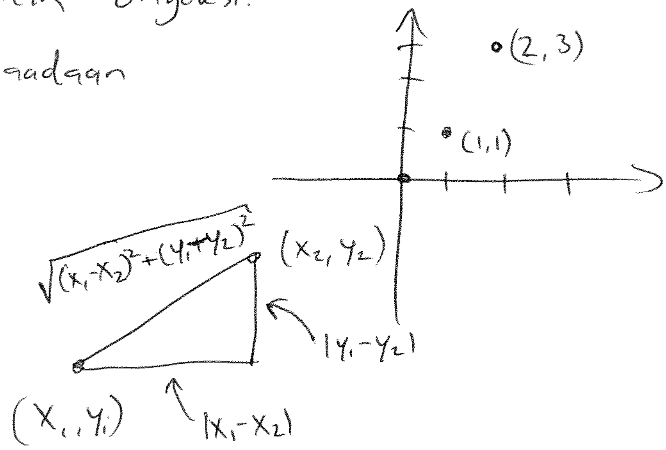
3. Analyyttinen geometria

Analyyttisessä geometriassa tutkitaan geometrisiä objekteja koordinaatistoesityksessä. Objektit kuvataan yhtälöiden avulla, Esim. objektien leikkauspisteitä voidaan tarkastella yhtälönratkaisumenetelmien avulla

3.1. Koordinaatisto

Tasossa paikka ilmaistaan kahdella koordinaatilla. Vertailupistettä (0,0) kutsutaan origoksi. Pisteiden väliset etäisyydet saadaan Pythagoraan lauseesta.

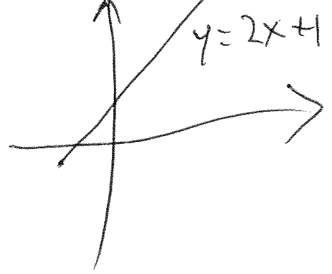


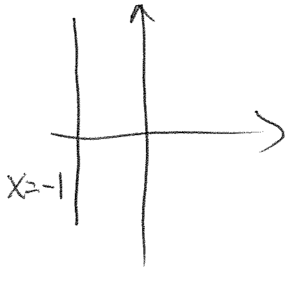
3.2 Suora

Suoran yhtälö on $Ax+By+C=0$, missä joko $A\neq 0$ tai $B\neq 0$. Pisteet (x,y) ovat yhtälön määräämällä suoralla jos ne toteuttavat em. yhtälön.

Jos $B\neq 0$, niin yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $y=kx+b$, missä lukua k sanotaan suoran kulmakertoimeksi.

Jos $B=0$, suoran yhtälö on muotoa $x=c$,





Näitä sanotaan suoran yhtälön ratkaistuksi muodoksi.

Jos pisteet (x, y) ja (x_0, y_0) ovat suoralla $y = kx + b$,

niin $y - kx = b$ ja $y_0 - kx_0 = b$.

Tällöin $y - kx = y_0 - kx_0$ eli $\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}$. (*)

Tästä yhtälöstä voidaan ratkaista suoran yhtälö jos tiedetään kaksi suoran pistettä tai yksi piste ja suoran kulmakerroin, jos suora voidaan esittää muodossa $y = kx + b$ eli $B \neq 0$.

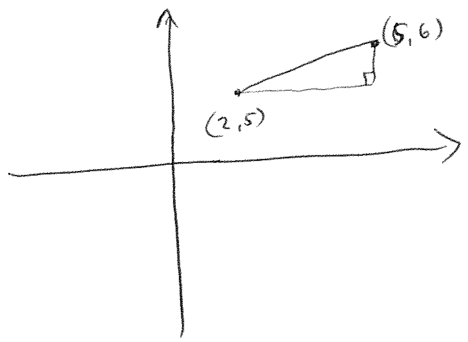
Esim.

Suora kulkee pisteiden $(2,5)$ ja $(5,6)$ kautta. Mikä on suoran kulmakerroin? Yhtälö? missä pisteissä suora leikkaa x- ja y-akselit?

