1. a) $\lim_{x \to 2} (3x^2 - 5x + 2)$

Polynomifunktio on jatkuva. Jatkuvan funktion raja-arvot saadaan sijoittamalla

$= 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 2$

$= 12 - 10 + 2 = 4.$

b) $\lim_{x \to 1} \frac{2x+3}{x+1}$

Rationaalifunktio on jatkuva määrittelyjoukossaan. Tämän kohdan rationaalifunktio on määritelty kun $x=1$, täten raja-arvo saadaan taas sijoittamalla.

$= \frac{2 \cdot 1 + 3}{1+1}$

$= 5/2.$

c) $\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 18}{5x - 15}$

$2 \cdot 3^2 - 18 = 0,$

$5 \cdot 3 - 15 = 0,$

kyseessä on siis $0/0$-tyyppinen raja-arvo. Tällöin pyritään sopivalla supistuksella saamaan lausekkeesta ei $0/0$-muotoinen.

$= \lim_{x \to 3} \frac{2(x^2 - 9)}{5(x-3)}$

$= \frac{2}{5} \lim_{x \to 3} \frac{(x^2 - 9)}{x - 3}$ Muistikaava

$= \frac{2}{5} \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}$

$= \frac{2}{5} \lim_{x \to 3} (x+3) = \frac{2}{5} \cdot 6 = \frac{12}{5}.$

2. a) $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 2x - 4}{x - 2}$ (Sijoittamalla huomataan, että raja-arvo on 0/0-tyyppinen)

$= \lim_{x \to 2} \frac{2(x^2 - x - 2)}{x - 2}$

$= 2 \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \ldots$

Toisen asteen polynomin $ax^2 + bx + c$ voi kirjoittaa muotoon $a(x - x_1)(x - x_2)$, missä x_1 ja x_2 ovat polynomin nollakohdat. (Jos k.o. polynomilla on nollakohta).

$a = 1, \ b = -1, \ c = -2$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2}$

$= \frac{1 \pm 3}{2} \overset{(+)}{=} 2$

$\overset{(-)}{=} -1.$

Täten $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$.

$\ldots = 2 \lim_{x \to 2} \frac{(x+1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}$

$= 2 \lim_{x \to 2} (x+1)$

$= 2 \cdot 3 = 6$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x}{x(1+x)}$ (Jatkuva ja määritelty pisteessä $x=1$, täten voidaan sijoittaa)

$= \dfrac{2 \cdot 1}{1(1+1)} = \dfrac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ (Jatkuva ja määritelty pisteessä $x=3$, voidaan sijoittaa) (Kahden jatkuvan funktion osamäärä on jatkuva)

$= \dfrac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

$= \dfrac{\sqrt{3}(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}$

$= \dfrac{3\sqrt{3}+3}{3^2-3}$

$= \dfrac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

3. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ | $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

$= \lim_{x \to 1^-} -x + 1$ | $= \lim_{x \to 1^+} 2x$

$= -1 + 1 = 0$ | $= 2.$

Funktion f toispuoleiset raja-arvot pisteessä $x = 1$, täten funktiolla f ei ole raja-arvoa pisteessä $x = 1$. Koska raja-arvoa ei ole olemassa, ei funktio f myöskään ole jatkuva pisteessä $x = 1$. Koska funktiolla f on epäjatkuvuuspiste, se ei ole jatkuva

$\lim_{x \to 1^-} g(x)$ | $\lim_{x \to 1^+} g(x)$

$= \lim_{x \to 1^-} x^2$ | $= \lim_{x \to 1^+} 2x - 1$

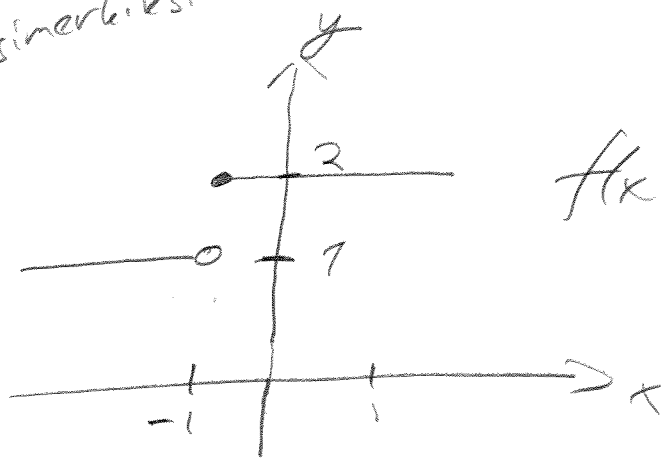
$= 1^2 = 1$ | $= 2 \cdot 1 - 1 = 1.$

$g(1) = 1^2 = 1.$

Toispuoleiset raja-arvot ovat samat, täten kyseinen raja-arvo on olemassa. Koska kyseinen raja-arvo on sama kuin funktion arvo tässä pisteessä, on funktio g jatkuva pisteessä $x = 1$. Funktio g on tämän pisteen molemmalla puolella polynomifunktio, erityisesti siis jatkuva. Täten funktio g on jatkuva kaikkialla eli lyhyesti siis jatkuva.

