.

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - 1\cdot(x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 3}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}.$$

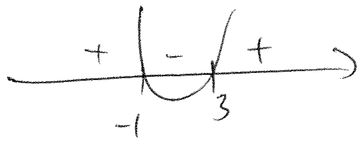
Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$f'(x) = 0$

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0$$

$x^2 - 2x - 3 = 0$ ja $x \neq 1$

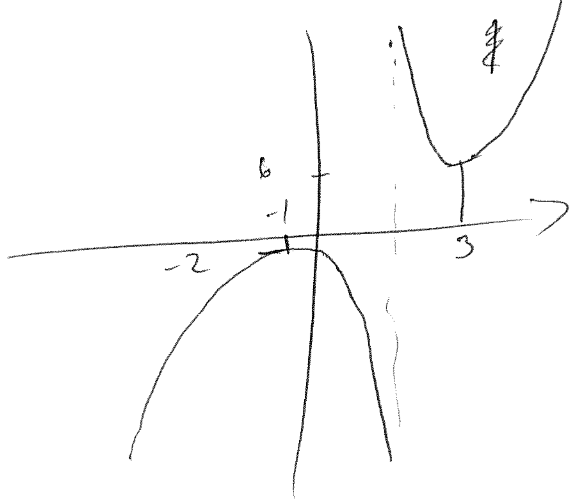
$x = -1$ ja $x = 3$ $\quad x^2 - 2x - 3$ on ylöspäin aukeava paraabeli



Nimittäjän $(x-1)^2$ nollakohta on $x = 1$. Muutoin se on positiivinen.

	-1		1		3	
x^2-2x-3	+		−	−		+
$(x-1)^2$	+		+	+		+
$f'(x)$	+		−	−		+
$f(x)$	↗		↘	↘		↗

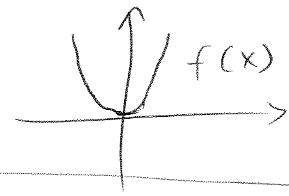
Siis $x = -1$ on lokaali maksimi ja $x = 3$ lok. minimi
lokaalimaksimiarvo on $f(-1) = 2$ ja lokaaliminimi $f(3) = 6$.



Huom.
Kuten esimerkistä nähdään lokaalit minimit ja maksimit eivät ole

4. Funktion suurin ja pienin arvo

Funktiolla f on kohdassa x_0 suurin (pienin) arvo $f(x_0)$, jos jokaiselle x on $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$.
Funktiolla ei aina ole suurinta tai pienintä arvoa. Esim. funktiolla $f(x) = x^2$ on pienin arvo 0, muttei suurinta arvoa vastaavasti $g(x) = -x^2$:llä on suurin arvo, muttei pienintä.

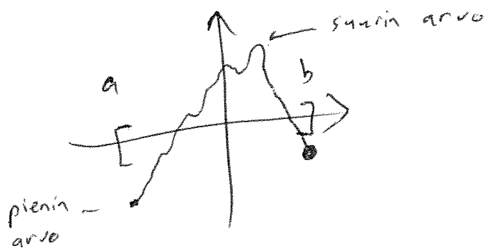


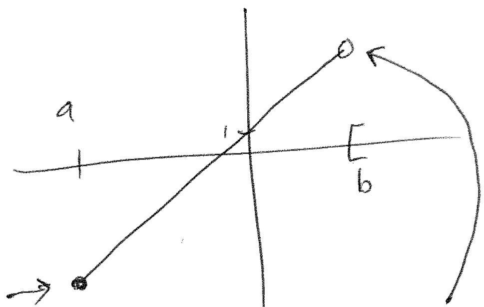
Tietyissä tapauksissa suurimman ja pienimmän arvon olemassaolo voidaan taata.

> Olkoon f suljetulla välillä [a,b] määritelty jatkuva funktio. Tällöin f saa suurimman ja pienimmän arvonsa tällä välillä

Derivoituville funktioille saadaan seuraava versio:

> Olkoon f suljetulla välillä [a,b] määritelty jatkuva funktio, joka on lisäksi derivoituva välillä]a,b[. Tällöin f saa suurimman ja pienimmän arvonsa välillä]a,b[olevisissa derivaatan nollakohdissa tai välin päätepisteissä





$f: [a,b[\to \mathbb{R}$

$f(x) = x+1$

pienin arvo on (tällä kertaa)

Funktio ei saa suurinta arvoa välillä [a,b[

Esim. Missä välin $[2, 13]$ pisteissä funktio $f(x) = 12x^3 - x^4$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa?

Koska f on ko. välillä jatkuva ja derivoituva välillä $]2, 13[$ saa f suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai välin $]2,13[$ derivaatan nollakohdissa.

Derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = 36x^2 - 4x^3 = 4x^2(9-x)$$

$$f'(x) = 0$$

$$4x^2(9-x) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 9.$$

Näistä vain $x = 9$ kuuluu tarkasteluvälille.

