

Harj: 5

1. $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$, $g(x) = 4x - 1$

$$f(g(x)) = f(4x - 1)$$

$$\begin{aligned} &= 2(4x - 1)^2 - 8(4x - 1) + 1 \\ &= 2(16x^2 - 8x + 1) - 32x + 8 + 1 \\ &= 32x^2 - 16x + 2 - 32x + 8 + 1 \\ &= 32x^2 - 48x + 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(g(1)) &= 32 \cdot 1^2 - 48 \cdot 1 + 11 \\ &= 32 - 48 + 11 \\ &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(g(4)) &= 32 \cdot 4^2 - 48 \cdot 4 + 11 \\ &= 32 \cdot 16 - 48 \cdot 4 + 11 \\ &= 512 - 192 + 11 \\ &= 331 \end{aligned}$$

tar

$$g(1) = 4 \cdot 1 - 1 = 3$$

$$f(g(1)) = f(3)$$

$$= 2 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 1$$

$$= 18 - 24 + 1 = -5$$

$$g(4) = 4 \cdot 4 - 1 = 15$$

$$\begin{aligned} f(15) &= 2 \cdot 15^2 - 8 \cdot 15 + 1 \\ &= \dots = 331 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(2x^2 - 8x + 1) \\ &= 4(2x^2 - 8x + 1) - 1 \\ &= 8x^2 - 32x + 4 - 1 \\ &= 8x^2 - 32x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(f(1)) &= 8 \cdot 1^2 - 32 \cdot 1 + 3 \\ &= 8 - 32 + 3 \\ &= -21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ta.} \quad f(1) &= 2 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 1 \\ &= -5 \\ g(f(1)) &= g(-5) = 4 \cdot (-5) - 1 \\ &= -21. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(f(4)) &= 8 \cdot 4^2 - 32 \cdot 4 + 3 \\ &= 32 \cdot 4 - 32 \cdot 4 + 3 = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4) &= 2 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 + 1 \\ &= 8 \cdot 4 - 8 \cdot 4 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(f(4)) &= g(1) \\ &= 4 \cdot 1 - 1 = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(2x^2 - 8x + 1) \\ &= 2(2x^2 - 8x + 1)^2 - 8(2x^2 - 8x + 1) + 1 \\ &= 2(2x^2 - 8x + 1)(2x^2 - 8x + 1) - 16x^2 + 64x - 8 + 1 \\ &= 2(4x^4 - 16x^3 + 2x^2 - 16x^3 + 64x^2 - 8x \\ &\quad + 2x^2 - 8x + 1) - 16x^2 + 64x - 8 + 1 \\ &= 2(4x^4 - 32x^3 + 68x^2 - 16x + 1) \\ &\quad - 16x^2 + 64x - 7 \\ &= 8x^4 - 64x^3 + 136x^2 - 32x + 2 \\ &\quad - 16x^2 + 64x - 7 \end{aligned}$$

$$= 8x^4 - 64x^3 + 120x^2 + 32x - 5$$

$$f(f(1)) = 8 - 64 + 120 + 32 - 5 = 91$$

$$f(4) = 2 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 + 1 = 1$$

$$f(1) = 2 - 8 + 1 = -5$$

$$\begin{aligned} f(f(4)) &= f(1) \\ &= -5. \end{aligned}$$

2.1 Vaihtoehtoja on useita. Pyritään valitsemaan vaihtoehtoista "se luonnollisin" (t.s. ne f ja g , joilla yhdistetyn funktion derivaatta päästään helpoimmin käytyä lähtäen (derivaatasta lisää myöhemmin))

a) $g(x) = x^9$, $f(x) = 5x + 7$.

Tällöin $g(f(x)) = g(5x + 7) = (5x + 7)^9$.

b) $g(x) = e^x$, $f(x) = x^2$.