Ratkaisu:

(*)

Em. yhtälön mukaan on



$$6 - 5 = k(5 - 2)$$
$$1 = k \cdot 3$$
$$k = \frac{1}{3}.$$

Suoran yhtälö on
$$y - 5 = \frac{1}{3}(x - 2)$$
$$y - 5 = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$
$$y = \frac{1}{3}x + \frac{13}{3}.$$

x-akselin leikkauspisteessä y-koordinaatti on 0.

Etsitään suoralta piste $(x, 0)$

$$0 = \frac{1}{3}x + \frac{13}{3} \text{ eli } x = -13.$$

Suora leikkaa x-akselin pisteessä $(-13, 0)$.

Suora leikkaa y akselin kun x-koordinaatti on 0

eli $y = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{13}{3}$ eli $y = \frac{13}{3}$.

Pisteessä $(0, \frac{13}{3})$ suora leikkaa y-akselin.

3.3 Kulmakerroin

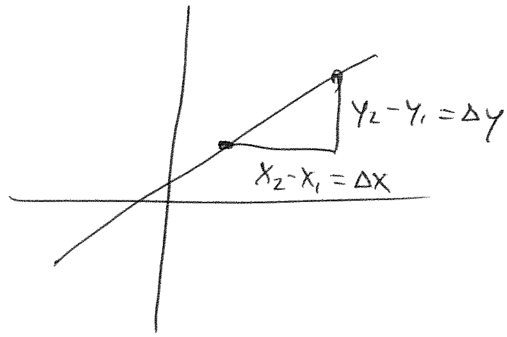
Kulmakerroin kuvaa suoran jyrkkyyttä (suuntaa, kasvunopeutta).

Jos

$k > 0$ suora on nouseva

$k < 0$ suora on laskeva

$k = 0$ suora on vaakasuora

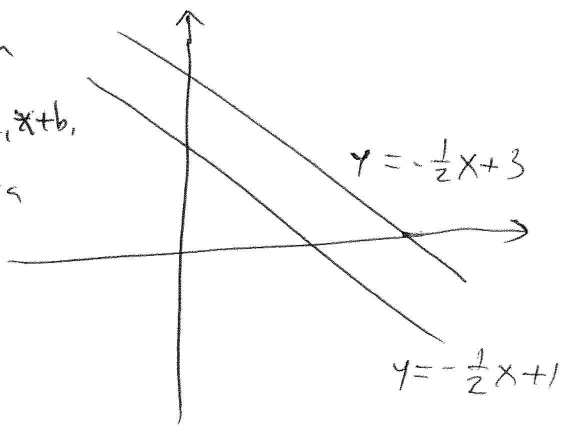


Yhtälön ⊛ mukaan on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

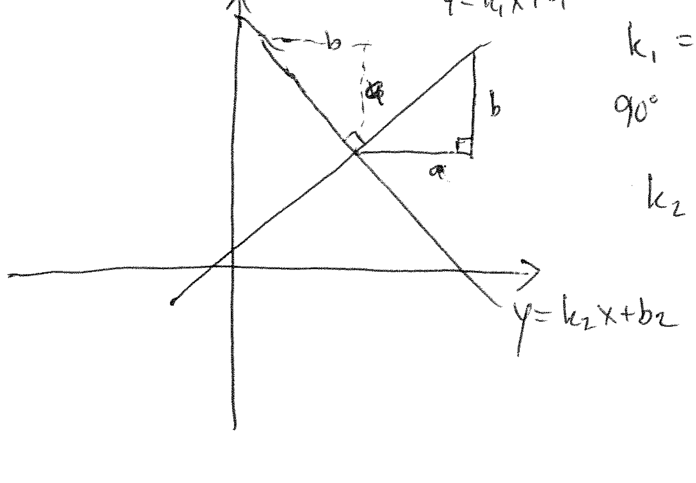
(Δ usein merkitsee jonkin muutosta)

Suorat ovat yhdensuuntaiset jos niillä on samat kulmakertoimet.



Suorat ovat kohtisuorassa täsmälleen silloin kun niiden kulmakertoimien tulo on -1. Siis jos $y = k_1x + b_1$ ja $y = k_2x + b_2$ ovat suoria niin ne ovat kohtisuorassa täsmälleen kun $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Perustelu



$k_1 = \frac{b}{a}$ ja kääntämällä kolmiota $90°$ kolmio, mistä saadaan kulmakertoimeksi $k_2 = -\frac{a}{b}$. Tällöin $k_1k_2 = -\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = -1$.

