6. Integraalilaskenta

Esim.

Veden kulutus kerrostalossa aikavälillä klo 5.00 – klo 10.00 on kulutusmittarin mukaan likimain funktiota noudattaa

$$f(x) = -x^2 + 16x + 55 \qquad x \in [5, 10] \qquad (\text{Yksikkö } \tfrac{l}{h})$$

Kuinka paljon vettä kuluu tällä aikavälillä?

Merkitään $V(x)$:llä funktiota, joka ~~kertoo~~ paljonko vettä on kulunut välillä 5.00 – x. Tällöin $V(5) = 0$, sillä välillä 5.00 – 5.00 vettä ei ehdi kulua.

Koska f kuvaa hetkellistä vedenkulutusta (veden kulutusnopeutta) pitää olla $V'(x) = f(x)$. On siis löydettävä funktio, jonka derivaatta on $f(x)$.

Koska

$$f(x) = -x^2 + 16x + 55 = -\frac{1}{3}\cdot\underbrace{3x^2}_{Dx^3} + 8\cdot\underbrace{2x}_{Dx^2} + 55\cdot\underbrace{1}_{Dx} + \underbrace{0}_{Dc}$$

on oltava

$$V(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 8x^2 + 55x + C,$$ missä C on jokin vakio.

(Voit tarkistaa laskemalla, että $V'(x) = f(x)$.)

Vakio C voidaan määrittää tiedosta $V(5) = 0$:

$$0 = V(5) = -\frac{1}{3}5^3 + 8\cdot 5^2 + 55\cdot 5 + C \iff$$

$$C = 275 - 200 + \frac{125}{3} = -\frac{1300}{3}$$

Siis $V(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 8x^2 + 55x - \frac{1300}{3}$ ja $V(10) = \frac{1750}{3}\,l \approx 583\,l$

Siis vettä kuluu välillä klo 5 - klo 10 noin 583 l

6.1. Integraalifunktiot

Funktion f integraalifunktio on sellainen funktio F, jolle
$F'(x) = f(x)$ kaikilla luvuilla x f:n määrittelyjoukossa.

Integraalifunktioita ei aina ole olemassa, ja jos on, niin niitä on äärettömän monta. Jos F on f:n integraalifunktio, niin myös $F(x)+C$ on f:n integraalifunktio, kun C on mikä tahansa vakio.

Itse asiassa:

> Jos funktio f on määritelty jollain välillä, ja F on f:n integraalifunktio, niin G on f:n integraalifunktio täsmälleen silloin kun
> $F(x) - G(x) = C$, missä C on vakio.

Funktion kaikkien integraalifunktioiden määrittämistä kutsutaan funktion integroinniksi ja sitä merkitään usein $\int f(x)\,dx$ ← integroimismuuttuja

Siis $\int f(x)\,dx = F(x) + C$,

missä F on jokin f:n integraalifunktio ja C jokin vakio. (Vrt. $Df(x) = f'(x)$.)

~~Huomio~~ (Derivointisäännöistä saadaan helposti integrointisääntöjä.)

Jos $Df(x) = f'(x)$, niin $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$

↑ Integroimisvakio

6.2 Integrointisääntöjä

kaavoissa C on vakio (ns. integroimisvakio)

1) $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

(sillä $D(F(x)+G(x)) = F'(x) + G'(x)$)

2) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ (sillä $D(kf(x)) = k\,Df(x)$)

k on vakio

3) $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, kun $n \neq -1$.

(sillä $D(\frac{1}{n+1}x^{n+1}) = \frac{1}{n+1}\cdot(n+1)\,x^{n+1-1} = x^n$)

Erityisesti,

$\int 1 = x + C$, sillä $x^0 = 1$.

Tapaus $n = -1$ on erilainen,

$\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C$, sillä $D\ln|x| = \frac{1}{x}$

4) $\int e^x\,dx = e^x + C$

$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$, $a > 0$ $a \neq 1$

(sillä $D\,a^x = \ln a \cdot a^x$)

5) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

Esim.

