Mat. Propedeuttinen kurssi Demo 2

1. a) $3(x-3)-5x=1$

$3x-9-5x=+1 \quad |+9$

$-2x = 10 \quad |:(-2)$

$x=-5.$

b)

$\frac{3x-1}{2} > \frac{2x-1}{3} \quad |\cdot 6$

$9x-3 > 4x-2 \quad |-4x+3$

$5x>1 \quad |:5$

$x>\frac{1}{5}$

2.

a) $5x^2-7x+2=0$

2. asteen yhtälön ratkaisukaavan mukaan

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49-4\cdot5\cdot2}}{10}=\frac{7\pm\sqrt{9}}{10}=\frac{7\pm3}{10}$$

eli ratkaisut ovat $x=1$ ja $x=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

b) $-x^2+3x+3\leq 0$

Ratkaistaan ensin vastaava yhtälön $-x^2+3x+3=0$.

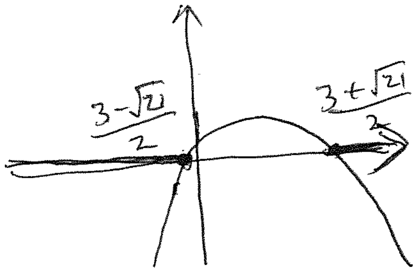
2. ast. yht. ratk. kaavan mukaan

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+3\cdot4}}{-2}=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{-2}$$

Yhtälön ratkaisut ovat siis $x_1 = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$ ja $x_2 = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$.

Polynomin $-x^2+3x+3$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten nollakohtien välissä se saa positiivisia arvoja.

Ratkaisu on siis $x \leq \frac{3-\sqrt{21}}{2}$ tai $x \geq \frac{3+\sqrt{21}}{2}$



3. Yhtälön $3x^2-x+a=0$ ratkaisujen määrä nähdään diskriminantista $D=1-12a$.

a) Jos $D=0$ on vain 1 ratkaisu

$1-12a=0$

$a=\frac{1}{12}$

b) Jos $D>0$ on 2 ratkaisua.

$1-12a>0$

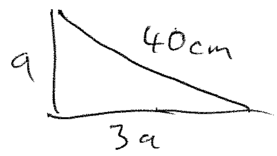
$\frac{1}{12}>a$

c) Ratkaisuja ei ole jos $D<0$ eli

$1-12a<0 \Leftrightarrow \frac{1}{12}<a$.

4. Olkoon a lyhyemmän kateetin pituus (senttimetreissä).

Pythagoras:



$$a^2 + (3a)^2 = 40^2$$

$$10a^2 = 1600$$

$$a^2 = 160$$

$$a = \pm\sqrt{160} = \pm 4\sqrt{10}.$$

Pituus on positiivinen, joten $a = 4\sqrt{10}$ cm ja $3a = 12\sqrt{10}$ cm.

Kateettien pituudet $a \approx 13$ cm $3a \approx 38$ cm.

5.

a) $2x^2 - 6x + 2 = -2$

$$2x^2 - 6x + 4 = 0$$

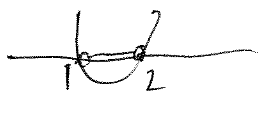
2. ast. yht. ratk. kaavan mukaan

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 4 \cdot 2}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{6 \pm 2}{4}$$

Ratkaisu $x_1 = 2$ $x_2 = 1$

b) x-akselin leikkauspisteissä y-koordinaatti on 0.
~~Ke~~ Tällöin x-koordinaatit saadaan yhtälöstä $2x^2 - 6x + 4 = 0$.
Kuten a)-kohdassakin juuret ovat $x_1 = 2$, $x_2 = 1$
ja leikkauspisteet $(1,0)$ ja $(2,0)$.

c) Edellä on ratkaistu nollakohdat. $2x^2 - 6x + 4$:n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten negatiivisia arvoja saadaan vain nollakohtien välissä eli $1 < x < 2$.



6. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 + 8x + 17$

a) $f(x) = x^2 + 8x + 17 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 16 + 1$

$= (x+4)^2 + 1.$

b) Koska luvun neliö on aina vähintään 0 on $(x+4)^2 \geq 0$

Tällöin $f(x) = (x+4)^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1$, joten $f(x)$:n pienin arvo on 1. (Huomaa, että $f(-4) = 1$)

Lisäksi kun x kasvaa $f(x)$ saa mielivaltaisen suuria arvoja, joten arvojoukko on $[1, \infty)$.

7. Kivi osuu maahan, kun $h(x) = 0$.

Huom! Tehtävänanto epäselvä, sillä heittäjän paikkaa ei kerrottu. Ratkaisussa on oletettu, että heittäjä on pisteessä $x = 0$.

Saadaan yhtälö $x - \frac{1}{10}x^2 + 1,8 = 0$

2. ast. yht. ratk

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot \frac{1}{10} \cdot 1,8}}{-\frac{2}{10}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1,72}}{-\frac{1}{5}}$$

$$= 5\left(1 \mp \sqrt{1,72}\right) \qquad x_1 = 5\left(1 - \sqrt{1,72}\right) \approx -1,56\ldots \text{m}$$

$$x_2 = 5\left(1 + \sqrt{1,72}\right) \approx 11,55\ldots \text{m}$$

Heitettiin positiivisen x-akselin suuntaan, joten x_2 ainoa mielekäs ratkaisu.

V: 12 m päässä heittäjästä