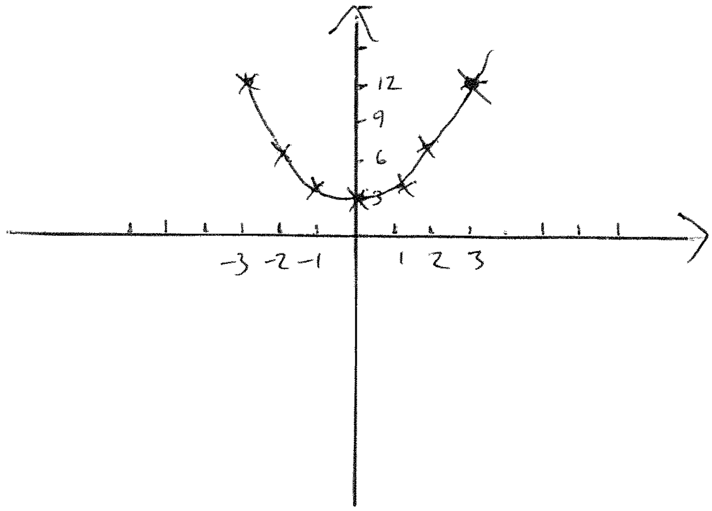
y

Funktion $f : A \to B$ kuvaaja (eli graafi) muodostuu xy-tason pisteistä $(x, f(x))$, missä x voi olla mikä tahansa määrittelyjoukon piste

Edellisen esimerkin funktion kuvaaja:



x	
0	3
1	4
-1	4
2	7
-2	7
3	12
-3	12

2. Yhtälöt ja epäyhtälöt

2.1 Ensimmäisen asteen yhtälö ja epäyhtälö

Muuttujan x ensimmäisen asteen yhtälöksi sanotaan yhtälöä, joka voidaan kirjoittaa muotoon $ax + b = 0$, missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$.
Ratkaistaan muokkaamalla muotoon $x = -\frac{b}{a}$ tai $b = 0$.
Jos ~~b=0~~ jälkimmäisessä tapauksessa b on nolla on yhtälö identtisesti tosi (ts. tosi kaikilla x:n arvoilla), jos b ei ole nolla on yhtälö identtisesti epätosi. (ts. yksikään x ei toteuta yhtälöä)

2.1.1 Esim

Ratkaise yhtälöt:

a) $7\left(x - \frac{1}{3}\right) = 21x + \frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{2}x + 5 = \frac{8x-1}{4} - \frac{x}{2} + 1$

Ratkaisu:

a)
$$7\left(x - \frac{1}{3}\right) = 21x + \frac{1}{4}$$
$$7x - \frac{7}{3} = 21x + \frac{1}{4} \quad \left| -21x + \frac{7}{3}\right.$$
$$-14x = \frac{7}{3} + \frac{1}{4}$$
$$-14x = \frac{28+3}{12} \quad (|:(-14))$$
$$x = \frac{-31}{168}$$
(Tarkista sijoittamalla)

b) [10]

$$\frac{3}{2}x + 5 = \frac{8x-1}{4} - \frac{x}{2} + 1 \quad \Big| + \frac{x}{2}$$

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)x + 5 = \frac{8}{4}x - \frac{1}{4} + 1$$

$$2x + 5 = 2x + \frac{3}{4} \quad \Big| -2x - \frac{3}{4}$$

$$\frac{17}{4} = 0$$ Yhtälö on identtisesti epätosi.

Ensimmäisen asteen epäyhtälö ratkaistaan kuten yhtälökin. On kuitenkin muistettava, että epäyhtälömerkin suunta kääntyy, kun kerrotaan epäyhtälö puolittain negatiivisella luvulla. Epäyhtälön ratkaisu on usein jokin lukujoukko esim. väli.