Jos kulmakerroin on 0 niin kohtisuorat suorat ovat pystysuoria. (ja päin vastoin.)

Esim.

Mikä suora kulkee pisteen $(0,0)$ kautta ja on kohtisuorassa suoran $y = -\frac{52}{7}x + \pi$ nähden

Ratk.

Koska suora kulkee pisteen $(0,0)$ kautta suoran yhtälö on muotoa $y = kx$ (vrt. yhtälö (*)). Suoran kulmakerroin saadaan yhtälöstä $k \cdot \left(-\frac{52}{7}\right) = -1$ eli $k = \frac{7}{52}$ ja suoran yhtälö on $y = \frac{7}{52}x$.

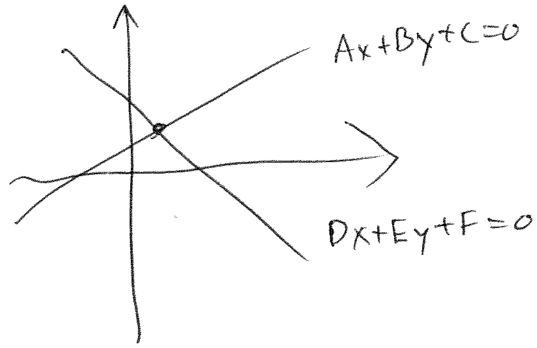
3.4 Yhtälöpari

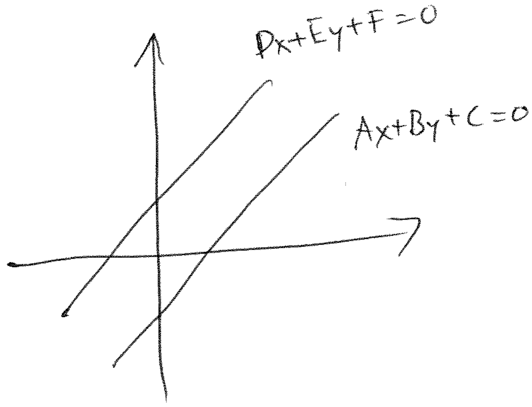
Missä pisteissä kaksi suoraa leikkaa toisensa?

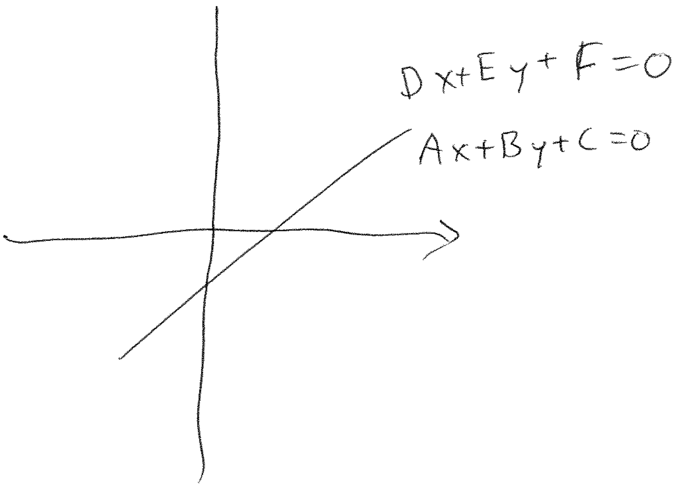
Ts. ~~mit~~ jos $Ax + By + C = 0$ ja $Dx + Ey + F = 0$ ovat kaksi suoran yhtälöä, niin mitkä pisteet (x, y) toteuttavat molemmat yhtälöt. Tarkoituksena on siis ratkaista yhtälöpari

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Dx + Ey + F = 0. \end{cases}$$

1. asteen Yhtälöparin ratkaisuja ovat pisteet (x, y), jotka toteuttavat molemmat yhtälöt. Ratkaisuja voi olla yksi, ei yhtään tai äärettömän monta.







(Siis molemmat suorat ovat samat.)