Tällöin $f(9) = 12 \cdot 9^3 - 9^4 = 3 \cdot 9^3 + 9 \cdot 9^3 - 9^4 = 3 \cdot 9^3 = 2187$

Välien päätepisteet:

$$f(2) = 80$$

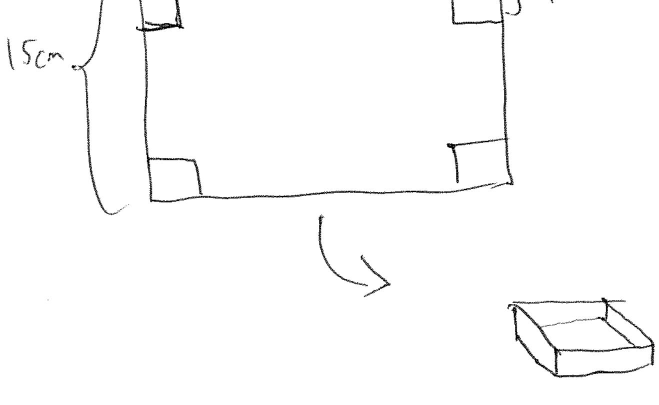
$$f(13) = -2197.$$

Suurin arvo 2187 saadaan pisteessä $x = 9$ ja pienin arvo -2197 pisteessä $x = 13$.

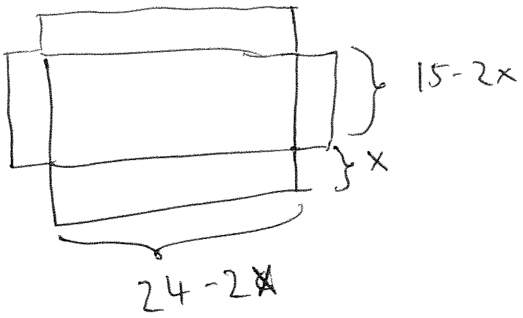
Esim

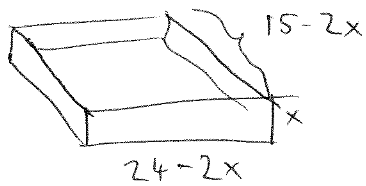
Suorakulmaisen pahvilevyn nurkista leikataan pois neliönmuotoiset palat ja lopusta taitellaan laatikko

Kuinka suuret palat on leikattava, jotta laatikon tilavuus on mahdollisimman suuri?



70





Tilavuus: $V(x) = x(15-2x)(24-2x) = 4x^3 - 78x^2 + 360x.$

ja $0 \le x \le 7,5$ (sillä sivun $15-2x$ pituus on väh. nolla ja x on väh. 0)

$V(x)$ on derivoituva välillä $]0, 7,5[$ ja jatkuva välillä $[0, 7,5]$, joten $V(x)$ saavuttaa suurimman arvonsa V:n derivaatan nollakohdissa tai kun $x=0$ tai $x=7,5$.

Nyt $V(0) = 0 = V(7,5)$ (Tuskin suurin tilavuus)

Derivoidaan $V(x)$:

$$V'(x) = 12x^2 - 156x + 360 = 12(x^2 - 13x + 30),$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat:

$$x^2 - 13x + 30 = 0$$

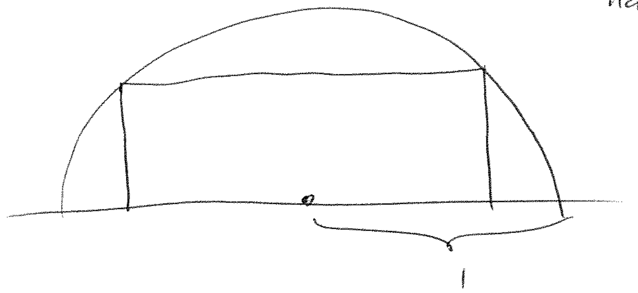
$x = 10$ tai $x = 3$

↑ ei käy x:n oltava välillä $]0, 7,5[$

$V(3) = 486\ cm^3$ on suurin mahd. tilavuus.

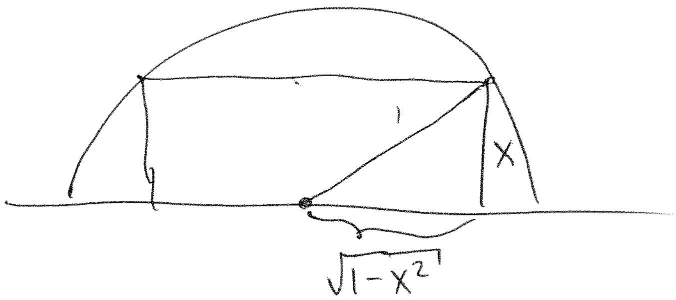
V: 3cm

3) Puoliympyrän säde on 1. Mikä on ~~kuvan~~ suorakulmion, jonka yksi sivu on puoliympyrän halkaisijalla, suurin mahdollinen pinta-ala.



Mikä valitaan muuttujaksi ?

$1°$ Sivu

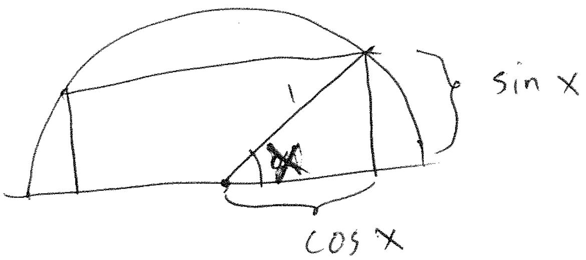


Pinta-ala:

$$A_1(x) \quad x 2\sqrt{1-x^2} = 2x\sqrt{1-x^2}$$

$$0 \le x \le 1.$$

$2°$ Kulma



$$A_2(x) = 2\cos x \cdot \sin x.$$

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, jotta

$\cos x, \sin x > 0.$

Tarkastellaan vain tapausta $2°$.

$A_2(x)$ on jatkuva välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$ ja derivoituva välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$.