1.2 Esim.

Ratkaise $\frac{x}{3} + 1 \leq 2x - \frac{1}{2}$

$$\frac{x}{3} + 1 \leq 2x - \frac{1}{2} \quad \Big| -2x - 1$$

$$\frac{x}{3} - 2x \leq -1 - \frac{1}{2}$$

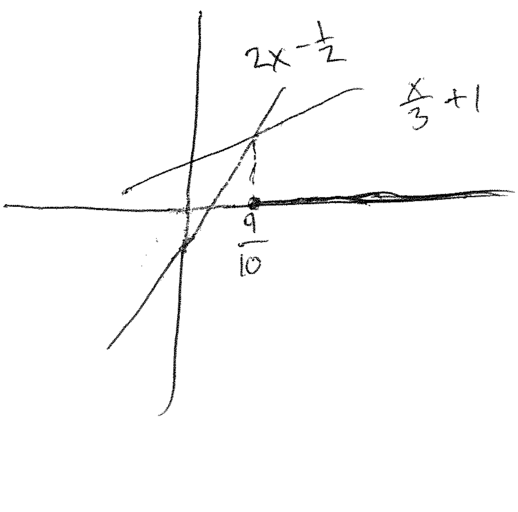
$$-\frac{5}{3}x \leq -\frac{3}{2} \quad \Big| \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$$

negatiivinen luku epäyhtälömerkin suunta kääntyy

$$x \geq +\frac{9}{10}$$

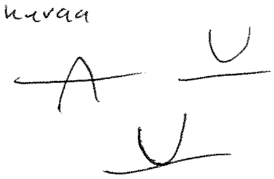
V: epäyhtälö toteutuu kun $x \geq \frac{9}{10}$

(ts. $x \in [\frac{9}{10}, \infty)$).



2.2. Toisen asteen yhtälö

Voisi piirtää taululle pari kuvaa



Muuttujan x 2. asteen yhtälö on muotoa

$ax^2+bx+c=0$, missä $a,b,c \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$.

2.2.1 Vaillinaiset 2. ast. yhtälöt

i) Jos $b=0$, niin yhtälö saadaan ratkaistua ottamalla neliöjuuri

Esim: Ratkaise

a) $9x^2-225=0$

$$9x^2=225$$

$$x^2=25$$

$$x=\pm\sqrt{25}=\pm 5.$$

b) $x^2+25=0$

$$x^2=-25$$

Tällä yhtälöllä ei ole ratkaisua, sillä reaaliluvun neliö on aina vähintään 0.

ii) Jos $c=0$, niin yhtälö ratkeaa ottamalla yhteinen tekijä ja käyttämällä tulon nollasääntöä.

↖ ks. 1.2.

Esim Ratkaise

$$5x^2+8x=0$$

$$x(5x+8)=0$$

Koska lukujen tulo on nolla on toisen tulon tekijöistä oltava nolla

eli $x=0$ tai $5x+8=0$ eli $x=0$ tai $x=-\frac{8}{5}$.

~~[illegible]~~

2.2.2. Täydellinen toisen asteen yhtälö

Jos $a, b, c \neq 0$, niin toisen asteen yhtälö on täydellinen.
Yleinen toisen asteen yhtälön ratkaisukaava on

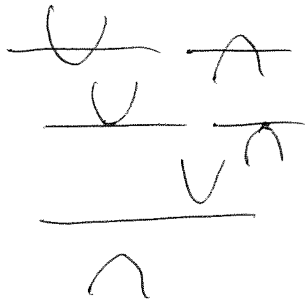
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Huom

i) Ratkaisukaava toimii myös vaillinaisille yhtälöille.

ii) 2. asteen yhtälöllä ei ole aina ratkaisua. Tämä näkyy ratkaisukaavan neliöjuurilausekkeesta. Juurrettavaa $b^2 - 4ac$ sanotaan yhtälön diskriminantiksi (merk. D).

Jos $D > 0$, niin yhtälöllä kaksi eri ~~ratkaisua~~ juurta.
Jos $D = 0$, niin yhtälöllä on yksi juuri.
Jos $D < 0$, niin yhtälöllä ei ole juuria.



Esim.

a) Ratkaise yhtälö $-3x^2 + x + 2 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{-6} = \frac{-1 \pm 5}{-6} \qquad x = 1 \text{ tai } x = -\frac{2}{3}.$$

b) Kuinka monta juurta on yhtälöllä $2\sqrt{3}\,x^2 - \sqrt{2}\,x + \frac{1}{4} = 0$?

Lasketaan diskriminantti $D = (-\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{4} = 2 - 2\sqrt{3} < 0$
eli yhtälöllä ei ole yhtään ratkaisua.

2.3 Toisen asteen epäyhtälö

Toisen asteen epäyhtälöt ovat muotoa $ax^2+bx+c>0$ ($>$:n sijaan voi olla myös $<$, $\geq$, $\leq$). Niiden ratkaiseminen perustuu tietoon, että toisen asteen polynomifunktion kuvaajat ovat aina paraabeleja. Paraabeli aukeaa ylöspäin jos $a>0$ ja alaspäin jos $a<0$.

