Demo 10 ratkaisut

1\.

a) $\int_3^7 2x^3\,dx = 2\int_3^7 x^3\,dx = 2\Big/_3^7 \frac{1}{4}x^4$

$= 2\left(\frac{1}{4}7^4 - \frac{1}{4}3^4\right) = \frac{1}{2}(2401-81) = 1160$

sillä $\frac{1}{4}x^4$ on x^3:n integraalifunktio.

b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\cos x + \sin(2x)\,dx = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}\cdot 2\sin(2x)\,dx$

$= 2\Big/_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\sin(2x) = 2\Big/_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x + \frac{1}{2}\Big/_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos(2x)$

integroidaan yhdistetyn funktion integrointisäännöllä

$= 2(0-1) + \frac{1}{2}(-\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} - (-\underbrace{\cos\pi}_{+1})) = -2 - \frac{1}{2}\cdot 2 = -3$

c) $\int_0^5 (-t+5)\,dt = -\int_0^5 t\,dt + \int_0^5 5\,dt = -\Big/_0^5 \frac{1}{2}t^2 + \Big/_0^5 5t$

$= -\frac{25}{2} + 25 = \frac{25}{2}$

2. a) $\int_1^e \frac{2x+3}{x}\,dx = \int_1^e 2\,dx + \int_1^e \frac{3}{x}\,dx = \Big/_1^e (2x) + \Big/_1^e 3\ln|x|$

$= 2e - 2 + 3\underbrace{\ln e}_{=1} - 3\underbrace{\ln 1}_{=0} = 2e - 2 + 3 = 2e + 1.$

b)

Integraalifunktio laskettiin jo kohdassa 1 b)

$\int_0^{\pi} 2\cos x + \sin(2x)\,dx = \Big/_0^{\pi} \left(2\sin x - \frac{1}{2}\cos(2x)\right)$

$= \Big(2\underbrace{\sin \pi}_{=0} - \frac{1}{2}\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1}\Big) - \Big(2\underbrace{\sin 0}_{=0} - \frac{1}{2}\underbrace{\cos 0}_{1}\Big)$

$= -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

3.

a) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos x \,dx = ?$

Valitaan $f'(x) = \cos x$ $f(x) = \sin x$

ja $g'(x) = x.$

Tällöin $g'(f(x)) = \sin x$ ja

$g(x) = \frac{1}{2}x^2.$

Nyt $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{g'(f(x))}\, dx = \Big/_{0}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{1}{2}(\sin x)^2}_{g(f(x))} = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^2}_{=1} - \frac{1}{2}\underbrace{(\sin 0)^2}_{=0}$

$= \frac{1}{2}.$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{\sin x}_{\cancel{f(x)}} \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{g'(f(x))}\, dx$

Valitaan

$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x$

$g'(x) = \frac{1}{x}$. Tällöin $g'(f(x)) = \frac{1}{\cos x}$.

Tällöin $g(x) = \ln|x|$ on ok.

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \frac{1}{\cos x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-1)\cdot(-1) \sin x \frac{1}{\cos x}\, dx$

$\displaystyle = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{-\sin x}_{f'(x)} \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{g'(f(x))}\, dx = -\Big/_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln|\cos x|$

$= -\Big(\ln \underbrace{\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} - \ln \underbrace{|\cos 0|}_{=1}\Big)$

$= -\Big(\ln\frac{1}{\sqrt{2}} - \underbrace{\ln 1}_{=0}\Big) = -\ln 2^{-\frac{1}{2}}$

$= -\left(-\frac{1}{2}\right)\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2.$

4. Käyrän $y = x^4 - 4x^2$ ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala?

Etsitään ~~katy~~ polynomin $x^4 - 4x^2$ nollakohdat:

$$x^4 - 4x^2 = 0$$
$$x^2(x^2-4) = 0$$

Yhtälö toteutuu, kun $x=0$ tai $x^2-4=0$

eli $x=0$ tai $x^2=4$ eli $x=0$ tai $x=2$ tai $x=-2$.