Esim. Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x + 4y = 1 \end{cases}$$

Ratk. Tapa 1: (sijoitus)

Ratkaistaan toinen muuttuja toisesta yhtälöstä ja sijoitetaan se toiseen yhtälöön.

$$x + 4y = 1$$
$$x = 1 - 4y$$

Sijoitetaan tämä ensimmäiseen yhtälöön ja saadaan

$$2(1-4y) + 3y = 6$$
$$2 - 5y = 6$$
$$y = -\frac{4}{5}.$$

Tästä saadaan ratkaistua myös

$$x = 1 - 4\left(-\frac{4}{5}\right) = 1 + \frac{16}{5} = \frac{21}{5}.$$

Ratkaisu on siis $\left(\frac{21}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

Tapa 2 (yhteenlasku):

Kerrotaan toinen yhtälö sellaisella luvulla, että jonkin muuttujan kertoimiksi saadaan vastaluvut. Tämän jälkeen lasketaan yhtälöt yhteen.

$$\begin{cases} 2x+3y=6 \\ x+4y=1 \end{cases}$$

Kerrotaan 2. yhtälö puolittain luvulla -2.

$$\begin{cases} 2x+3y=6 \\ -2x-8y=-2 \end{cases}$$

X:in kertoimet ovat vastaluvut. Lasketaan yhtälöt puolittain yhteen.

$$2x-2x+3y-8y=6-2$$

$$-5y=4$$

$$y=-\frac{4}{5}$$

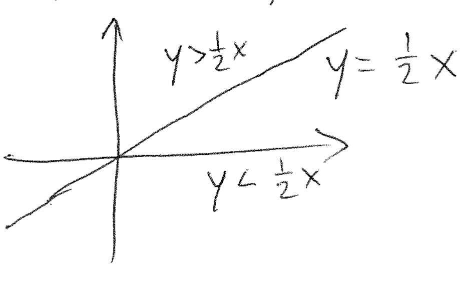
Nyt x voidaan ratkaista sijoittamalla y toiseen alkup. yhtälöistä.

Vastaavilla menetelmillä voidaan ratkoa 1. asteen yhtälöryhmiä (kahden sijaan enemmän yhtälöitä ja muuttujia).

Jos osa yhtälöistä on korkeampiasteisia, niin ~~sijoitus~~ menetelmiä voi ainakin yrittää ja joskus onnistuakin.

Suora $Ax+By+C=0$ jakaa tason kahteen osaan. Oltava $A\neq 0$ tai $B\neq 0$.

Toisessa osassa $Ax+By+C>0$ ja $Ax+By+C<0$.



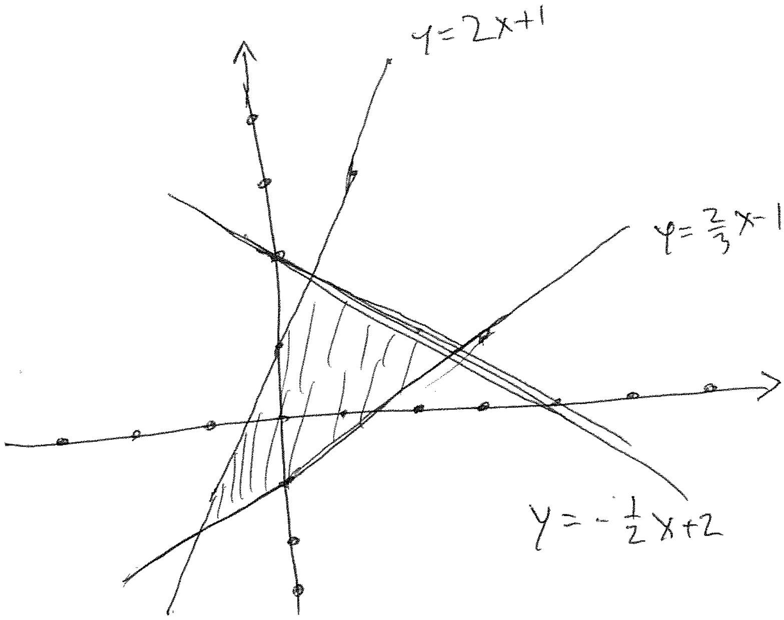
Esim Ratkaise epäyhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x - y + 1 \geq 0 \\ x + 2y - 4 \leq 0 \\ -2x + 3y + 3 \geq 0 \end{cases}$$