Integroi

1) $3x^4$

$$\int 3x^4\,dx = 3\int x^4\,dx = 3\cdot\frac{1}{4+1}x^5 + C = \frac{3}{5}x^5 + C$$

Tarkistetaan derivoimalla

$$D\left(\frac{3}{5}x^5 + C\right) = \frac{3}{5}\underbrace{Dx^5}_{=5x^4} + \underbrace{DC}_{=0} = \frac{3}{5}\cancel{5}x^4 + 0 = 3x^4$$ ok

2)

$$\int 3x^2 + x^{-1} + e^x\,dx = \underbrace{\int 3x^2\,dx}_{x^3} + \underbrace{\int x^{-1}\,dx}_{\ln|x|} + \underbrace{\int e^x\,dx}_{= e^x + C}$$

$$= x^3 + \ln|x| + e^x + C.$$

Tarkistetaan...

$$D(x^3 + \ln|x| + e^x + C) = 3x^2 + \frac{1}{x} + e^x$$

3) $\cos x + \sin x + 7$

$$\int \cos x + \sin x + 7\,dx = \int \cos x\,dx + \int \sin x\,dx + 7\int 1\,dx$$

$$= \sin x - \cos x + 7x + C.$$ (Tarkistakaa..)

Lisää sääntöjä...

Yhdistetyn funktion derivointisääntö $D f(g(x)) = g'(x)f'(g(x))$

antaa integroimissäännön

6) $$\int g'(x)\,f'(g(x))\,dx = f(g(x)) + C.$$

Tästä saadaan ~~pari~~ mm. seuraavat erikoistapaukset.

7)

$$\int f'(x)(f(x))^r \, dx = \frac{1}{r+1} (f(x))^{r+1} + C \quad r \neq -1,$$

sillä $D\left(\frac{1}{r+1}(f(x))^{r+1}\right) = f'(x)(f(x))^r.$

8)

$$\int g'(x)\cos(g(x))\, dx = \sin g(x) + C$$

Tässä $f(x) = \sin x$.

<u>Esim.</u>

Laske

1) $\int e^{5x} dx$ ulkofunktio $f(x) = e^x$

sisäfunktio $g(x) = 5x$

Jotta voisi käyttää kaavaa 6) tarvitaan jostain $g'(x) = 5$.
Tämä ei ole ongelma.

$$\int e^{5x} dx = \int \frac{1}{5}\cdot 5 e^{5x} dx = \frac{1}{5}\int \underbrace{5}_{g'(x)} \underbrace{e^{5x}}_{f'(g(x))} dx = \frac{1}{5} e^{5x} + C.$$

2)

$$\int x \sin\left(100x^2 + \frac{\pi}{5}\right) dx$$

Valitaan $g(x) = 100x^2 + \frac{\pi}{5}$ $\quad f(x) = \cos x$

Tallöin $g'(x) = 200x$ $\quad f'(x) = -\sin x$ ja

$$g'(x) f'(g(x)) = -200x \sin\left(100x^2 + \frac{\pi}{5}\right).$$

Siis $\int x \sin\left(100x^2 + \frac{\pi}{5}\right) dx = \int \frac{1}{-200}\cdot(-200)x \sin\left(100x^2 + \frac{\pi}{5}\right) dx$

$$= -\frac{1}{200}\int \underbrace{(+200x)}_{g'(x)}\underbrace{\left(-\sin\left(100x^2 + \frac{\pi}{5}\right)\right)}_{f'(g(x))} dx = -\frac{1}{200}\cos\left(100x^2 + \frac{\pi}{5}\right) + C.$$

Tarkistetaan derivoimalla:

$$D\left(-\frac{1}{200}\cos\left(100x^2+\frac{\pi}{5}\right)\right) = -\frac{1}{200}(100\cdot 2x)\cdot\left(-\sin\left(100x^2+\frac{\pi}{5}\right)\right)$$

$$= x\sin\left(100x^2+\frac{\pi}{5}\right).$$

3) $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \ldots = \frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C$

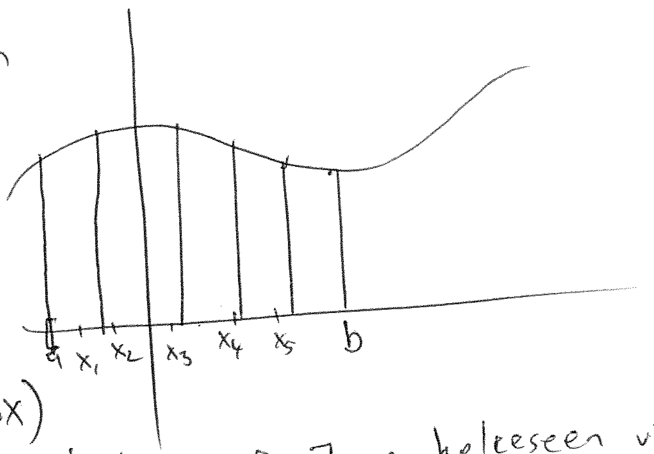
Kaikkia funktioiden integraalifunktioita ei löydy em. menetelmillä. Muitakin menetelmiä on, ja myös funktioita, joiden integraalifunktioita ei voi kirjoittaa alkeisfunktioiden avulla.
Tällaisia ovat esim. e^{x^2}.