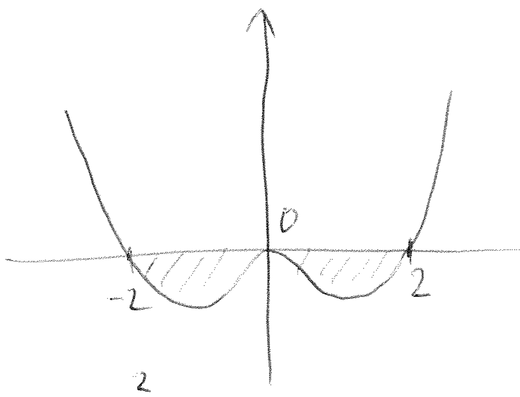
~~Koska~~ Sijoittamalla $x=1$ saadaan

$$y = 1^4 - 4\cdot 1^2 = -3$$

ja sijoittamalla $x=-1$ saadaan

$$y = (-1)^4 - 4\cdot(-1)^2 = -3, \quad \text{joten}$$

$x^4 - 4x^2$ on negatiivinen tai nolla koko välillä $[-2, 2]$ saadaan pinta-ala integroimalla funktiota $4x^2 - x^4$ välin $[-2, 2]$ yli.



$$A = \int_{-2}^{2} (4x^2 - x^4)\,dx = 4\int_{-2}^{2} x^2\,dx - \int_{-2}^{2} x^4\,dx$$

$$= 4 \cdot \Big/_{-2}^{2} \tfrac{1}{3}x^3 - \Big/_{-2}^{2} \tfrac{1}{5}x^5$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \underbrace{2^3}_{=8} - \frac{1}{3}\underbrace{(-2)^3}_{=-8}\right) - \frac{1}{5}\left(\underbrace{2^5}_{=32} - \underbrace{(-2)^5}_{=-32}\right)$$

$$= 4\left(\frac{8}{3} + \frac{8}{3}\right) - \frac{1}{5}(32+32) = \frac{64}{3} - \frac{64}{5}$$

$$= 64\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 64\left(\frac{5-3}{15}\right) = 64 \cdot \frac{2}{15} = \frac{128}{15}.$$

5. a)

~~Lasket~~

~~Tarkistetaan~~

Tarkistetaan onko $f(x)$:n ja $g(x)$:n kuvaajilla leikkauspisteitä välillä $[0,4]$.

$$f(x) = g(x)$$

$$-x^2 - 2 = x^2 \quad | + x^2$$

$$-2 = 2x^2$$

$x^2 = -1$. Tällä yhtälöllä ei ole ratkaisuja, joten leikkauspisteitä ei ole.

Lisäksi ~~$f(x) - g(x)$~~ $g(x) - f(x) = x^2 - (-x^2 - 2) = 2x^2 + 2$

on positiivinen. eli $g(x) \geq f(x)$.

Kuvaajien väliin jäävän alueen pinta-ala saadaan integraalista

$$A = \int_0^4 g(x) - f(x)\,dx = \int_0^4 2x^2 + 2\,dx = \Big/_0^4 \left(\frac{2}{3}x^3 + 2x\right)$$

$$= \frac{2}{3}4^3 + 2 \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot 0^3 + 2 \cdot 0 = \frac{128}{3} + 8 = 50 + \frac{2}{3}$$

b) Tarkistetaan onko f:n ja g:n kuvaajilla leikkauspisteitä tarkasteluvälillä $[0,4]$.