Tällöin $g(f(x)) = g(x^2) = e^{x^2}$.

c)
$$\frac{x+2}{x^2+4x+5} = \frac{x+2}{x^2+4x+4+1}$$
$$= \frac{x+2}{(x+2)^2+1}$$

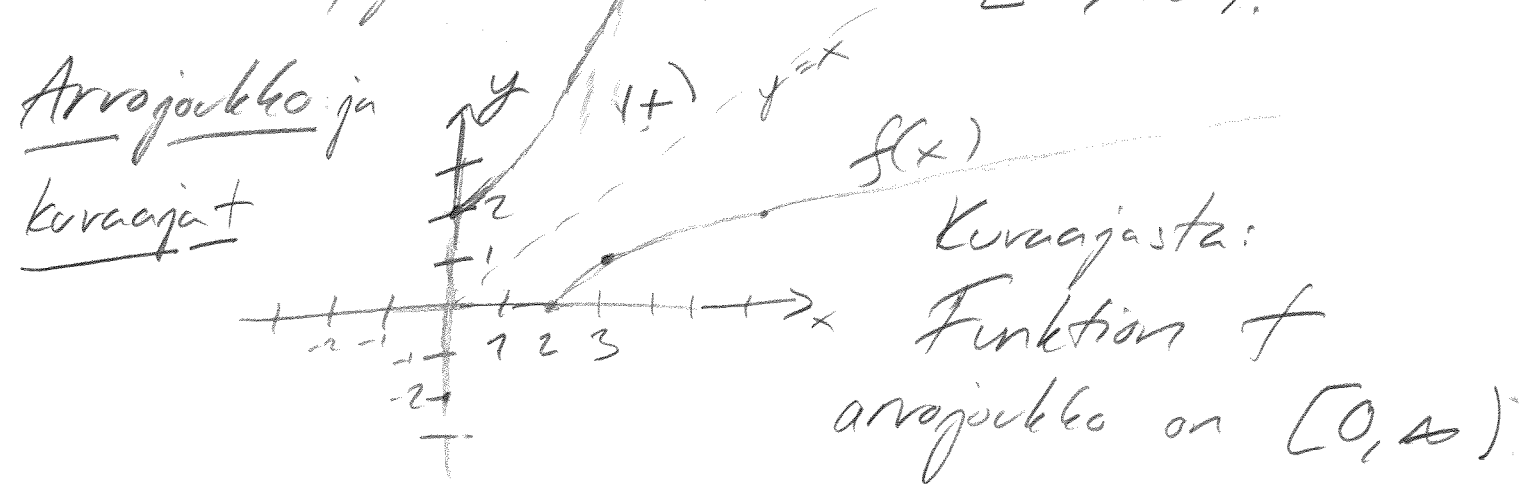
$g(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $f(x) = x+2$.

$$g(f(x)) = g(x+2) = \frac{x+2}{(x+2)^2+1} = \frac{x+2}{x^2+4x+5}.$$

3. $f(x) = \sqrt{x-2}$.

Määrittelyjoukko: Juvilauske on määritelty kun juurettava on ei-negatiivista:
 $x-2 \geq 0$ eli $x \geq 2$.

Määrittelyjoukko on täten $[2, \infty)$.



Käänteisfunktio:

Koska $f(x) = \sqrt{x-2}$ on aidusti monotoninen funktio määrittelyjoukolla $[2, \infty)$ ja arvojoukolla $[0, \infty)$, on olemassa käänteisfunktio $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [2, \infty)$.
 Ratkaistaan sen lauseke:

$$y = \sqrt{x-2} \quad \& \quad ()^2, \text{ ok, sillä } f\text{'n arvojoukko } [0, \infty)$$

$$y^2 = x-2$$

$$x = y^2 + 2.$$

Täten $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [2, \infty)$, $f^{-1}(x) = x^2 + 2$.