Ratkaisemisella tarkoitetaan niiden pisteiden (x,y) etsimistä, jotka toteuttavat kaikki 3 epäyhtälöä

Ratkaistaan kaikista ey:istä y.

$$\begin{cases} y \leq 2x + 1 \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 2 \\ y \geq \frac{2}{3}x - 1 \end{cases}$$



Kaikki nämä toteutuvat, kun ollaan suorien $y = 2x+1$ ja $y = -\frac{1}{2}x + 2$ alapuolella, mutta $y = \frac{2}{3}x - 1$ suoran yläpuolella.

3.5 Ympyrä

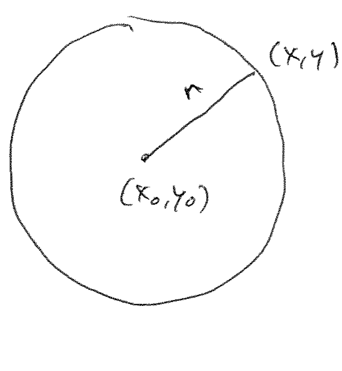
Ympyrä on niiden pisteiden joukko, jotka ovat samalla etäisyydellä, jostain kiinnitetystä pisteestä (ympyrän keskipiste).

säde

$r > 0$

Jos ympyrän keskipiste on (x_0, y_0) ja säde r, niin ympyrän pisteet toteuttavat yhtälön

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r \quad \text{(Pythagoras)}$$



$$\Leftrightarrow \quad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

(ympyrän yhtälö keskipistemuodossa)

Poistamalla sulut saadaan muotoa

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$ oleva yhtälö.

Kaikki tällaiset eivät ole välttämättä ympyrän yhtälöitä.

Esim.

a) Yhtälö

$$(x-\sqrt{2})^2+(y+5)^2=8$$ on ympyrän yhtälö ja ympyrän keskipiste on $(\sqrt{2},-5)$ ja säde on $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

b) Onko yhtälö $x^2+y^2-4x+6y+12=0$ ympyrän yhtälö? Keskipiste? Säde?

Yritetään kirjoittaa yhtälö keskipistemuotoon

$$x^2+y^2-4x+6y+12=0$$

$$x^2-2\cdot2\cdot x+y^2+2\cdot3y+12=0$$

$$x^2-2\cdot2x+2^2-2^2+y^2+2\cdot3y+3^2-3^2+12=0$$

$$(x-2)^2-4+(y+3)^2-9+12=0$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2=1$$

Yhtälö on ympyrän yhtälö ja keskipiste $(2,-3)$ ja säde on 1.

c) Onko yhtälö $x^2+y^2-4x+6y+20=0$ ympyrän yhtälö?

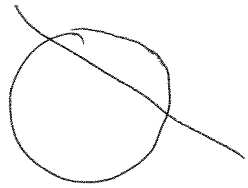
~~Kuten~~ Toimimalla kuten b)-kohdassa saadaan tämä yhtälö muotoon $(x-2)^2+(y+3)^2=-7$.

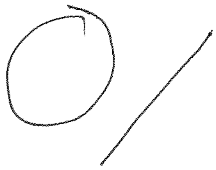
Tämä ei ole ympyrän yhtälö, -7 ei voi olla säteen neliö. (Itseasiassa yhtälöllä ei ole yhtään ratkaisua.)

3.6 Ympyrän ja suoran leikkauspisteet

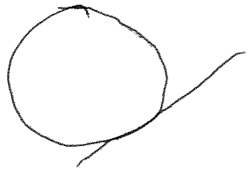
Ympyrän $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ ja suoran $ax+by+c=0$ leikkauspisteet saadaan yhtälöparista

$$\begin{cases} x^2+y^2+Ax+By+C=0 \\ ax+by+c=0 \end{cases}$$





~~Rat~~ Leikkauspisteitä 0, 1, tai 2.



