I. Perusteita

I.1 Lukujoukot

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ on luonnollisten lukujen joukko

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ on kokonaislukujen joukko.

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ on rationaalilukujen joukko, jossa $m, n \in \mathbb{Z}$ tarkoittaa, että m ja n ovat kokonaislukuja eli kuuluvat kokonaislukujen joukkoon.

$\mathbb{R}$ on reaalilukujen joukko, joka sisältää kaikki rationaaliluvut ja irrationaaliluvut.

~~Edellä~~

Edellisen lukujoukon luvut sisältyvät aina seuraavaan lukujoukkoon.

Tätä merkitään $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Merkintä "$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$" luetaan luonnolliset luvut ovat kokonaislukujen osajoukko.

Esim 1.1.1

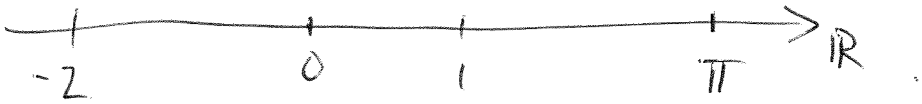
a) $38 \in \mathbb{N}$

b) $-5 \in \mathbb{Z}$, mutta -5 ei kuulu $\mathbb{N}$ (eli -5 ei ole luonnollinen luku).

c) $\frac{83}{-6} \in \mathbb{Q}$ ja $0{,}285714285\ldots = \frac{2}{7} \in \mathbb{Q}$

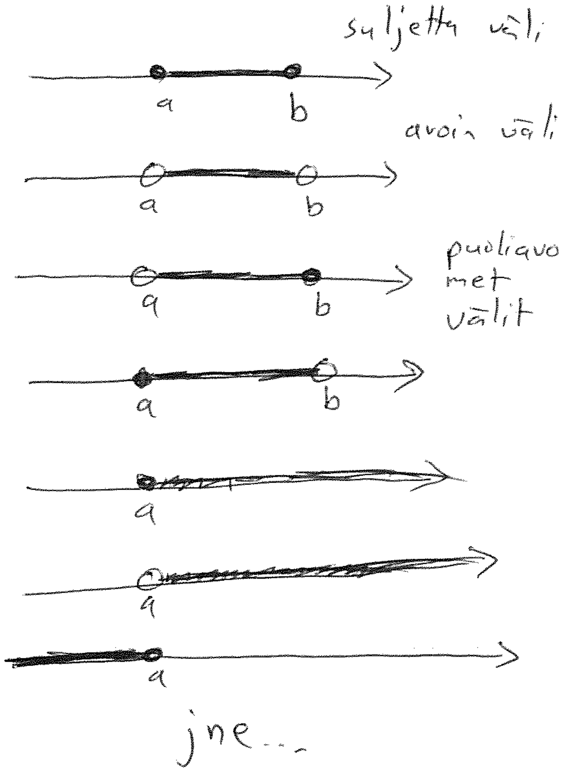
d) π ja $\sqrt{2}$ ovat irrationaalilukuja, koska niitä ei voi esittää kahden kokonaisluvun osamääränä.

Reaalilukujen joukkoa havainnollistetaan lukusuoralla.



Reaalilukuväleille käytetään seuraavia merkintöjä.

Merkintä	Sisältää reaaliluvut x, joille
$[a,b]$	$a \le x \le b$
(a,b)	$a < x < b$
$(a,b]$	$a < x \le b$
$[a,b)$	$a \le x < b$
$[a,\infty)$	$a \le x$
(a,∞)	$a < x$
$(-\infty,a]$	$x \le a$
$(-\infty,a)$	$x < a$
$(-\infty,\infty)$	$\mathbb{R}$ (kaikki reaaliluvut x)



Esim 1.1.2

Väli $[-2,5]$ tarkoittaa niitä reaalilukuja x, joille on voimassa $-2 \le x \le 5$.

