Demo 6 ratkaisut

1)

a)
$$15^\circ = 15\,\frac{2\pi}{360} = 15\,\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$$
$$1^\circ = \cancel{180}\,\frac{\pi}{180}\text{ rad}$$

b)
$$-25^\circ = -25\,\frac{\pi}{180} = -5\cdot\frac{\pi}{36} = -\frac{5}{36}\pi$$

c)
$$108^\circ = 108\,\frac{\pi}{180} = 36\cdot\frac{\pi}{60} = 6\,\frac{\pi}{10} = \frac{3\pi}{5}$$

d)
$$340^\circ = 340\,\frac{\pi}{180} = 34\,\frac{\pi}{18} = 17\,\frac{\pi}{9}$$

$$\pi\text{ rad} = 180^\circ$$

e)
$$\frac{2\pi}{15} = \frac{360^\circ}{15} = \frac{24\cdot 15^\circ}{15} = 24^\circ$$

f)
$$-\frac{5\pi}{12} = -\frac{5\cdot 180^\circ}{12} = -5\cdot 15^\circ = -75^\circ$$

g)
$$\frac{3\pi}{10} = \frac{3\cdot 180^\circ}{10} = 3\cdot 18^\circ = 54^\circ$$

h)
$$5\text{ rad} = 5\cdot\frac{180^\circ}{\pi} = \frac{900^\circ}{\pi}$$

2) Minuuttiviisari kiertyy aikavälillä 8.45 - 17.30 <u>vastapäivään</u>
8 kokonaista kierrosta ja $\frac{3}{4}$ kierrosta vielä siihen päälle.
Kierretty kulma on $-8\frac{3}{4}\cdot 2\pi = -\frac{35}{4}\cdot 2\pi = -\frac{35}{2}\pi$.

3) Laske
$$\frac{\cos\frac{5\pi}{3} - \sin\frac{17\pi}{4}}{\sin\frac{5\pi}{6} - \tan\frac{3\pi}{4}}$$

Lasketaan tarvittavat palat erikseen

$$\sin\frac{17\pi}{4} = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\frac{2\pi}{3}$$
$$= -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{3\pi}{4} = \frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{\cos\frac{3\pi}{4}} = \quad ,\text{ sillä}$$

$$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ja}$$

$$\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Kasataan nämä tulokset yhteen ja saadaan

$$\frac{\cos\frac{5\pi}{3} - \sin\frac{17\pi}{4}}{\sin\frac{5\pi}{6} - \tan\frac{3\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}} = \frac{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}+1}$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{3}.$$

4\. Olkoon α kulma s.e. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ja $\sin\alpha = \frac{5}{6}$.

Tällöin kulmalle $\pi - \alpha$ on $0 < \pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Nyt vain lasketaan...

$\sin \pi - \alpha = \frac{5}{6}$, sillä aina $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$ (Luennot)

Koska $\sin^2(\pi - \alpha) + \cos^2(\pi - \alpha) = 1$ (Luennot)

$$\frac{25}{36} + \cos^2(\pi - \alpha) = 1$$

$$\cos^2(\pi - \alpha) = \frac{11}{36}$$

$\cos(\pi - \alpha) = \pm\frac{\sqrt{11}}{6}$ ja kulma $0 < \pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos(\pi - \alpha) = \frac{\sqrt{11}}{6}$, sillä tällä välillä kosini on positiivinen.

$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{11}}{6}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

5.

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$

Koska $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

on $\underset{-\frac{1}{2}}{\underset{\parallel}{\cos(\pi - \frac{\pi}{3})}} = \cos\frac{2\pi}{3}$ ja $x = \frac{2\pi}{3}$ on yksiratkaisu

Kaikki ratkaisut ovat tällöin

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

tai $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}.$

b)

$$2\cos(3x) = \sqrt{3}$$

$\cos(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, koska $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

on

$$3x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

tai $3x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$ eli

$$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

c) $3\sin(-x) = 6$

$\sin(-x) = 2$

Tällä yhtälöllä ei ole ratkaisuja, sillä $\sin x \leq 1$ aina.

6. $h(t) = 6,1 + 2,1\cos\left(\frac{\pi}{6}(t-2)\right)$

Koska kosini on suurimmillaan 1 ja pienimmillään -1

on vesi syvimmillään $(6,1+2,1)\,m = 8,2\,m$ ja matalimmillaan

$(6,1-2,1)\,m = 4\,m$.

Vesi on korkeimmillaan kun

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}(t-2)\right) = 1 \qquad \cancel{\cos}$$

koska $\cos 0 = 1$ ~~on~~ yhtälö toteutuu kun

$$\frac{\pi}{6}(t-2) = 0 + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$t-2 = 12 \cdot n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$t = 12 \cdot n + 2 \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Vesi on korkeimmillaan, kun kello on 2 tai 14 joka päivä.

7.

~~log 10~~

$\log 6 \approx 0,78$

$\log 72 \approx 1,86$

$\log 105 \approx 2,02$

$\log 7488 \approx 3,87$

Näytää siltä, että numeroiden määrä ~~luvussa~~ luvussa on kokonaislukuosa + 1.

(kokonaislukuosa on suurin lukua pienempi kokonaisluku esim 6,9:n kokonaislukuosa on 6.)

~~log~~

Luku 15^{1200}:

$$\log 15^{1200} = 1200 \cdot \log 15 \approx 1411{,}31$$

eli luvussa on 1412 numeroa.

8. $$N(t) = N_0 \, e^{-\frac{t}{T_{1/2}} \ln 2} \qquad N(0) = N_0 \, e^{-\frac{0}{T_{1/2}} \ln 2} = N_0 e^0 = N_0$$

$N(1) = 0{,}83\, N_0$, koska aineen määrä on vähentynyt 17 %. tunnissa.

(Ratkaisussa on oletettu, että aika t on mitattu tunneissa, mutta tämä vaikuttaa vain siihen missä yksiköissä $T_{1/2}$ tulee ratkaistua).

$$N(1) = 0{,}83\, N_0$$

eli $$0{,}83 N_0 = N_0 \, e^{-\frac{1}{T_{1/2}} \ln 2}$$

$$0{,}83 = e^{-\frac{1}{T_{1/2}} \ln 2}$$

$$\ln 0{,}83 = \ln e^{-\frac{1}{T_{1/2}} \ln 2}$$

$$\ln 0{,}83 = -\frac{1}{T_{1/2}} \ln 2$$

$$T_{1/2} = -\frac{\ln 2}{\ln 0{,}83} \approx 3{,}72\ \text{h}$$

Puoliintumisaika on

$T_{1/2} = 3\ \text{h}\ \ 43\ \text{min}$