Matematiikan prop. kurssi Demo 4

1.

a)

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 2x-y+3=0 \end{cases}$$

Kerrotaan 2. yhtälö luvulla -1

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -2x+y-3=0 \end{cases}$$

~~vähennet~~ lasketaan yhtälöt

$$4y=4$$
$$y=1$$

Sijoitetaan tämä 2. yhtälöön ja saadaan

$$2x-1+3=0$$
$$x=-1$$

Ratkaisu $(-1,1)$.

b) Leikkauspisteet saadaan yhtälöparista

$$\begin{cases} x+5y=1 \\ 2x+9y+3=0 \end{cases}$$

Ratkaistaan x ~~toisesta~~ 1. yhtälöstä

$$x=1-5y$$

Sijoitetaan 2. yhtälöön

$$2(1-5y)+9y+3=0$$
$$-y+5=0$$
$$y=+5$$

Sijoitetaan x:n yhtälöön

$$x=1-5\cdot(+5)=-24.$$

V: $(-24,5)$

c) Leikkauspisteet saadaan yhtälöparista

$$\begin{cases} 5x - 8y + 13 = 0 \\ \frac{5}{4}x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$$ Kerrotaan 2. yhtälö -4:llä.

$$\begin{cases} 5x - 8y + 13 = 0 \\ -5x + 8y - 8 = 0 \end{cases}$$ Lasketaan yhtälöt yhteen

$5 = 0$ yhtälöparilla ei ole ratkaisua.

2.

~~3 kpl~~

3 munkin pusseja x kpl

6 munkin pusseja y kpl.

Munkkien määrä:

$$3x + 6y = 300$$

Tulot

$$3x + 5y = 280$$

Yhtälöpari:

$$\begin{cases} 3x + 6y = 300 \\ 3x + 5y = 280 \end{cases}$$ Kerrotaan 2. yhtälö luvulla -1.

$$\begin{cases} 3x + 6y = 300 \\ -3x - 5y = -280 \end{cases}$$

$$y = 20$$

Sijoitetaan 2. yhtälöön

$$3x + 5 \cdot 20 = 280$$

$$3x = 180$$

$$x = 60$$

V: $x = 60$ ja $y = 20$.

3. Ratkaise

$$\begin{cases} 3x+4y+z+5=0 \\ x+y+z+1=0 \\ x+z-1=0 \end{cases}$$

Kerrotaan 3. yhtälö luvulla -1

$$\begin{cases} 3x+4y+z+5=0 \\ x+y+z+1=0 \\ -x-z+1=0 \end{cases}$$

Lasketaan kaksi alinta yhtälöä yhteen.

$$x+y+z+1-x-z+1=0$$

$$y+2=0$$

$$y=-2.$$

Tarkastellaan kahta ylintä yhtälöä ja sijoitetaan niihin $y=-2$.

$$\begin{cases} 3x+z+5-8=0 \\ x+z-1=0 \end{cases}$$

Kerrotaan 2. yhtälö luvulla -1.

$$\begin{cases} 3x+z-3=0 \\ -x-z+1=0 \end{cases}$$

Lasketaan yhtälöt yhteen

$$2x-2=0$$

$$x=1$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön $-x-z+1=0$ ja saadaan $-1-z+1=0$ eli $z=0$.

V: $(1,-2,0)$

4. Täydennetään kaikki neliöiksi

a) $x^2+y^2+2y-6x+5=0$

$x^2-2\cdot3x+9-9+y^2+2y+1-1+5=0$

$(x-3)^2+(y+1)^2-5=0$

$(x-3)^2+(y+1)^2=5$

Keskipiste $(3,-1)$ säde $\sqrt{5}$.

b) $x^2+y^2+2x-y+1=0$

$x^2+2x+1-1+y^2-2\cdot\frac{1}{2}y+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^2}+1=0$

$(x+1)^2+(y-\frac{1}{2})^2-1-\frac{1}{4}+1=0$

$(x+1)^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

Keskipiste $(-1,\frac{1}{2})$ säde $\frac{1}{2}$.

c) $x^2+y^2-2x-6y+14=0$

$x^2-2x+1-1+y^2-2\cdot3y+9-9+14=0$

$(x-1)^2+(y-3)^2+4=0$

$(x-1)^2+(y-3)^2=-4$

ei ole ympyrän yhtälö. (säteen neliö ei voi olla negatiivinen).