4. Esimerkiksi

I)

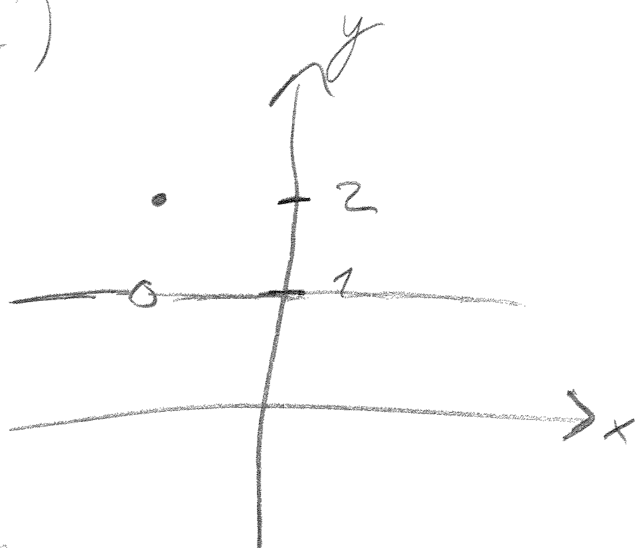


$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x < -1 \\ 2, & \text{kun } x \geq -1. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \to -1^+} f(x) = 2.$$

Täten funktiolla f ei ole raja-arvoa pisteessä $x = -1$, täten funktio f ei ole jatkuva tässä pisteessä. Muualla kyseinen funktio on jompikumpi vakiofunktio 1 tai 2 ja täten jatkuva. (Halutessaan voi esittää tarkemman perustelun raja-arvoilla...)
Täten funktion f ainoa epäjatkuvuuspiste on $x = -1$.

II)



$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \neq -1 \\ 2, & \text{kun } x = -1. \end{cases}$$

(Raja-arvo on, mutta se on eri kuin funktion arvo
muuten vastaavasti)

$$1 = \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1} f(x) \neq f(-1) = 2$$

5. I) $f(x) := x^2 + 2x - 4$

Erotus-osamäärä

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x - 4 - \overbrace{(2^2 + 2 \cdot 2 - 4)}^{=4}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 2} = \ldots$$

Ratkaistaan polynomin $x^2 + 2x - 8$ nollakohdat.

$a = 1,\ b = 2,\ c = -8$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \overbrace{\sqrt{4 + 32}}^{=\sqrt{36}}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 6}{2} \overset{(+)}{=} 2$$

$$\underset{(-)}{=} -4$$

Täten $x^2 + 2x - 8 = (x - 2)(x + 4)$. (Kts. Ohjaus 7, tehtävän 3 vihje)

$$\ldots = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+4)}{\cancel{x-2}}$$

$$= \lim_{x \to 2} x + 4 = 6.$$

Tarkistus: $f'(x) = 2x + 2$, $f'(2) = 2 \cdot 2 + 2 = 6$, ok

II) $g(x) = 2x^2 - 2x$.

$$g'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 2x - \overbrace{(2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2)}^{=4}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 2x - 4}{x - 2} = \ldots$$

Polynomin $2x^2 - 2x - 4$ nollakohdat:

$a = 2$, $b = -2$, $c = -4$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \overbrace{\sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}^{= \sqrt{4 + 32} = \sqrt{36}}}{2 \cdot 2}$$

$\boxed{\text{Ohjaus 7, tehtävän 3 vihje}}$

$$= \frac{2 \pm 6}{4} \overset{(+)}{=} \frac{8}{4} = 2$$

$$\underset{(-)}{=} \frac{-4}{4} = -1.$$

Täten $2x^2 - 2x - 4 = 2(x + 1)(x - 2)$.

$$\ldots = \lim_{x \to 2} \frac{2(x+1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \to 2} 2(x+1) = \underline{\underline{6}}.$$

Tarkistus: $g'(x) = 4x - 2$, $g'(2) = 4 \cdot 2 - 2 = 6$, ok.

6a) Muistetaan potenssifunktion derivaatta

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Tällöin

$$f'(x) = (3x^5 + x^3 - x^{-2} + 4)'$$

$$= 3(x^5)' + (x^3)' - (x^{-2})' + (4)'$$

$$= 3 \cdot 5x^4 + 3x^2 - (-2x^{-3}) + 0$$

$$= 15x^4 + 3x^2 + 4x^{-3}.$$

b) Tulon derivaatta: $(fg)' = f'g + fg'$.

$$g'(x) = \left[(x^2 - 2x + 6)(x^4 + x^2 + 1)\right]'$$

$$= (x^2 - 2x + 6)'(x^4 + x^2 + 1) + (x^2 - 2x + 6)(x^4 + x^2 + 1)'$$

$$= (2x - 2)(x^4 + x^2 + 1) + (x^2 - 2x + 6)(4x^3 + 2x)$$

$$= \ldots = 6x^5 - 10x^4 + 28x^3 - 6x^2 + 14x - 2$$

c) $h(x) = \frac{2x-1}{x^2+x}.$

Käytetään osamäärän derivointikaavaa:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

$f(x) = 2x-1, \quad f'(x) = 2$

$g(x) = x^2+x, \quad g'(x) = 2x+1$

$$h'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$= \frac{2(x^2+x) - (2x-1)(2x+1)}{(x^2+x)^2}$$

$$= \frac{2x^2+2x-4x^2+1}{(x^2+x)^2}$$

$$= \frac{-2x^2+2x+1}{x^4+2x^3+x^2}.$$

7. Käytetään tulon derivointikaavaa:

$$g'(x) = (x^3 f(x))'$$

$$= (x^3)' f(x) + x^3 f'(x)$$

$$= 3x^2 f(x) + x^3 f'(x).$$

Käytetään tietoja $f(-3) = 2$ ja $f'(-3) = 11$ ja sijoitetaan:

$$g'(-3) = 3(-3)^2 f(-3) + (-3)^3 f'(-3)$$

$$= 3 \cdot 9 \cdot 2 - 27 \cdot 11$$

$$= 54 - 297$$

$$\underline{\underline{= -243.}}$$