Ratkaiseminen kannattaa aloittaa ratkaisemalla toinen muuttuja suoran yhtälöstä.

Esim. Suoran $x=2y+1$ ja ympyrän $x^2+y^2+2y=8$ leikkauspisteet

$$\begin{cases} x=2y+1 \\ x^2+y^2+2y=8 \end{cases}$$

Sijoitetaan 1. yhtälö 2. yhtälöön.

$$(2y+1)^2+y^2+2y=8$$

$$5y^2+6y-7=0$$

$$y_1=-\frac{3}{5}+\frac{2\sqrt{11}}{5}$$

$$y_2=-\frac{3}{5}-\frac{2\sqrt{11}}{5}$$

x-koordinaatit saadaan sijoittamalla y-koordinaatit suoran yhtälöön.

$$x_1=1-\frac{6}{5}+\frac{4\sqrt{11}}{5} \qquad x_2=1-\frac{6}{5}-\frac{4\sqrt{11}}{5}$$

$$x_1=-\frac{1}{5}+\frac{4\sqrt{11}}{5} \qquad x_2=-\frac{1}{5}-\frac{4\sqrt{11}}{5}$$

$$\left(-\frac{1}{5}+\frac{2\sqrt{11}}{5}, -\frac{3}{5}+\frac{4\sqrt{11}}{5}\right) \text{ ja } \left(-\frac{1}{5}-\frac{2\sqrt{11}}{5}, -\frac{3}{5}-\frac{4\sqrt{11}}{5}\right)$$

Jos suoralla ja ympyrällä on täsmälleen yksi leikkauspiste suoraa sanotaan ympyrän tangentiksi.

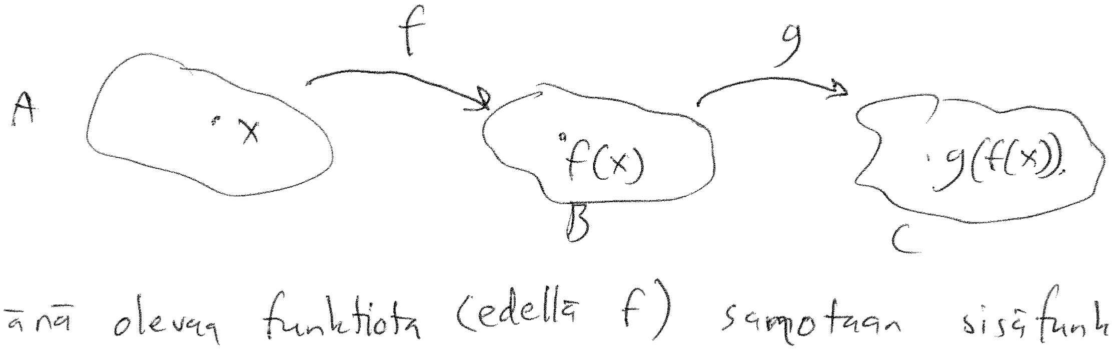
4. Reaalifunktiot

4.1. Yhdistetty funktio

~~Olkoon $f: A \to B$ ja $g: B \to C$ kaksi funk~~

Jos funktio f on määritelty pisteessä x, ja funktio g pisteessä $f(x)$ on luku $g(f(x))$ määritelty. Tämä on funktioista f ja muodostetun yhdistetyn funktion $g \circ f$ arvo pisteessä x.

Yleisemmin, jos $f: A \to B$ ja $g: B \to C$ ovat funktioita, niin $g \circ f: A \to C$ ja $g \circ f(x) = g(f(x))$.



Sisempänä olevaa funktiota (edellä f) sanotaan sisäfunktioksi ja ulompaa funktiota ulkofunktioksi.

Esim.

Olkoon $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=x^3+1$ ja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$g(x)=x^2-1$.

Tällöin $f\circ g(x)=f(g(x))=(x^2-1)^3+1$ ja

$$g\circ f(x)=g(f(x))=(x^3+1)^2-1.$$

~~Tehtävä~~ Joskus on hyödyllistä kirjoittaa annettu funktio kahden funktion yhdisteenä.