5. Leikkauspisteet saadaan yhtälöparista

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=-2x+1 \end{cases}$$

Sijoitetaan ratkaistu y ympyrän yhtälöön

$$x^2+(-2x+1)^2=4$$

$$x^2+4x^2-4x+1-4=0$$

$$5x^2-4x-3=0$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot5\cdot(-3)}}{2\cdot5}=\frac{4\pm\sqrt{16+60}}{10}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{76}}{10}=\frac{4\pm2\sqrt{19}}{10}=\frac{2\pm\sqrt{19}}{5}$$

Ratkaistaan y nyt suoran yhtälöstä.

$$y_1=-2\frac{2+\sqrt{19}}{5}+1=\frac{-4-2\sqrt{19}}{5}+\frac{5}{5}=\frac{1-2\sqrt{19}}{5}$$

$$y_2=-2\frac{2-\sqrt{19}}{5}+1=\frac{-4+2\sqrt{19}}{5}+\frac{5}{5}=\frac{1+2\sqrt{19}}{5}.$$

Leikkauspisteet $\left(\frac{2+\sqrt{19}}{5}, \frac{1-2\sqrt{19}}{5}\right)$

ja $\left(\frac{2-\sqrt{19}}{5}, \frac{1+2\sqrt{19}}{5}\right)$

6. Ympyrän yhtälöt $x^2+y^2-4x-5=0$ ja $x^2+y^2-4y-5=0$.

Vähennetään nämä toisistaan ja saadaan yhtälö

$$x^2+y^2-4x-5-(x^2+y^2-4y-5)=0 \quad (*)$$

$$-4x+4y=0$$

$$y=x.$$

Tämä suora kulkee ympyröiden leikkauspisteiden kautta, sillä yhtälön (*) toteuttavat ne pisteet, jotka ovat molemmilla ympyröillä. Tällöin ~~myös~~ ympyröiden leik. pist. ovat suoralla $y=x$.

Leikkauspisteet saadaan siis etsimällä toisen ympyrän ja suoran $y=x$ leikkauspisteet.

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-5=0 \\ y=x \end{cases}$$

Sijoitetaan $y=x$ ympyrän yhtälöön.

$$x^2+x^2-4x-5=0$$

$$2x^2-4x-5=0$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16+40}}{4}=\frac{4\pm2\sqrt{14}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{14}}{2}$$

Suoran yhtälön $y=x$ perusteella leikkauspisteiden y-koordinaatit ovat myös $\frac{2\pm\sqrt{14}}{2}$.

Leikkauspisteet

$$\left(\frac{2+\sqrt{14}}{2}, \frac{2+\sqrt{14}}{2}\right) \text{ ja } \left(\frac{2-\sqrt{14}}{2}, \frac{2-\sqrt{14}}{2}\right).$$

7. Ympyrän yhtälö $x^2+y^2=4$ ja suoran yhtälö $y=2x+b$.
Milloin näillä on vain 1. leikkauspiste?

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=2x+b \end{cases}$$

Sijoitetaan suoran yhtälö ympyrän yhtälöön

$$x^2+(2x+b)^2-4=0$$

$$x^2+4x^2+4bx+b^2-4=0. \quad \text{eli} \quad 5x^2+4bx+b^2-4=0$$

Tällä yhtälöllä on vain yksi juuri kun sen diskriminantti on 0.

Ts. kun $(4b)^2-4(5\cdot(b^2-4))=0$

$$16b^2-20b^2+80=0 \quad | :4$$

$$4b^2-5b^2+20=0 \quad | +b^2$$

$$20=b^2$$

eli $b=\pm\sqrt{20}$.

Näillä b:n arvoilla yhtälöparilla on vain 1 ratkaisu.

(Lisäselitystä: Edellä päädyttiin, että jos $b=\pm\sqrt{20}$ on yhtälöparin ratkaisuissa aina sama x koordinaatti, Tämä on totta, koska edellä b valittiin siten, että x-koordinaatin antavalla yhtälöllä on vain yksi ratkaisu. Tällöin suoran yhtälöstä $y=2x+b$ saadaan vain yksi y. Leikkauspisteitä on vain 1.

T. 6 Kuva