I.2 Reaalilukujen ominaisuuksia

Olkoon a, b, c reaalilukuja (siis $a,b,c \in \mathbb{R}$)

1) $a+b = b+a$ ja $ab = ba$
2) $a+(b+c) = (a+b)+c$ ja $(ab)c = a(bc)$
3) $a(b+c) = ab+ac$
4) $a+(-a) = a-a = 0$

5) $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ kun $a \neq 0$

6) $ab = 0$, niin $a = 0$ tai $b = 0$ (Tulon nolla_sääntö)

Laskukaavoja

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

I.3 Peruskäsitteitä

1.3 Itseisarvo

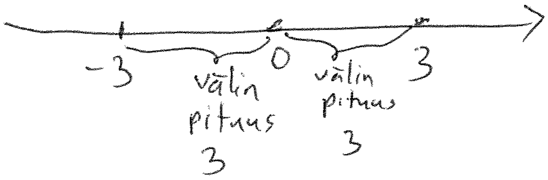
Reaaliluvun x itseisarvo on reaaliluku $|x|$, joka on määritelty seuraavasti

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0 \\ -x, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Itseisarvo on luvun etäisyys nollasta

Esim

a) $|-3| = -(-3)$
sillä $-3 < 0$.
$|3| = 3$, sillä $3 \geq 0$



b) $|\sqrt{3} - 2| = ?$
Koska $\sqrt{3} - 2 < 0$ on $|\sqrt{3} - 2| = \cancel{2-\sqrt{3}}\; -(\sqrt{3} - 2) = -\sqrt{3} + 2$

1.4 Potenssi

Olkoon a reaaliluku $(a \in \mathbb{R})$ ja n luonnollinen luku $(n \in \mathbb{N})$.
Potenssimerkintä on $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{n \text{ kappaletta}}$, missä a on kantaluku ja n eksponentti.

Lisäksi määritellään, että

$$a^0 = 1, \quad \text{missä } a \neq 0 \quad \text{ja}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, \quad \text{missä } a \neq 0.$$

Laskusääntöjä:

1) $(ab)^n = a^n b^n$

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

3) $a^m a^n = a^{m+n}$

4) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

5) $(a^m)^n = a^{mn}$

<u>Esim</u>

Laske

a) $$\frac{2^5 \cdot 3^6}{6^4} = \frac{2^5 \cdot 3^5 \cdot 3^1}{6^4} = \frac{(2 \cdot 3)^5 \cdot 3}{6^4} = 3 \cdot \frac{6^5}{6^4} = 3 \cdot 6 = 18.$$

b) $$\frac{(5^2)^3}{5^{2^3}} = \frac{5^{2 \cdot 3}}{5^{2 \cdot 2 \cdot 2}} = \frac{5^6}{5^8} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}.$$

1.5 Neliöjuuri

Olkoon $a \geq 0$ (eli $a \in [0, \infty)$). Luvun a neliöjuuri on ei-negatiivinen luku b, jonka neliö on a. Siis $\sqrt{a} = b$ jos $b \geq 0$ ja $b^2 = a$.

Laskusääntöjä:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad b \neq 0$$

Esim Laske

a) $\sqrt{25} = ?$ koska $5 \geq 0$ ja $5^2 = 25$ on $\sqrt{25} = 5$.

b) $\sqrt{-81}$ $-81 < 0$, joten neliöjuurta ei ole edes määritelty.

c) $-\sqrt{\frac{81}{64}} = -\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{64}} = -\frac{9}{8}$, sillä $9^2 = 81$, $8^2 = 64$ ja $9, 8 \geq 0$.

1.6 Polynomit

~~Polynomit ovat summalausekkeita, joissa termit ovat reaalilukuilla kerrottuja muuttujien potensseja. Esimerkiksi $17x^5$ on polynomi, jonka~~

Muuttujan x astelukua n oleva polynomi $P(x)$ on

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$ missä

$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ ovat reaalilukuja (vakioita) ja korkeimman asteen termin kerroin $a_n \neq 0$. Lisäksi n on luonnollinen luku (tai 0).

Esim

$8x^7 + 4x^3 - 61x + \pi$ on seitsemännen asteen polynomi. Tämän polynomin kolmannen asteen termi on $4x^3$, jonka kerroin on 4 ja muuttujaosa x^3.

Polynomien yhteen- ja vähennyslasku lasketaan yhdistämällä termit, joilla on sama muuttujaosa

Esim

$$2x^3 + 5x^2 - x - 1 + (-x^3 + 6x^2 + 1) - (2x^3 - 2x + 1)$$
$$= 2x^3 + 5x^2 - x - 1 - x^3 + 6x^2 + 1 - 2x^3 + 2x - 1 = -x^3 + 11x^2 + x - 1$$

Polynomien kertolasku suoritetaan kertomalla kerrottavan polynomin kaikki termit jokaisella kertoja polynomin termillä. ja laskemalla tulot yhteen.

