

MATY010 Demo 3

1. a) $x^4 + 9x^2 - 112 = 0$

Merkitään $y = x^2$, jolloin saadaan 2. asteen yhtälö

$$y^2 + 9y - 112 = 0$$

$$a = 1, b = 9, c = -112$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-112)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 448}}{2}$$

$$= \frac{-9 \pm \sqrt{529}}{2}$$

$$= \frac{-9 \pm 23}{2} \stackrel{(+)}{=} \frac{-9 + 23}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$\stackrel{(-)}{=} \frac{-9 - 23}{2} = \frac{-32}{2} = -16$$

Koska $y = x^2$, $y = -16$ ei ole mahdollinen tapaus.

Täten $x^2 = 7$, eli $x = \pm\sqrt{7}$.

Vastaus: $x = \pm\sqrt{7}$.

$$16) (x^2 + 3x - 4)(x - 11) = 0.$$

Tulon nollasäännön nojalla tulo on nolla täsmälleen silloin, kun jokin sen tekijöistä on nolla.

Siis, $(x^2 + 3x - 4)(x - 11) = 0$ täsmälleen silloin, kun

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \quad \text{tai} \quad x - 11 = 0$$

$$a=1, b=3, c=-4 \quad x=11$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} \stackrel{(+)}{=} \frac{-3 + 5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\stackrel{(-)}{=} \frac{-3 - 5}{2} = \frac{-8}{2} = -2.$$

Vastaus: $x = -2$, $x = 1$ tai $x = 11$.

$$2a) \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

Lauseke on siis määritelty kun $x \neq \pm 1$.

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2}{x^2-1} \quad | \cdot (x^2-1) = (x-1)(x+1)$$

$$x+1 + 2(x-1) = 2$$

$$x+1+2x-2=2$$

$$3x-1=2 \quad | +1$$

$$3x=3 \quad | :3$$

$$x=1.$$

Koska yhtälöä ei ole määritelty kun $x=1$ (nimitettiin $x-1!$), ei yhtälöllä ole ratkaisuja.

Vastaus: Ei ratkaisuja.

$$b) \frac{(x-1)^2}{2x^2-3} \leq 1 \quad | -1$$

$$\frac{(x-1)^2}{2x^2-3} - 1 \leq 0$$

$$\frac{(x-1)^2}{2x^2-3} - \frac{2x^2-3}{2x^2-3} \leq 0$$

$$\frac{x^2-2x+1-2x^2+3}{2x^2-3} \leq 0$$

$$\frac{-x^2-2x+4}{2x^2-3} \leq 0$$

Käytetään osamäärän merkkisääntöä:

Rationaalilauseke $\frac{P(x)}{Q(x)}$ on negatiivinen,
kun $P(x)$ ja $Q(x)$ ovat erimerkkiset. (Luentomoniste 2.5.2)

Polynomin $-x^2 - 2x + 4$ kulku:

Nollakohdat:

$$a = -1, b = -2, c = 4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{-2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{20}}{-2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 \cdot 5}}{-2} = \frac{2 \pm \sqrt{4} \sqrt{5}}{-2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{-2}$$

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{-1} \quad \frac{-1 + \sqrt{5}}{-1} = -1 \pm \sqrt{5}$$

$$-x^2 - 2x + 4: \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array}$$

Merkkien päätelyssä käytettiin tietoa siitä, että $-x^2 - 2x + 4$ on alaspäin aukeava paraabeli.

Polynomin $2x^2 - 3$ kulku:

Nollakohdat: $2x^2 - 3 = 0 \quad | +3$

$$2x^2 = 3 \quad |:2$$

$$x^2 = \frac{3}{2}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$2x^2 - 3 \quad \begin{array}{c} + + + \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{array} \quad \begin{array}{c} - - - - - \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \end{array} \quad \begin{array}{c} + + + \end{array}$$

Rationaalilausekkeen merkkikaaviota varten tarvitaan nimittäjä- ja osoittajapolynomien juurten suuruusjärjestys: (Joko laskimella tai katso liite (viimeinen sivu))

$$-1 - \sqrt{5} < -\sqrt{\frac{3}{2}} < \sqrt{\frac{3}{2}} < -1 + \sqrt{5}$$

$-x^2 - 2x + 4$	$-1 - \sqrt{5}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-1 + \sqrt{5}$
$2x^2 - 3$	+	+	-	+
$-x^2 - 2x + 4$	-	+	-	+
$2x^2 - 3$				

Eli $\frac{-x^2 - 2x + 4}{2x^2 - 3} < 0$, kun $x < -1 - \sqrt{5}$,
 $-\sqrt{\frac{3}{2}} < x < \sqrt{\frac{3}{2}}$,
 $x > -1 + \sqrt{5}$.