6.3. Määrätty integraali

Ehkä parempi puhua ensin pinta-alasta ja määritellä määrätty integraali sen jälkeen

Olkoon f välillä $[a,b]$ jatkuva funktio.
Funktion f määrätty integraali a:sta b:hen on raja-arvo

$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$, missä $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Väli $[a,b]$ on jaettu n osaväliin ja pisteet x_i on valittu vastaavilta väleiltä.



$\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x\right)$

jaetaan $[a,b]$ n kpleeseen välejä joiden pituus on $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Summa $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ antaa arvion käyrän alle jäävän osan pinta-alalle kun $f(x) \geq 0$ koko välillä. Raja-arvo $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ antaa tässä tapauksessa käyrän alle jäävän pinta-alan.

Määrättyä integraalia $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x$ merkitään

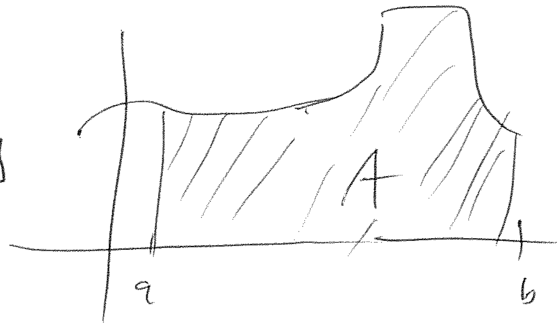
$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Olkoon f välillä $[a, b]$ jatkuva funktio ja olkoon A f:n kuvaajan ja x-akselin välillä rajaaman alueen pinta-ala.

Tällöin

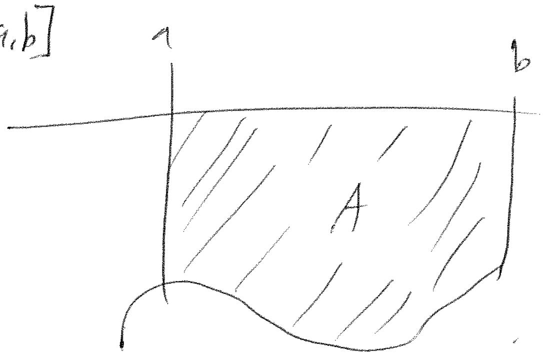
jos $f(x) \geq 0$ koko välillä $[a,b]$

on $\int_a^b f(x)\,dx = A$

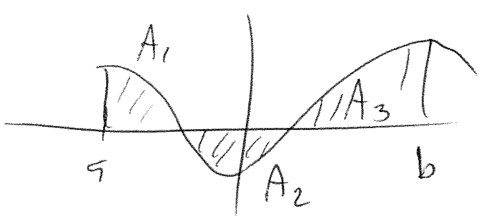


jos $f(x) \leq 0$ koko välillä $[a,b]$

on $\int_a^b f(x)\,dx = -A$



Muissa tapauksissa väli pitää jakaa osiin joilla $f(x)$ ei vaihda merkkiään.



Määrätyn integraalin laskeminen ~~...~~ määritelmällä on vaikeaa, mutta seuraava tulos helpottaa.

~~Jos~~ Analyysin peruslause:

Jos f on välillä $[a,b]$ jatkuva funktio

niin $$\int_a^b f(x)\,dx = \Big/_{a}^{b} F(x) = F(b)-F(a).$$

"sijoitus a:sta b:hen $F(x)$".