Esim

$$(x^2+2x+1)(x^3+x) = x^5 + x^3 + 2x^4 + 2x^2 + x^3 + x = x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x + x.$$

Polynomien tekijöihin jaolla tarkoitetaan polynomin esittämistä kahden tai useamman polynomin tulona. Tähän useimmiten käytetään muistikaavoja, yhteisen tekijän ottamista tai polynomien jakamista jakokulmassa (ei tällä kurssilla!)

Esim. Jaa tekijöihin

a) $x^2 - 4x$ yhteinen tekijä x, joten $x^2-4x = x(x-4)$

b)

$$25x^2 - 20x + 4$$
$$= (5x)^2 - 2\cdot5\cdot2\cdot x + 2^2 = (5x-2)^2.$$

muistikaavat

1.7 Rationaalilausekkeet

Rationaalilauseke on kahden polynomin osamäärä, sitä ei ole määritelty nimittäjän nollakohdissa.

Esim.

$\frac{3x^2-5x+1}{x+1}$ on rationaalilauseke, joka ei ole määritelty, kun $x=-1$.

Jos rationaalilausekkeen osoittajalla ja nimittäjällä on yhteisiä tekijöitä, niin lauseketta voi sieventää jakamalla osoittajan ja nimittäjän yhteisellä tekijällä.

Esim Sievennä

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$$

Tämä lauseke on määritelty kun $x^2 \neq 1$ eli $x \neq 1, -1$

Ratkaisu

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1}{x-1}.$$

Rationaalilausekkeiden laskutoimitukset kuten murtoluvuilla.
Yhteen- ja vähennyslaskussa nimittäjät lavennetaan ensin samoiksi.

Esim:

$$\frac{3}{x} - \frac{x}{x+1} = \frac{3(x+1)}{x(x+1)} - \frac{x^2}{(x+1)x} = \frac{3x+3-x^2}{x(x+1)} = \frac{-x^2+3x+3}{x^2+x}$$

Kertolaskussa osoittajat ja nimittäjät kerrotaan keskenään.
Jakolaskussa kerrotaan jakajan käänteisluvulla.

Esim Lausekkeet määritelty kun $x \neq 1$ ja $x \neq -2$

a) $$\frac{x^2-4}{x-1} \cdot \frac{x-2}{x+2} = \frac{(x^2-4)(x-2)}{(x-1)(x+2)} = \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}(x-2)}{(x-1)\cancel{(x+2)}}$$

$$= \frac{(x-2)^2}{x-1} = \frac{x^2-4x+4}{x-1}.$$

b) $$\frac{x^2-4}{x-1} : \frac{x-2}{x+2} = \frac{x^2-4}{x-1} \cdot \frac{x+2}{x-2} = \frac{(x+2)^2}{x-1}$$

1.8. Funktio

Funktio eli kuvaus f joukosta A joukkoon B (merk. $f: A \to B$) on sääntö, joka liittää jokaiseen määrittelyjoukon A alkioon täsmälleen yhden maalijoukon B alkion. Tällä kurssilla maali- ja määrittelyjoukot ovat aina reaalilukujen osajoukkoja.

Funktion f arvoa pisteessä $x \in A$ merkitään $f(x)$. Funktion kaikkien arvojen joukkoa sanotaan arvojoukoksi (merk. A_f).

Esim

$p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad p(x) = x^2 + 3$ on 2. asteen polynomifunktio, jonka määrittely- ja maalijoukko ovat $\mathbb{R}$.

Pisteessä 2 funktion arvo on $p(2) = 2^2 + 3 = 7$.

Mikä on p:n arvojoukko?