Toisen asteen epäyhtälö ($ax^2+bx+c>0$) ratkaistaan seuraavasti:

1. Ratkaise vastaava toisen asteen yhtälö.
2. Päättele ratkaisu paraabelin aukeamissuunnan ja ~~polynomin~~ vastaavan yhtälön nollakohtien avulla.

Esim. Ratkaise epäyhtälöt:

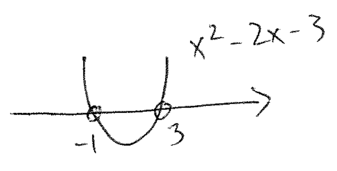
a) $x^2-2x-3>0$ b) $x^2-2x-3\geq 0$

c) $-x^2+2x-1<0$ d) $-x^2+2x-1\leq 0$

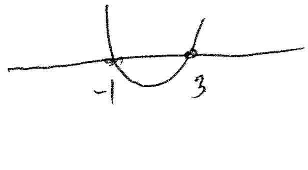
Ratkaisu:

a) Ratkaistaan yhtälön $x^2-2x-3=0$ juuret 2. asteen yhtälön ratkaisukaavalla $x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}$ eli $x=3$ ~~ja~~ tai $x=-1$.

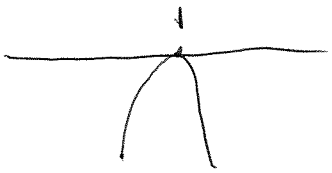
Koska x^2-2x-3:n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli on $x^2-2x-3>0$ kun $x<-1$ tai $x>3$.



b) Polynomi on sama kuin a)-kohdassa, joten kuvion perusteella $x^2-2x-3\geq 0$ kun $x\leq -1$ tai $x\geq 3$.



c) Yhtälön $-x^2+2x-1=0$ ainoa juuri on $x=1$ (kokeile vaikka).
$-x^2+2x-1$:n kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten
$-x^2+2x-1<0$ kun $x<1$ tai $x>1$ eli
kun $x \neq 1$.



d) Kuten kohta c, mutta $-x^2+2x-1 \leq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.
(Yhtälö on identtisesti tosi.)

2.4 Korkeamman asteen yhtälöt

Viidennen ja sitä korkeamman asteen yhtälöillä ei ole ratkaisukaavaa!

Mutta ratkaisuja useinkin!

Suuriasteisia yhtälöitä voi joskus kuitenkin ratkoa arvaamalla juuria ja jakamalla polynomeja tekijöihin. (ks. Häkkinen)

Nyt tyydymme seuraavaan erikoistapaukseen.

Neljännen asteen yhtälö on bikvadraattinen jos siitä puuttuvat ensimmäisen ja kolmannen asteen termit ~~ja~~ eli yhtälö on muotoa

$$ax^4+bx^2+c=0.$$

Tämä voidaan ratkaista 2. asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla.
Sijoittamalla apumuuttuja $u=x^2$ saadaan yhtälö
$au^2+bu+c=0$, josta u voidaan ratkaista.

Esim. Ratkaise $x^4+2x^2-15=0$.

Sijoitetaan $u=x^2$ ja saadaan yhtälö $u^2+2u-15=0$.
Tällöin 2. ast. yht. ratk. kaavan mukaan $u=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+60}}{2}$

eli $u=\dfrac{-2\pm 8}{2}$ ja $u=3$ tai $u=-5$

Alkuperäinen yhtälö ratkeaa kun

$$x^2 = 3 \qquad \text{tai} \qquad x^2 = -5$$

$$x = \pm\sqrt{3} \qquad\qquad \uparrow \text{ ei ratkaisuja}$$

Siis $x = \sqrt{3}$ tai $x = -\sqrt{3}$.

2.5 Murtoyhtälö ja -epäyhtälö

Murtoyhtälöitä ratkotaan periaatteessa samoilla tekniikoilla kuin polynomiyhtälöitäkin, mutta ratkaisujen joukosta on poistettava pisteet joissa murtolausekkeet eivät ole määritelty.

Esim.

Ratkaise

$$\frac{2}{x+3} + \frac{1}{x-3} = \frac{x^2-x}{x^2-9}$$

Yhtälö on määritelty kun $x-3 \neq 0$, $x+3 \neq 0$ ja $\underbrace{x^2-9}_{=(x-3)(x+3)} \neq 0$

eli kun $x \neq \pm 3$.