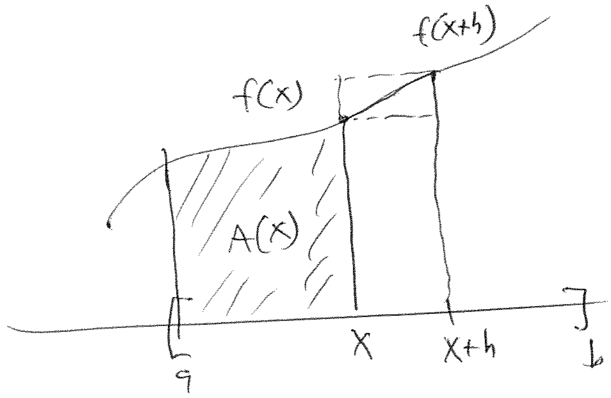
"Perustelu":

Tarkastellaan tapausta, jossa $f(x) \geq 0$ ja kasvava.

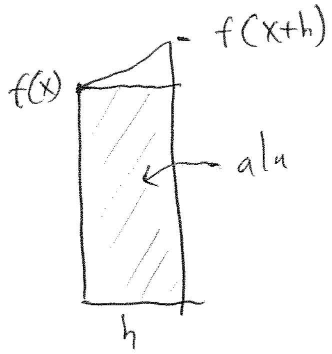
Olkoon $A(x)$ funktio, joka kertoo x-akselin ja f:n kuvaajan väliin jäävän alueen pinta-alan välillä $[a,x]$.

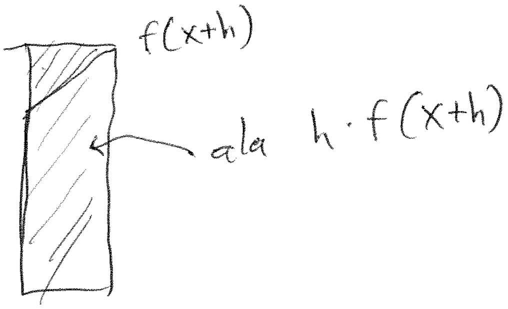
Tällöin $A(b) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Osoitetaan, että $A(x)$ on f:n integraalifunktio. eli $A'(x) = f(x)$.



$A(x+h) - A(x)$ on f:n kuvaajan ja x-akselin välillä $[x, x+h]$ rajaaman alueen pinta-ala





Siis $$f(x)\cdot h \leq A(x+h) - A(x) \leq f(x+h)\,h$$

eli $$f(x) \leq \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \leq f(x+h)$$

Ottamalla tästä raja-arvo kun $h \to 0$ saadaan

$$\lim_{h\to 0} f(x) \le \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \le \underbrace{\lim_{h\to 0} f(x+h)}_{=f(x)}$$

f on jatkuva

$$f(x) \le A'(x) \le f(x)$$

eli $A'(x) = f$.

Siis A on f:n integraalifunktio.

Jos F on jokin toinen integraalifunktio, niin
$A(x) = F(x) + C$.

Tiedosta $A(a)=0$ saadaan, että $C = -F(a)$ eli

$$A(x) = F(x) - F(a) \quad \text{ja}$$

$$\int_a^b f(x) = A(b) = F(b) - F(a).$$

Huom Integrointivakiota ei tarvita

$$\int_a^b F(x)+C) = F(b)+C-(F(a)+C) = F(b)+C-F(a)-C = F(b)-F(a)$$

6.3.1 Määrätyn integraali ominaisuuksia

Olkoon f ja g välillä määriteltyjä jatkuvia funktioita ja F ja G niiden integraalifunktiot.

1)
$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(Perustelu: $F(x)+G(x)$ on $f(x)+g(x)$:n integraalifunktio ja siten

$$\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = F(b)+G(b)-(F(a)+G(a))$$
$$= F(b)-F(a)+G(b)-G(a) =$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.)$$

2) $\displaystyle\int_a^b k f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$ (k on vakio)

Perustelu kuten 1)-kohdassa.

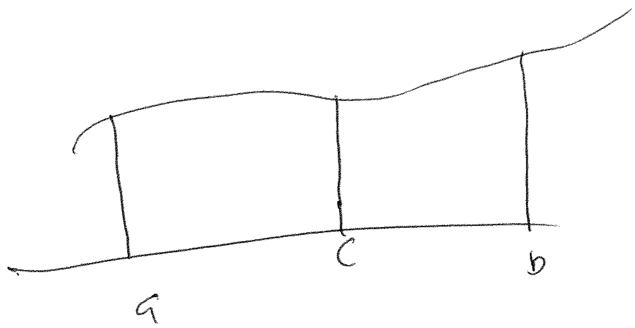
3) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Per. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0.$

4) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

5) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

(Perustelu kuten aiemmatkin)



c:n ei välttämättä tarvitse olla välillä $[a,b]$

6.3.2 Pinta-alat

Aiemmin todettiin, että funktion f kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $[a,b]$

on $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ jos $f(x) \geq 0$ välillä $[a,b]$

ja $\displaystyle -\int_a^b f(x)\,dx$ jos $f(x) \leq 0$ välillä $[a,b]$.