Esim. Tulkitse seuraavat funktiot yhdistettyinä funktioina.

a) $h(x)=(x^2+12)^3+1$

Valitaan $f(x)=x^2+12$ ja $g(x)=x^3+1$.

Tällöin $g(f(x))=h(x)$

b) $i(x)=\sqrt{x^2+8}$

Valitaan $f(x)=\sqrt{x}$ $g(x)=x^2+8$.

Tällöin $f\circ g(x)=f(g(x))=i(x)$

c) $k(x)=\dfrac{1}{(\sin x+1)^4}$

$f(x)=\dfrac{1}{x^4}$ ja $g(x)=\sin x+1$

Vastauksia on useita.

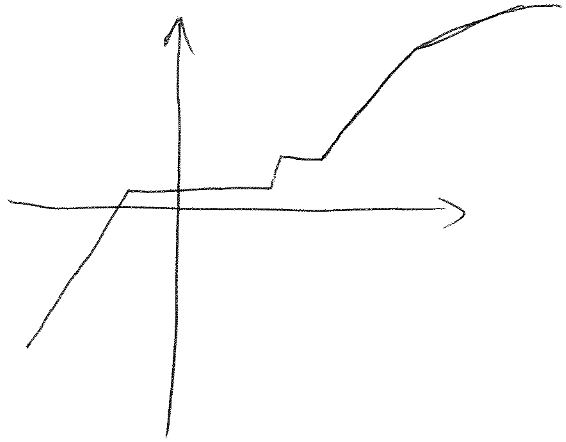
4.2 funktion monotonisuus

Olkoon f funktio, jonka määrittelyjoukko on A (esim. väli tai $\mathbb{R}$).

Jos kaikilla määrittelyjoukon luvuilla x_1, x_2 ($\forall\, x_1, x_2 \in A$) on voimassa

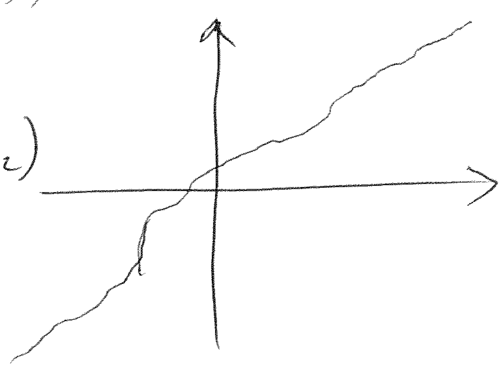
1) "jos $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) \leq f(x_2)$"

funktio f on kasvava (jos muuttuja kasvaa, niin $f(x)$ kasvaa)



2) "jos $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) < f(x_2)$"

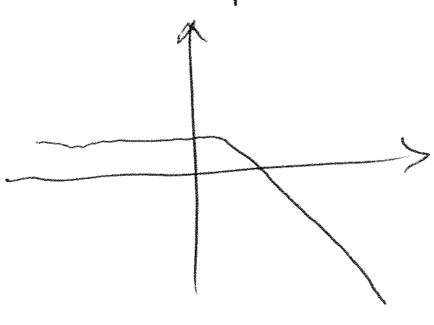
funktio on aidosti kasvava



3) "jos $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) \geq f(x_2)$"

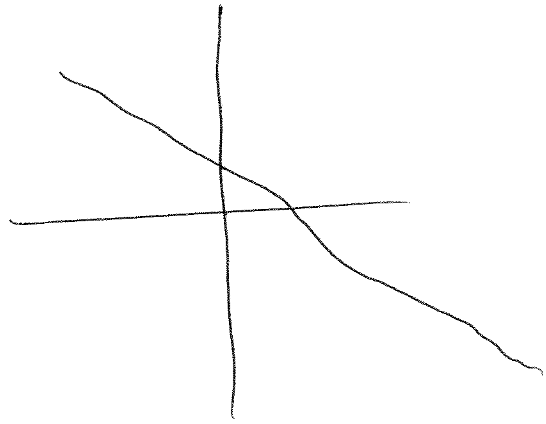
funktio on vähenevä.

(eli kun x kasvaa f pienenee)



4) "jos $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) > f(x_2)$"

funktio on aidosti vähenevä.



Funktio on monotoninen jos se on kasvava tai vähenevä ja aidosti monotoninen jos se on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä.