Kerrotaan puolittain $x^2-9=(x-3)(x+3)$:lla

$$\frac{2}{\cancel{x+3}}\cancel{(x+3)}(x-3) + \frac{1}{\cancel{x-3}}(x+3)\cancel{(x-3)} = x^2 - x$$

$$2x-6+x+3 = x^2-x$$

$$x^2-4x+3=0$$

eli $x=1$ tai $x=3$, mutta yhtälö ei ole määritelty kun $x=3$ eli yhtälön ainoa ratkaisu on $x=1$

Edellinen yhtälö olisi voitu ratkaista myös siirtämällä kaikki termit samalle puolelle, laventamalla saman nimisiksi ja käyttämällä tietoa, että osamäärä on nolla täsmälleen silloin kun osoittaja on nolla. Murtoey:n ratkaiseminen onnistuu parhaiten näin. Murtoepäyhtälöä ratkaistaessa pitää selvittää usein rationaalilausekkeen merkki. Tämä onnistuu parhaiten selvittämällä osoittajan ja nimittäjän merkit erikseen ja päättelemällä merkki merkkikaaviosta.

Esim.

$$\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+2} \leq 2$$

Ratkaisu:

Siirretään kaikki termit samalle puolelle.

$$\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+2} - 2 \leq 0$$

ei määritelty kun $x = -2$ tai $x = 2$

$$\frac{x+2}{(x-2)(x+2)} - \frac{2(x-2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} \leq 0$$

$$\frac{x+2-2x+4-2x^2+8}{x^2-4} \leq 0$$

$$\frac{-2x^2-x+14}{x^2-4} \leq 0$$

Osoittajan nollakohdat:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{113}}{2}$$

Juurten likiarvot 4,8 ja -5,8

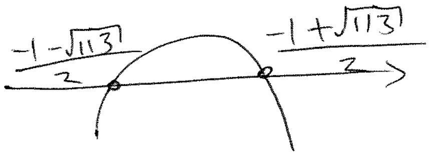
Nimittäjän nollakohdat:

$$x = \pm 2$$

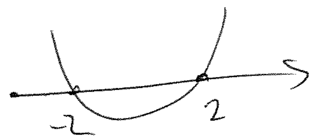
Merkkikaavio:

	$\frac{-1-\sqrt{113}}{2}$		-2		$+2$		$\frac{-1+\sqrt{113}}{2}$	
$-2x^2-x+14$	$-$		$+$		$+$		$+$		$-$
x^2-4	$+$		$+$		$-$		$+$		$+$
$\frac{-2x-x+14}{x^2-4}$	$-$		$+$		$-$		$+$		$-$

$-2x^2-x+14$



x^2-4



ei määritelty kun $x = \pm 2$

V: $x \leq \frac{-1-\sqrt{113}}{2}$, $-2 < x < 2$ ja

$x \geq \frac{-1+\sqrt{113}}{2}$

2.6. Itseisarvoyhtälö ja epäyhtälö

Itseisarvoyhtälöä (tai epäyhtälöä) ratkaistaessa kannattaa ensin poistaa itseisarvomerkit. Tämä voidaan aina tehdä määritelmän avulla, mutta joskus ongelma helpottuu käyttäen itseisarvon tunnettuja ominaisuuksia.

Esim. Ratkaise yhtälö $|x+1| = 3x-1$.

Koska $|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{kun } x+1 \geq 0 \\ -x-1, & \text{kun } x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1, & \text{kun } x \geq -1 \\ -x-1, & \text{kun } x < -1 \end{cases}$

tarkastelu kannattaa jakaa kahteen osaan.

Kun $x \geq -1$ saadaan yhtälö $x+1 = 3x-1$, jonka ratkaisu on $x=1$. Tämä ~~on~~ ratkaisu kuuluu tarkasteluvälille $x \geq 1$, joten se on ratkaisu (tarkista vaikka).

Kun $x < -1$ saadaan yhtälö $-x-1 = 3x-1$, jonka ratkaisu on $x=0$, mutta tämä ei kuulu tarkasteluvälille $x < -1$, joten se ei ole alkuperäisen yhtälön ratkaisu.

V: $x = 1$.

Myös seuraavia ominaisuuksia voi hyödyntää itseisarvo yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaisemisessa.