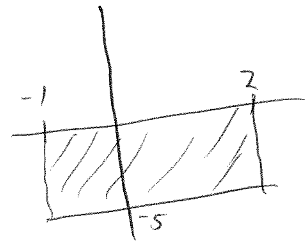
Esim. Vakiofunktion $f(x) = -5$ kuvaajan ja x-akselin välillä $[-1, 2]$ rajaaman alueen pinta-ala on

$$-\int_{-1}^{2} f(x)\,dx,$$ sillä $f(x) \leq 0$ koko välillä $[-1, 2]$.

$$-\int_{-1}^{2} f(x)dx = -\Big/_{-1}^{2} (-5)x =$$

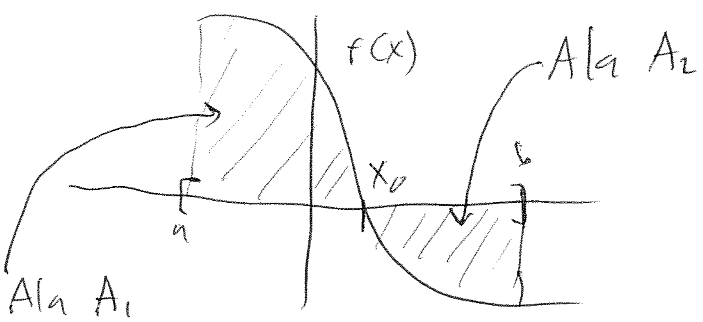
$$-\big(-5\cdot 2 - (-5)\cdot(-1)\big)$$

$$= -(-10 - 5) = 15.$$



Huom. Sama tulos saadaan suorakulmion pinta-alan kaavalla.

Jos funktio vaihtaa merkkiään, niin integroimisväli $[a,b]$ pitää pilkkoa osiin.



f:n kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala A ← kuvan tapauksessa on $A_1 + A_2$, (x-akselin ylä- ja ala-puolinen osa lasketaan erikseen)

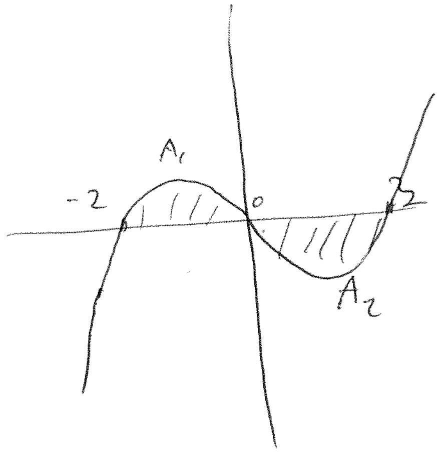
missä

$$A_1 = \int_a^{x_0} f(x)\,dx \quad \text{ja} \quad A_2 = -\int_{x_0}^{b} f(x)\,dx.$$

Siis $$A = \int_a^{x} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{b} f(x)\,dx.$$

82 <u>Esim</u> Laske funktion $f(x) = x^3 - 4x$ kuvaajan ja x-akselin rajaaman äärellisen kaksiosaisen alueen pinta-ala.

Etsitään ensin funktion f nollakohdat:



$$f(x) = 0$$

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0 \quad \text{kun}$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 = 4$$

eli $x = 0$ tai $x = 2$ tai $x = -2$.

Koska f on jatkuva funktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissaan on ~~merkki~~ $f(x) \geq 0$ välillä $[-2, 0]$ sillä $f(-1) = 3$ ja $f(x) \leq 0$ välillä $[0, 2]$, sillä $f(1) = -3$.