$$f(x) = g(x)$$

$$x - 1 = -2x + \sqrt{2} \quad | +2x+1$$

$$3x = 1 + \sqrt{2} \quad | :3$$

$$x = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$$

~~jotan~~

ja tämä luku todella kuuluu välille $[0,4]$

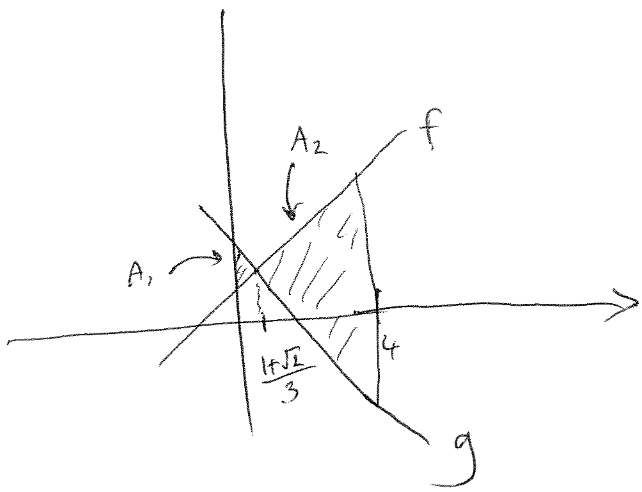
$$\left(0 \le \frac{1+\sqrt{2}}{3} \le \frac{3}{3} = 1\right)$$
$$\approx 0{,}8$$

~~Kokeilemalla~~

Selvitetään $f(x)-g(x)$:n merkki väleillä $\left[0, \frac{1+\sqrt{2}}{3}\right]$ ja $\left[\frac{1+\sqrt{2}}{3}, 4\right]$ sijoittamalla $x=0$ ja $x=4$

$$f(0) - g(0) = -1 - \sqrt{2} < 0 \quad \text{ja}$$

$$f(4) - g(4) = 4 - 1 - (-2 \cdot 4 + \sqrt{2}) = 3 + 8 - \sqrt{2} = 11 - \sqrt{2} > 0.$$



$$A_1 = \int_0^{\frac{1+\sqrt{2}}{3}} g(x) - f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1+\sqrt{2}}{3}} \left(-2x + \sqrt{2} - x + 1\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{1+\sqrt{2}}{3}} -3x + \sqrt{2} + 1\,dx = \Big/_0^{\frac{1+\sqrt{2}}{3}} \left(-\frac{3}{2}x^2 + (\sqrt{2}+1)x\right)$$

$$= -\frac{3}{2}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^2 + (\sqrt{2}+1)\,\frac{1+\sqrt{2}}{3}$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3^2}(1+\sqrt{2})^2 + \frac{(1+\sqrt{2})^2}{3} = -\frac{1}{2}\frac{(1+\sqrt{2})^2}{3} + \frac{(1+\sqrt{2})^2}{3}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}+1\right)\frac{(1+\sqrt{2})^2}{3} = \frac{1}{2}\frac{(1+\sqrt{2})^2}{3}.$$

$$A_2 = \int_{\frac{1+\sqrt{2}}{3}}^{4} f(x)-g(x)\,dx = \int_{\frac{1+\sqrt{2}}{3}}^{4} 3x-(\sqrt{2}+1)\,dx = \Big/_{\frac{1+\sqrt{2}}{3}}^{4}\left(\frac{3}{2}x^2-(\sqrt{2}+1)x\right)$$

$$= \frac{3}{2}4^2-(\sqrt{2}+1)4-\left(\frac{3}{2}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^2-(\sqrt{2}+1)\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\cdot 16-(\sqrt{2}+1)4-\left(\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{(1+\sqrt{2})^2}{\cancel{3}\cdot 3}-\frac{(1+\sqrt{2})^2}{3}\right)$$

$$= 24-4\sqrt{2}-4-\left(-\frac{1}{2}\frac{(1+\sqrt{2})^2}{3}\right)$$

$$= 20-4\sqrt{2}+\frac{1}{2}\frac{(1+\sqrt{2})^2}{3}$$

$$A_1+A_2 = \frac{1}{2}\frac{(1+\sqrt{2})^2}{3}+20-4\sqrt{2}+\frac{1}{2}\frac{(1+\sqrt{2})^2}{3}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{2})^2}{3}+20-4\sqrt{2} = \frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{2}{3}+20-4\sqrt{2}$$

$$= 21-\frac{10}{3}\sqrt{2}.$$

6) Koska $\frac{1}{x}$ on positiivinen, kun x on positiivinen, saadaan funktion $\frac{1}{x}$ kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala on

$$A = \int_a^{3a}\frac{1}{x}\,dx = \Big/_a^{3a}\ln|x| = \ln|3a|-\ln|a| = \ln(3a)-\ln(a) \text{ koska } a>0.$$

~~a>0~~ Logaritmin laskusääntöjen mukaan

$$\ln(3a)-\ln a = \ln\left(\frac{3a}{a}\right) = \ln 3.$$ Tämä ei riipu a:sta.