$\lvert a \rvert = b$	täsmälleen silloin kun	$a = \pm b$ ja $b \geq 0$
$\lvert a \rvert \leq b$	— || —	$-b \leq a \leq b$
$\lvert a \rvert \geq b$	— || —	$a < -b$ tai $a > b$
$\lvert a \rvert = \lvert b \rvert$	— || —	$a = \pm b$
$\lvert a \rvert \leq \lvert b \rvert$	— || —	$a^2 \leq b^2$

Esim. Ratkaise

a) $|x^3 - 5| = -99$ ei toteudu millään x:n arvolla

b) $|x^2 + 6x| = 2$
Yhtälö toteutuu täsmälleen silloin, kun $x^2 + 6x - 2 = 0$ tai $x^2 + 6x + 2 = 0$ eli kun $x = -3 \pm \sqrt{11}$ tai $x = -3 \pm \sqrt{7}$

c)

$|x+1| \geq |2x-1|$

Yhtälö toteutuu kun $(x+1)^2 \geq (2x-1)^2$ eli kun

$x^2+2x+1 \geq 4x^2 - 4x + 1$ eli $3x^2 - 6x \leq 0$.

Tämän voi ratkaista aiemmin esitetyin keinoin.

2.7. Neliöjuuriyhtälö ja -epäyhtälö

Neliöjuuriyhtälöitä (ja epäyhtälöitä) ratkaistaessa pyritään poistamaan neliöjuuret potenssiin korotuksilla. Ongelma on, että potenssiin korotettu yhtälö ole aina yhtäpitävä alkuperäisen kanssa. Esimerkiksi yhtälön $\sqrt{x-2} = x-4$ korottaminen toiseen potenssiin antaa yhtälön $x-2 = (x-4)^2$, joka toteutuu, kun $x=6$ tai kun $x=3$. Näistä ratkaisuista vain ensimmäinen toteuttaa alkuperäisen yhtälön. Syy on, että $a^2=b^2$ täsmälleen silloin kun $a=b$ tai $a=-b$. $x=3$ toteuttaa yhtälön $\sqrt{x-2} = -(x-4)$.

Ongelma korjautuu, kun tarkastellaan ratkaisuja, joille yhtälön molemmat puolet ovat saman merkkiset. Edellä tämä n.s. neliöönkorotusehto on $x-4 \geq 0$. Em. ratkaisuista vain $x=6$ toteuttaa tämän ehdon.

Esim. Ratkaise $-\sqrt{x+1} + x = 5$

Yhtälö on määritelty, kun $x+1 \geq 0$ eli $x \geq -1$.

$-\sqrt{x+1} + x = 5 \quad | -x$

$-\sqrt{x+1} = 5 - x \quad | \cdot(-1)$

$\sqrt{x+1} = x - 5$

Neliöönkorotusehto: Yhtälön molemmat puolet ovat positiivisia kun $x-5 \geq 0$ eli $x \geq 5$.

(20) Korotetaan yhtälö puolittain toiseen potenssiin

$$(\sqrt{x+1})^2 = (x-5)^2$$

$\vdots$

$x^2 - 11x + 24 = 0$ eli $x = 8$ tai $x = 3$.

Näistä neliöönkorotusehdon toteuttaa vain $x = 8$

V: $x = 8$

Epäyhtälöitä ratkaistaessa siirretään juurilauseke epäyhtälön toiselle ja muut termit toiselle puolelle. Tämän jälkeen selvitetään neliöönkorotusehto. Neliöönkorotusehdon toteuttavissa pisteissä epäyhtälö voidaan korottaa toiseen potenssiin siten, että ey.-merkin suunta säilyy. Muut pisteet tarkastellaan erikseen kuten alla olevassa esimerkissä.

Esim. Ratkaise $\sqrt{x-1} > x-2$.

Neliöjuuri on määritelty, kun $x \geq 1$.

Neliöön korotusehto $x \geq 2$.

1) Kun $x < 2$ yhtälö on identtisesti tosi, sillä neliöjuuri on ei-negatiivinen luku.

2) Kun $x \geq 2$ neliöönkorotusehto on voimassa ja saadaan yhtälö

$$x - 1 > (x-2)^2.$$

Poistamalla sulut saadaan $x^2 - 4x + 4 < 0$.

Tämä epäyhtälö toteutuu, kun $\frac{5-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{13}}{2}$.

Koska oltava $x \geq 2$, tällä välillä yhtälön toteutuu kun

$$2 \leq x < \frac{5+\sqrt{13}}{2}.$$

V: Yhtälö toteutuu, kun $x < \frac{5+\sqrt{13}}{2}$.