Nyt

$$A_1 = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} x^3 - 4x\,dx = \Big/_{-2}^{0} \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right)$$

$$= 0 - 0 - \left(\frac{1}{4}\underbrace{(-2)^4}_{16} - 2 \cdot \underbrace{(-2)^2}_{4}\right) = -\left(\frac{16}{4} - 2 \cdot 4\right)$$

$$= 4.$$

ja

$$A_2 = -\int_0^2 f(x)\,dx = -\int_0^2 (x^3 - 4x)\,dx = -\Big/_0^2 \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right)$$

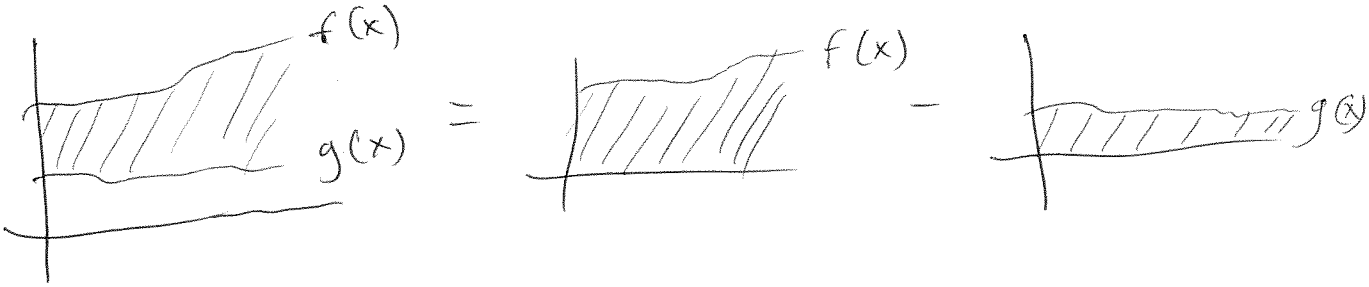
$$= -\left(\underbrace{\frac{1}{4}2^4}_{4} - \underbrace{2 \cdot 2^2}_{8} - (0 - 0)\right) = -(4 - 8) = 4.$$

Kysytty pinta-ala on $A_1 + A_2 = 4 + 4 = 8$.

Kahden jatkuvan funktion f ja g kuvaajien ~~välillä~~ välillä $[a,b]$ välissä olevan alueen pinta-ala on, kunhan $f(x) \geq g(x)$ välillä $[a,b]$,

$$\int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

Tämän voi perustella pinta-alojen erotuksella.



Esim.

Laske funktioiden $f(x) = x^2+1$ ja $g(x) = x^2$

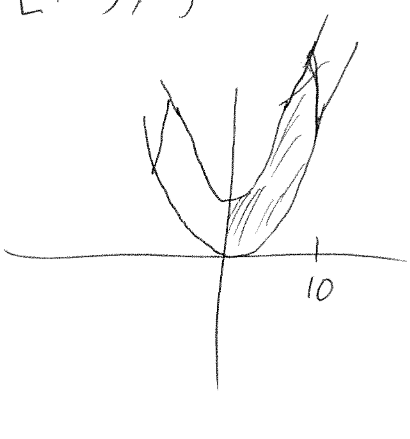
kuvaajien välillä $[0,10]$ ~~rajoittaman~~ väliinjäävän alueen pinta-ala.

Koska $f(x) \geq g(x)$ välillä $[0,10)$, joten

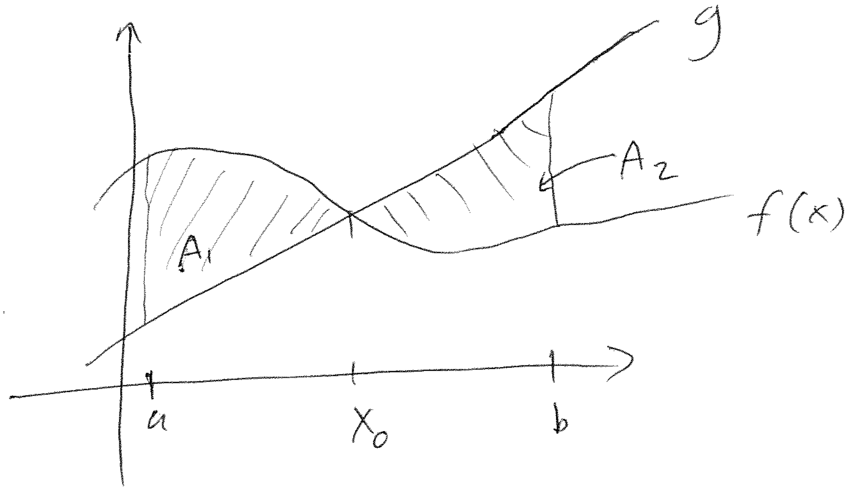
pinta-ala on

$$\int_0^{10} f(x)-g(x)\,dx = \int_0^{10} 1\,dx$$

$$= \Big/_0^{10} x = 10.$$



Kun lasketaan kahden funktion väliinjäävän alueen pinta-alaa, ei ole väliä ovatko funktiot positiivisia vai negatiivisia. Väliä on kuitenkin, sillä kumpi funktioista on suurempi.