7. Etsitään taas f:n ja g:n kuvaajien leikkauspisteet.

$$f(x) = g(x)$$

kun $x \leq 0$

$$1 = -x$$

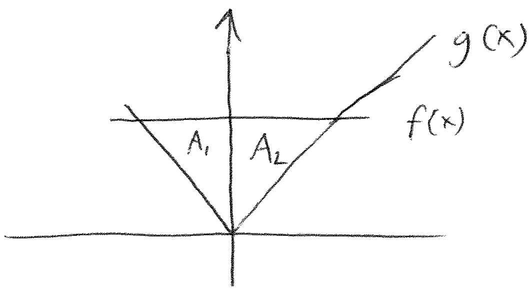
$$x = -1$$

ja

kun $x > 0$

$$1 = x$$

Siis ~~kuvaajat~~ kuvaajat leikkaavat kun $x = -1$ tai $x = 1$.



Jaetaan integroimisväli $[-1, 1]$ kahteen osaan

$[-1, 0]$ ja $[0, 1]$.

Molemmilla väleillä $g(x) \leq 1 = f(x)$ eli

$$A_1 = \int_{-1}^{0} f(x) - g(x)\,dx = \int_{-1}^{0} 1 - (-x)\,dx = \int_{-1}^{0} 1 + x\,dx = \Big/_{-1}^{0} \left(x + \tfrac{1}{2}x^2\right)$$

$$= 0 + \tfrac{1}{2} \cdot 0 - \left(-1 + \tfrac{1}{2}(-1)^2\right) = -\left(-1 + \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} f(x) - g(x)\,dx = \int_{0}^{1} 1 - x\,dx = \Big/_{0}^{1} \left(x - \tfrac{1}{2}x^2\right) = 1 - \tfrac{1}{2} \cdot 1^2 - (0 - 0)$$

$$= \frac{1}{2}$$

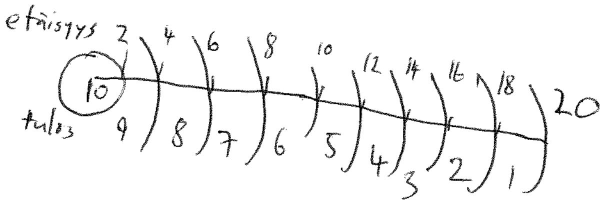
$$A_1 + A_2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1.$$

8.

a) heiton tulos on 7 jos tikka osuu välille $[6,8]$.

b) Heiton tulos on vähintään 9 jos tikka osuu välille $[0,4]$

c) Tikka osuu tauluun jos se osuu välille $[0,20]$.



Funktion $f(x)=\frac{3}{16000}(400-x^2)$ eräs integraalifunktio on $F(x)=\frac{3}{16000}(400x-\frac{1}{3}x^3)$,

sillä $\int f(x)\,dx=\frac{3}{16000}(400x-\frac{1}{3}x^3)+C$

a) $\int_6^8 f(x)\,dx=\Big/_6^8 F(x)=\frac{3}{16000}(400\cdot 8-\frac{1}{3}\cdot 8^3)-\frac{3}{16000}(400\cdot 6-\frac{1}{3}\cdot 6^3)$

$=\frac{3}{16000}(400\cdot 8-400\cdot 6)-\frac{3}{16000}(-\frac{1}{3}8^3+\frac{1}{3}6^3)=\frac{263}{2000}$

$\approx 0{,}13$

b) $\int_0^4 f(x)\,dx=\Big/_0^4 F(x)=\frac{3}{16000}(400\cdot 4-\frac{1}{3}\cdot 4^3)=\ldots=\frac{37}{125}\approx 0{,}30$

c) $\int_0^{20} f(x)\,dx=\Big/_0^{20} F(x)=\frac{3}{16000}(400\cdot 20-\frac{1}{3}\cdot(20)^3)-(0-0)$

$=\frac{3}{16000}(8000-\frac{1}{3}\cdot 8000)=\frac{3}{16000}\cdot\frac{2}{3}\cdot 8000=1.$