Täydentämällä loppu-oset joissa $\frac{-x^2 - 2x + 4}{2x^2 - 3} = 0$,

eli $-x^2 - 2x + 4 = 0$ ($x \neq \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$) saadaan

$\frac{-x^2 - 2x + 4}{2x^2 - 3} \leq 0$ kun $x \leq -1 - \sqrt{5}$,
 $-\sqrt{\frac{3}{2}} < x < \sqrt{\frac{3}{2}}$,
 $x \geq -1 + \sqrt{5}$.

Vastaus: $x \leq -1 - \sqrt{5}$ tai $-\sqrt{\frac{3}{2}} < x < \sqrt{\frac{3}{2}}$ tai $x \geq -1 + \sqrt{5}$.

$$3a) |2x - 3| = \frac{x+16}{3}$$

$|a| = b$ täsmälleen silloin kun $a = \pm b$ ja $b \geq 0$.

Tapaus

" $a = b$ "

$$2x - 3 = \frac{x+16}{3} \quad | \cdot 3$$

$$3(2x - 3) = x + 16$$

$$6x - 9 = x + 16 \quad | -x + 9$$

$$5x = 25$$

$$x = 5, \quad \text{OK, koska } \frac{5+16}{3} = \frac{21}{3} = 7 \geq 0$$

Tapaus

" $a = -b$ "

$$2x - 3 = -\frac{x+16}{3} \quad | \cdot 3$$

$$6x - 9 = -(x + 16)$$

$$6x - 9 = -x - 16 \quad | +x + 9$$

$$7x = -7$$

$$x = -1, \quad \text{OK, koska } \frac{-1+16}{3} = \frac{15}{3} = 5 \geq 0.$$

Vastaus: $x = -1$ tai $x = 5$.

$$36) |2x-3| < |x+6| \quad | \quad ()^2$$

Epäyhtälön molemmat puolet ovat positiivisia, joten neliöiden korotus on sallittua.

$$|2x-3|^2 < |x+6|^2$$

$$(2x-3)^2 < (x+6)^2$$

$$4x^2 - 12x + 9 < x^2 + 12x + 36 \quad | -x^2 - 12x - 36$$

$$3x^2 - 24x - 27 < 0 \quad | :3$$

$$x^2 - 8x - 9 < 0$$

Toisen asteen polynomin nollakohdat:

$$a=1, \quad b=-8 \quad c=-9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2}$$

$$= \frac{8 \pm 10}{2} \quad \begin{matrix} (+) & \frac{18}{2} = 9 \\ (-) & -\frac{2}{2} = -1. \end{matrix}$$

Kulkukaavio käyttäen hyväksi tietoa siitä, että funktion $x^2 - 8x - 9$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli:

$$x^2 - 8x - 9 \quad \begin{array}{c} + + + \\ -1 \end{array} \quad \begin{array}{c} - - - \\ 9 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Vastaus:} \\ -1 < x < 9. \end{array} \right.$$

4.) Tontti: 30 000€

Rakennuskustannukset: 1600 €/m².

Rakennuksen pinta-ala x m²

Rakennuksen hinta $(30\,000 + 1600x)$ €

Rakennuksen neliöhinta $\frac{(30\,000 + 1600x)}{x}$ €/m²

$$\text{Mille } x \quad \frac{30\,000}{x} + 1600 < 1900 ?$$

$$\frac{30\,000}{x} + 1600 < 1900 \quad | -1600$$

$$\frac{30\,000}{x} - 300 < 0 \quad | : 300$$

$$\frac{100}{x} - 1 < 0$$

$$\frac{100}{x} - \frac{x}{x} < 0$$

$$\frac{100 - x}{x} < 0 \quad | \cdot x, \quad x > 0 \quad \text{koska pinta-ala on aina positiivinen}$$

$$100 - x < 0$$

$$x > 100$$

Vastaus: Rakennuksen pinta-ala täytyy olla yli 100 m²

$$5.) \quad x - \sqrt{43 - 3x} = 11 \quad \cancel{+} + \sqrt{43 - 3x}$$

$$x = 11 + \sqrt{43 - 3x} \quad \cancel{-} - 11$$

$$x - 11 = \sqrt{43 - 3x} \quad | ()^2, \quad x \geq 11$$

$x - 11$ on positiivinen, kun $x \geq 11$. Täten kaikille ratkaisuille täytyy päteä $x \geq 11$. (Neliöjuurlauseke on määritelty, kun