Huom Aidosti monotoninen funktio saa jokaisen arvonsa täsmälleen kerran.

$f(x_1) = f(x_2)$ täsmälleen silloin kun $x_1 = x_2$.

4.3 Käänteisfunktio

Olkoot $f: A \to B$ ja $g: B \to A$ funktioita.

Jos kaikilla $x \in A$ $\quad g \circ f(x) = g(f(x)) = x$ ja

kaikilla $y \in B$ $\quad f \circ g(y) = f(g(y)) = y$, niin

sanotaan, että f ja g ovat toistensa käänteisfunktioita.
Funktiota g sanotaan f:n käänteisfunktioksi, ja sille käytetään merkintää f^{-1} (Ei potenssilasku!).

Kaikilla funktioilla ei ole käänteisfunktiota.

Esim.

$$f: \mathbb{R} \to [1, \infty) \qquad f(x) = x^2 + 1$$

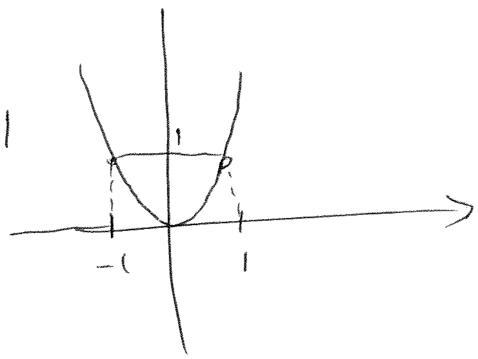
Tällä funktiolla ei ole käänteisfunktiota. Miksi?

~~Jos f:llä olisi käänteisfunktio $f^{-1}: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, niin olisi oltava~~

Huomataan ensin, että $f(-1) = 2$ ja $f(1) = 2$.

Jos f:llä olis käänteisfunktio $f^{-1}: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, niin mikä olisi $f^{-1}(2)$?

Koska $f^{-1}(f(x)) = x$ on



$$(*) \quad f^{-1}(f(-1)) = -1 \quad \text{ja} \quad f^{-1}(f(1)) = 1$$

mutta, koska $2 = f(-1) = f(1)$ ~~on~~ $(**)$

~~oltava $f^{-1}(1)$~~

~~$$1 = f^{-1}(f(1)) = f^{-1}(f(-1)) = -1.$$~~

~~$(*)$ $(**)$~~

~~Tämä on mahdotonta, joten f:llä ei ole käänteiskuv~~

On toisaalta $f^{-1}(2) = -1$ ja $f^{-1}(+2) = -1$, mutta tämä ei ole mahdollista, sillä funktion arvojen on oltava yksikäsitteisesti määrätty. (ks. funktion määritelmä kurssin alussa).

Jos funktio on aidosti monotoninen on käänteisfunktio olemassa.
Jos rajoitetaan tarkastelu välille, jolla funktio on aidosti monotoninen löydetään käänteisfunktio.

Esim. Olkoon $f : [0, \infty) \to [1, \infty)$. $f(x) = x^2 + 1$.

Tällä funktiolla on käänteisfunktio, sillä se on aidosti kasvava.
Määritetään käänteisfunktion lauseke.

Ratkaistaan yhtälöstä $y = x^2+1$, muuttujan x suhteen.
Lisäksi oletetaan, että $x \geq 0$, sillä f:n määrittelyjoukko on $[0, \infty)$.

$$y = x^2 + 1$$

$$x^2 = y - 1$$

$$x = \pm\sqrt{y-1}$$

Koska $x \geq 0$ on $x = \sqrt{y-1}$.

Tällöin $f^{-1} : [1, \infty) \to [0, \infty)$ $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ on f:n käänteisfunktio, sillä

$$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{(x^2+1)-1} = \sqrt{x^2} = |x| = x, \text{ sillä } x \geq 0$$

ja $f(f^{-1}(y)) = (\sqrt{y-1})^2 + 1 = y - 1 + 1 = y$ kaikilla $y \geq 1$.

36 Käänteisfunktion kuvaaja saadaan peilaamalla funktion kuvaaja suoran $y=x$ suhteen