Jos funktion kuvaajilla on leikkauspisteitä integroimis väli on ehkä jaettava kahteen osaan ~~s.e. integroitavana~~

~~oc~~ pos

Esim. Yo. kuvassa

$$A_1 = \int_a^{x_0} f(x) - g(x)\,dx \quad \text{koska } f(x) \geq g(x) \text{ välillä } [a, x_0]$$

ja

$$A_2 = \int_{x_0}^{b} g(x) - f(x)\,dx \quad \text{koska } g(x) \geq f(x) \text{ välillä } [x_0, b].$$

Esim

Olkoon $f(x) = x^2$ ja $g(x) = x$. Laske näiden funktioiden kuvaajien ja suorien $x=1$ ja $x=2$ rajaaman ~~välillä~~ alueen pinta-ala.

Etsitään ensin pisteet joissa $f(x)=g(x)$.

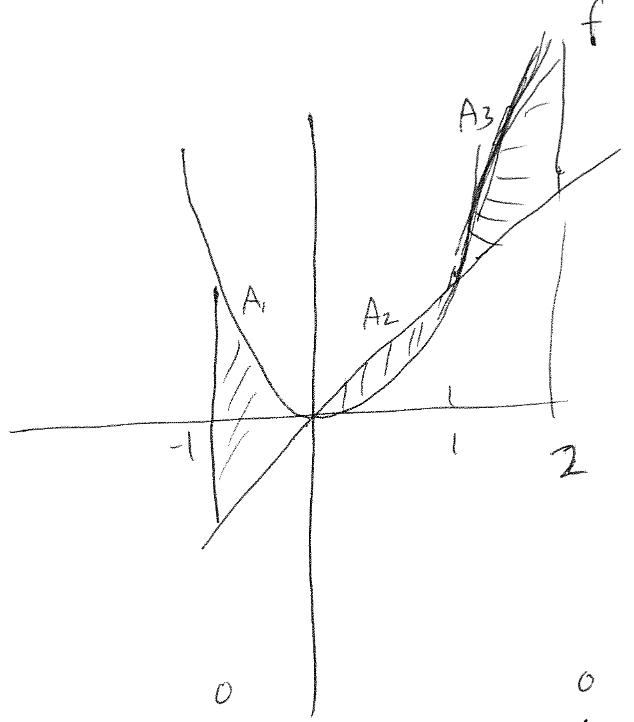
$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 = x$$
$$x^2 - x = 0 \iff x(x-1) = 0 \text{ eli } x=0 \text{ tai } x=1.$$

Koska funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ ovat jatkuvia, niin $f(x)-g(x)$:n merkki voi vaihtua vain pisteissä, joissa $f(x)=g(x)$ eli kun $x=0$ tai $x=1$.

Välillä $[-1,0]$ $f(x) \geq g(x)$ sillä $f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$ ja $g(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$.

$[0,1]$ $f(x) \leq g(x)$ sillä $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$ ja $g(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

$[1,2]$ $f(x) \geq g(x)$ sillä $f(\frac{3}{2})=\frac{9}{4}$ ja $g(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}$.



$$A_1 = \int_{-1}^{0} f(x)-g(x)\,dx$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} g(x)-f(x)\,dx$$

$$A_3 = \int_{1}^{2} f(x)-g(x)\,dx$$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} x^2 - x\,dx = \Big/_{-1}^{0} \left(\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2\right) = 0-0-\left(-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} x-x^2\,dx = \Big/_{0}^{1} \left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$A_3 = \int_{1}^{2} x^2-x\,dx = \Big/_{1}^{2} \left(\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2\right) = \frac{8}{3}-\frac{4}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{8}{3}-2-\frac{1}{6} = \frac{2}{3}-\frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

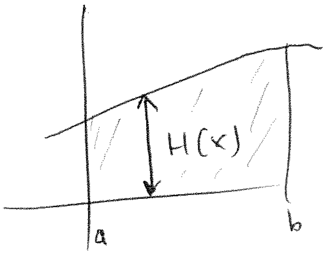
Kysytty pinta-ala on $A_1 + A_2 + A_3 = \frac{5}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Jatkuu seuraavalla sivulla

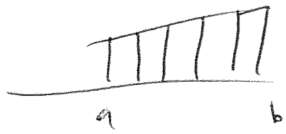
6.3.3 Tilavuus

Edellä laskettiin alueen pinta-ala integroimalla "korkeutta" jonkin akselin suhteen.