$$(x - 11)^2 = 43 - 3x$$

$43 - 3x \geq 0$, eli $x \leq \frac{43}{3} = 14 + \frac{1}{3}$)

$$x^2 - 22x + 121 = 43 - 3x \quad | +3x - 43$$

$$x^2 - 19x + 78 = 0$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla:

$$a = 1, \quad b = -19, \quad c = 78$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{19 \pm \sqrt{(-19)^2 - 4 \cdot 78}}{2}$$

$$= \frac{19 \pm \sqrt{361 - 312}}{2}$$

$$= \frac{19 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$= \frac{19 \pm 7}{2} \quad \begin{matrix} (+) \frac{26}{2} = 13 \\ (-) \frac{12}{2} = 6 \end{matrix}$$

Näistä $x = 6$ ei kelpaa ratkaisuksi aiempien päättelyjen nojalla (ratkaisuille täytyy päteä $x \geq 11$) ja $x \leq 14 + \frac{1}{3}$)

Vastaus: $x = 13$.

$$\sqrt{x^2 + 2} < x + 3.$$

Vasen puoli on määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Oikea puoli on negatiivinen, kun $x < -3$. Erityisesti siis kaikilla $x < -3$ epäyhtälö ei toteudu. Kun $x \geq -3$, voidaan korottaa puolittain neliön:

$$x^2 + 2 < (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9 \quad \cancel{x^2 - 2}$$

$$0 < 6x + 7 \neq -7$$

$$6x > -7 \quad \therefore 6$$

$$x > -\frac{7}{6}$$

Epäyhtälö toteutuu siis kaikilla
 $x \geq -3$, jolle pätee saatu ehto $x \geq -\frac{7}{6}$.
 Koska $-3 < -\frac{7}{6}$, saadaan
 $\frac{7}{6}$

Vastaus: $x > -\frac{7}{6}$.

7. I) Suora, joka kulkee pisteiden $(2, 4)$ ja $(5, 1)$ kautta:

Käytetään suoran yhtälöä

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

kyseisen suoran kulmakertoimen määrittämiseen:

$$(x_0, y_0) = (2, 4), (x_1, y_1) = (5, 1)$$

$$1 - 4 = k(5 - 2)$$

$$-3 = 3k \quad | :3$$

$$k = -1.$$

Täten sijoittamalla tämä em. suoran yhtälöön saadaan

$$y - 4 = -1(x - 2)$$

$$y - 4 = -x + 2 \quad | +4$$

$$y = -x + 6.$$

Vastaus (kohtaan I): Suoran yhtälö on
 $y = -x + 6.$

II) Suora, joka on suoraa $y = -x + 6$ vastaan kohtisuorassa ja kulkee pisteen $(5, 5)$ kautta:

Olkoon tämän suoran yhtälö $y = lx + a$. Em. suorat ovat kohtisuorassa, jos niiden kulmakertoimien tulo on -1 , eli halutaan, että $-1 \cdot l = -1 \Rightarrow l = 1$, j. s. $l = 1$, ja haetun suoran yhtälö on muotoa $y = x + a$. Ratkaistaan a sijoittamalla $(x, y) = (5, 5)$

$$5 = 5 + a \quad \&-5$$

$$0 = a$$

$$a = 0.$$

Vastaus (II): Toisen suoran yhtälö on $y = x$.

Liite: 26), merkien päättely ilman laskinta:

Osoitetaan malliksi $\sqrt{\frac{3}{2}} < -1 + \sqrt{5}$.

Huomataan aluksi $\sqrt{5} > 1$. Täten $-1 + \sqrt{5} > 0$.

Täten neliöntekorotusehdon nojalla

$$\frac{3}{2} \text{ ja } (\sqrt{5} - 1)^2 = 1 - 2\sqrt{5} + 5 = 6 - 2\sqrt{5}$$

ovat samassa järjestyksessä kuin $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ja $\sqrt{5} - 1$.

$\frac{3}{2}$ ja $6 - 2\sqrt{5}$ taas ovat samassa järjestyksessä kuin

$$2\sqrt{5} \text{ ja } 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}. \text{ Käyttämällä neliöntekorotus-}$$

ehtoa jälleen kerran, päädyimme tutkimaan luvun

$$4.5 = 20 \text{ ja } \frac{9^2}{2^2} = \frac{81}{4} = 20 + \frac{1}{4}, \text{ joiden välinen}$$

järjestys onkin sitten jo selvillä.