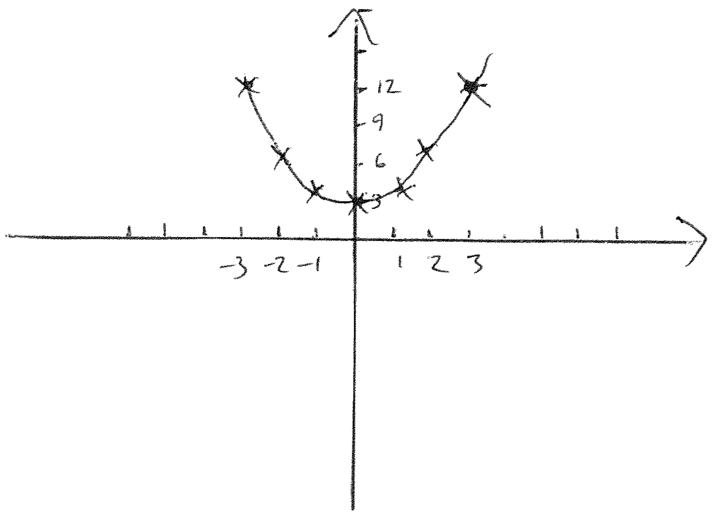
Koska $x^2 \geq 0$ on $p(x) = x^2 + 3 \geq 0 + 3 = 3$.

Toisaalta p voi saada kuinka suuria arvoja tahansa, joten $A_f = [3, \infty)$.

Huom: $s: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ $\quad s(x) = x^2 + 3$ on eri funktio kuin p.

Funktion $f: A \to B$ kuvaaja (eli graafi) muodostuu xy-tason pisteistä $(x, f(x))$, missä x voi olla mikä tahansa määrittelyjoukon piste

Edellisen esimerkin funktion kuvaaja:



x	
0	3
1	4
−1	4
2	7
−2	7
3	12
−3	12

2. Yhtälöt ja epäyhtälöt

2.1 Ensimmäisen asteen yhtälö ja epäyhtälö

Muuttujan x ensimmäisen asteen yhtälöksi sanotaan yhtälöä, joka voidaan kirjoittaa muotoon $ax+b=0$, missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$.
Ratkaistaan muokkaamalla muotoon $x = -\frac{b}{a}$ tai $b=0$.
Jos ~~b=0~~ jälkimmäisessä tapauksessa b on nolla on yhtälö identtisesti tosi (ts. tosi kaikilla x:n arvoilla), jos b ei ole nolla on yhtälö identtisesti epätosi. (ts. yksikään x ei toteuta yhtälöä)

2.1.1 Esim

Ratkaise yhtälöt:

a) $7\left(x-\frac{1}{3}\right) = 21x + \frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{2}x + 5 = \frac{8x-1}{4} - \frac{x}{2} + 1$

Ratkaisu:

a) $7\left(x-\frac{1}{3}\right) = 21x + \frac{1}{4}$

$7x - \frac{7}{3} = 21x + \frac{1}{4} \quad | -21x + \frac{7}{3}$

$-14x = \frac{7}{3} + \frac{1}{4}$

$-14x = \frac{28+3}{12} \quad (|:(-14))$

$x = \frac{-31}{168}$ (Tarkista sijoittamalla) b)

$$\frac{3}{2}x+5 = \frac{8x-1}{4} - \frac{x}{2} + 1 \quad \Big| + \frac{x}{2}$$

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)x+5 = \frac{8}{4}x - \frac{1}{4} + 1$$

$$2x+5 = 2x + \frac{3}{4} \quad \Big| -2x - \frac{3}{4}$$

$$\frac{17}{4} = 0$$ Yhtälö on identtisesti epätosi.

Ensimmäisen asteen epäyhtälö ratkaistaan kuten yhtälökin. On kuitenkin muistettava, että epäyhtälömerkin suunta kääntyy, kun kerrotaan epäyhtälö puolittain negatiivisella luvulla. Epäyhtälön ratkaisu on usein jokin lukujoukko esim. väli.

2.1.2 Esim.

Ratkaise $\frac{x}{3} + 1 \le 2x - \frac{1}{2}$

$$\frac{x}{3} + 1 \le 2x - \frac{1}{2} \quad \Big| -2x - 1$$

$$\frac{x}{3} - 2x \le -1 - \frac{1}{2}$$

negatiivinen luku epäyhtälömerkin suunta kääntyy

$$-\frac{5}{3}x \le -\frac{3}{2} \quad \Big| \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$x \ge +\frac{9}{10}$$

V: epäyhtälö toteutuu kun $x \ge \frac{9}{10}$

(ts. $x \in [\frac{9}{10}, \infty)$).