$$\begin{aligned}
 \underline{4.1} \quad a) \quad \sqrt[9]{\sqrt{a} a^4} &= (\sqrt{a} a^4)^{1/9} \\
 &= (a^{1/2} a^4)^{1/9} \\
 &= (a^{4+1/2})^{1/9} \\
 &= (a^{\frac{9}{2}})^{1/9} \\
 &= a^{\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{9}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad \frac{\sqrt{a} a^5}{\sqrt{a^9}} &= \frac{a^{1/2} a^5}{(a^9)^{1/2}} \\
 &= \frac{a^{5+1/2}}{a^{9/2}} \\
 &= \frac{a^{11/2}}{a^{9/2}} \\
 &= a^{11/2 - 9/2} \\
 &= a^{2/2} = a^1 = a.
 \end{aligned}$$

5.) Alkuperäiset päästöt x

Vuosittainen vähennyskerroin a

Päästöt vuoden jälkeen $a \cdot x$

- 11 - 2 — 11 — $a \cdot a \cdot x = a^2 x$

Päästöt 10 vuoden jälkeen $a^{10} x$

Haluttu päästöjen enimmäismäärä $0.92 x$

$$a^{10} x = 0.92 x \quad | :x, x \neq 0$$

$$a^{10} = 0.92 \quad | \sqrt[10]{}$$

$$a = \sqrt[10]{0.92} = 0.9916965...$$

Vuosittainen vähennysprosentti on siis

$$1 - 0.9916965... = 0.00830349...$$

$$= 0.830349... \%$$

$$\approx 0.8\%$$

TAI

Vastaus: Noin 0.8% vuodessa. (Vähintään 0.9% vuodessa)

$$6. \quad \left(\frac{6}{5}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{5}{6}\right)^{3x+1} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-3x-1}$$

Luennoista: Funktio a^x on aidosti kasvava, kun $a > 1$. Erityisesti, kun $a > 1$,

$$a^x \leq a^y \text{ tismalleen kun } x \leq y.$$

Täten alkuperäinen epäyhtälö pätee tismalleen kun

$$x-1 \leq -3x-1 \quad \text{\textcancel{+}1+3x}$$

$$4x \leq 0 \quad \text{\textcancel{+}4}$$

$$x \leq 0.$$

Vastaus:

$$\left(\frac{6}{5}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{5}{6}\right)^{3x+1}$$

tismalleen kun $x \leq 0$.

7.) Logaritmin määritelmästä saadaan
 $\log_a a^b = b.$ (laskesääntö)
($a \neq 1$
 $a > 0$)

a) $\lg \sqrt{10} = \log_{10} 10^{1/2} = 1/2.$

b) $\log_2 (16 \sqrt[5]{4}) = \log_2 (2^4 \cdot (2^2)^{1/5})$
 $= \log_2 (2^4 \cdot 2^{2/5})$
 $= \log_2 (2^{4+2/5}) = 4 \frac{2}{5} = \frac{22}{5}.$

c) Muistetaan $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$ ($a \neq 1$
 $a > 0$
 $b > 0$
 $c > 0$)
ja $\log_a x^p = p \log_a x$ ($x > 0$)

$\ln(3e^2) + \ln(e/3)$ $\{ \ln = \log_e = \log$
 $= \log_e(3e^2) + \log_e(e/3)$
 $= \log 3 + \log e^2 + \log e^1 + \log 3^{-1}$
 $= \log 3 + 2 + 1 + \log 3^{-1}$
 $= \log 3 + 2 + 1 - \log 3 = 3.$

$$d) \log_a x = \frac{\log_k x}{\log_k a}$$

$$\left(\begin{array}{l} a > 0, k > 0, \\ a \neq 1, k \neq 1 \\ x > 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\log_{11} 36}{\log_{11} 6} &= \log_6 36 \\ &= \log_6 6^2 = 2. \end{aligned}$$

$$e) \lg 3 - \lg 0,003$$

$$= \lg 3 + \lg \left(\frac{1}{0,003} \right)$$

$$= \lg \left(\frac{3}{0,003} \right)$$

$$= \lg \frac{1}{0,001}$$

$$= \lg 10^3$$

$$= 3$$