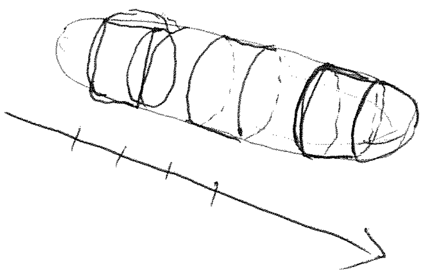
Integroidessa lasketaan pinta-ala ohuiden suikaleiden pinta-alojen summan raja-arvona.

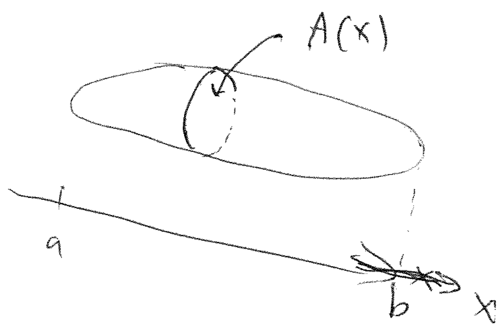


$$A = \int_a^b H(x)\,dx$$



Vastaavasti tilavuus voidaan laskea ohuiden särmiöiden tilavuuksien summan raja-arvona. Tällöin päädytään integroimaan poikkileikkauksen pinta-alaa $A(x)$.



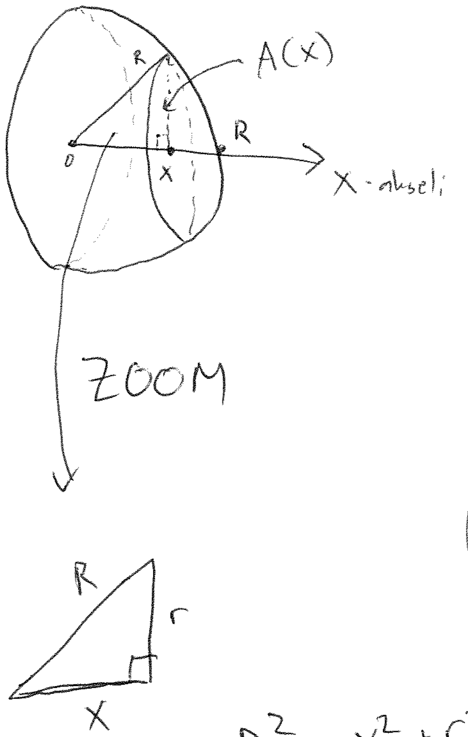


$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

Integrointi samanlaista kuin ennenkin, kunhan $A(x)$ tiedetään.

Esim Lasketaan puolipallon tilavuus.

Pallon säde on R.



Lasketaan ensin poikkileikkauksen pinta-ala $A(x)$. Poikkileikkaukset ovat ympyröitä joiden säde r saadaan Pythagoraan lauseesta.

(~~Poikkileikkaukset ov~~ Tarkastellaan x-akselia vastaan kohtisuoria poikkileikkauksia)

$$R^2 = x^2 + r^2.$$

Poikkileikkauksen pinta-ala on $A(x) = \pi r^2 = \pi (R^2 - x^2)$

Puolipallon tilavuus $V = \int_0^R A(x)\,dx = \int_0^R \pi (R^2 - x^2)\,dx$

$$= \pi \int_0^R R^2 - x^2\,dx = \pi \Big/_0^R \left(R^2 x - \frac{1}{3}x^3\right)$$

$$= \pi\left(R^3 - \frac{1}{3}R^3\right) = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

(Integroimisrajat ovat 0 ja R. ~~sillä x~~)

~~Pallon~~ Puolipallon tilavuus on $\frac{2}{3}\pi R^3$ ja

Pallon tilavuus on $2 \cdot \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$.