Prop. D.8 Ratkaisut.

1. a) ~~$f(x)$~~ $f(x) = (1-\sqrt{x})^{100}$

Derivoidaan ketjusäännöllä.

Olkoon $h(x) = 1 - \sqrt{x} = 1 - x^{\frac{1}{2}}$

$k(x) = x^{100}$

Tällöin $h'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ ja $k'(x) = 100x^{99}$.

Ketjusäännön mukaan $f'(x) = h'(x)\,k'(h(x))$

$$= -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot 100\,(1-\sqrt{x})^{99} = -50\,\frac{(1-\sqrt{x})^{99}}{\sqrt{x}}.$$

b) Osamäärän derivointisäännön mukaan

$$h'(x) = \frac{(D\ln x)\,x - \ln x \cdot Dx}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$= \frac{\ln e - \ln x}{x^2} = \frac{\ln \frac{e}{x}}{x^2}$$

c) $g(x) = 2\ln(\sin x)$.

Merkitään $f(x) = 2\ln x$ ja $h(x) = \sin x$.

Tällöin $f'(x) = \frac{2}{x}$ ja $h'(x) = \cos x$ ja

ketjusäännön mukaan $g'(x) = h'(x)\,f'(h(x))$

$$= \cos x \cdot \frac{2}{\sin x} = \frac{2}{\tan x}.$$

d)

$$h(x) = \cos(e^{x^2})$$

Olkoon $a(x) = \cos x$ $b(x) = e^{x^2}$.

Tällöin $a'(x) = -\sin x$, mutta $b'(x)$ pitää laskea taas ketjusäännöllä. Olkoon $c(x) = e^x$ ja $d(x) = x^2$.

Nyt $c'(x) = e^x$ ja $d'(x) = 2x$, joten

$$b'(x) = d'(x)\, c'(d(x)) = 2x\, e^{x^2}.$$

Ketjusäännön mukaan

$$h'(x) = b'(x)\, a'(b(x)) = 2x\, e^{x^2} \cdot (-\sin e^{x^2})$$

$$= -2x e^{x^2} \sin e^{x^2}.$$

2.

$$f(x) = \sqrt{x^2+3}$$

Tällöin $f'(x) = h'(x)\, g'(h(x))$, missä $h(x) = x^2+3$ ja $g(x) = \sqrt{x}$. Koska $g'(x) = +\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$ ja $h'(x) = 2x$

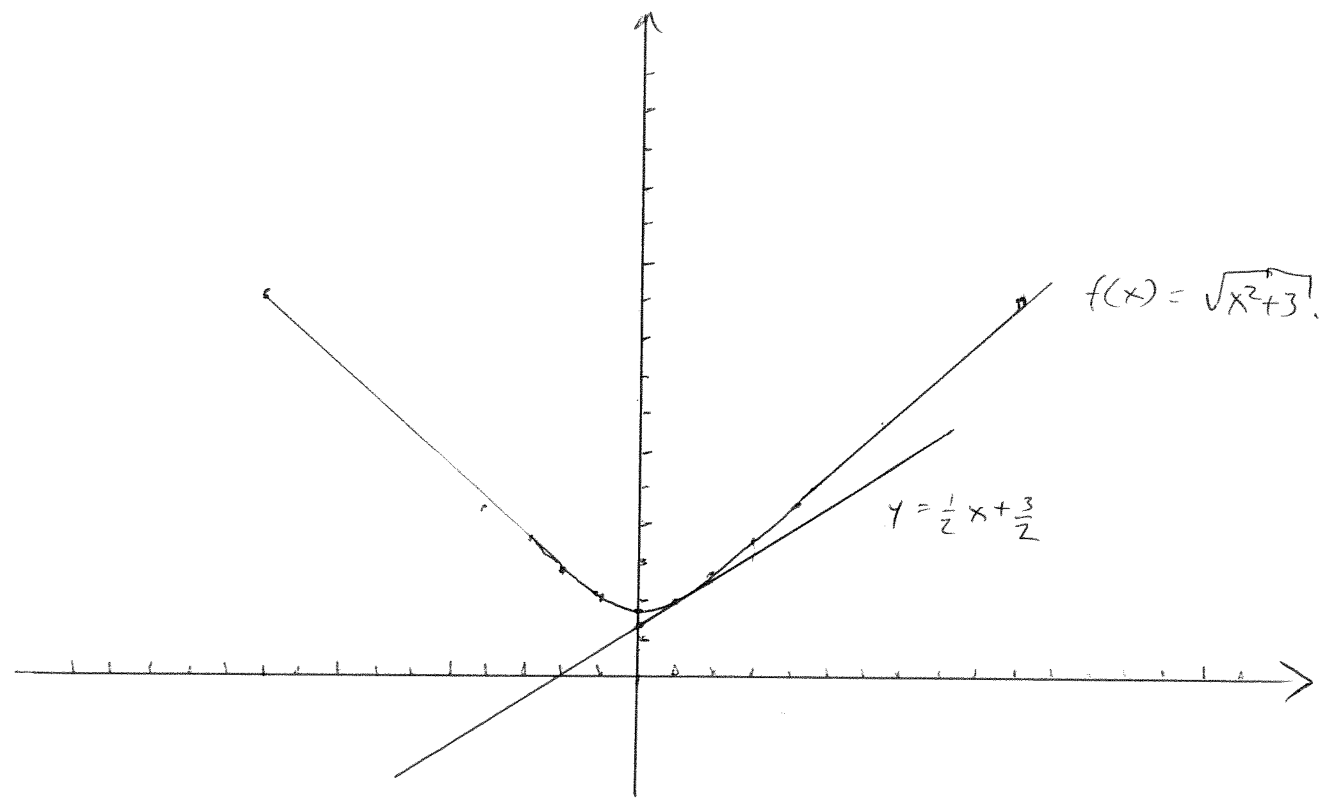
on $f'(x) = 2x \cdot \left(+\frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{2x}{+2\,(x^2+3)^{1/2}} = \frac{+x}{(x^2+3)^{1/2}}$.

$f'(1) = \frac{1}{(1+3)^{1/2}} = \frac{1}{2}$. Koska suora kulkee pisteen

$(1, f(1)) = (1, 2)$ kautta suoran yhtälö

on $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ eli

$y - 2 = \frac{1}{2}(x-1)$ eli $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$



3.

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Osamäärän derivointisäännön mukaan

$$f'(x) = \frac{(D \sin x)\cos x - \sin x \overbrace{(D \cos x)}^{-\sin x}}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \text{sillä} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

4.

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 12x + 1$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = 2x^2 - 5x - 12$$

$$2x^2 - 5x - 12 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25+96}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{5 \pm 11}{4}$$

Nollakohdat ovat $x = \frac{16}{4} = 4$ ja $x = -\frac{3}{2}$.

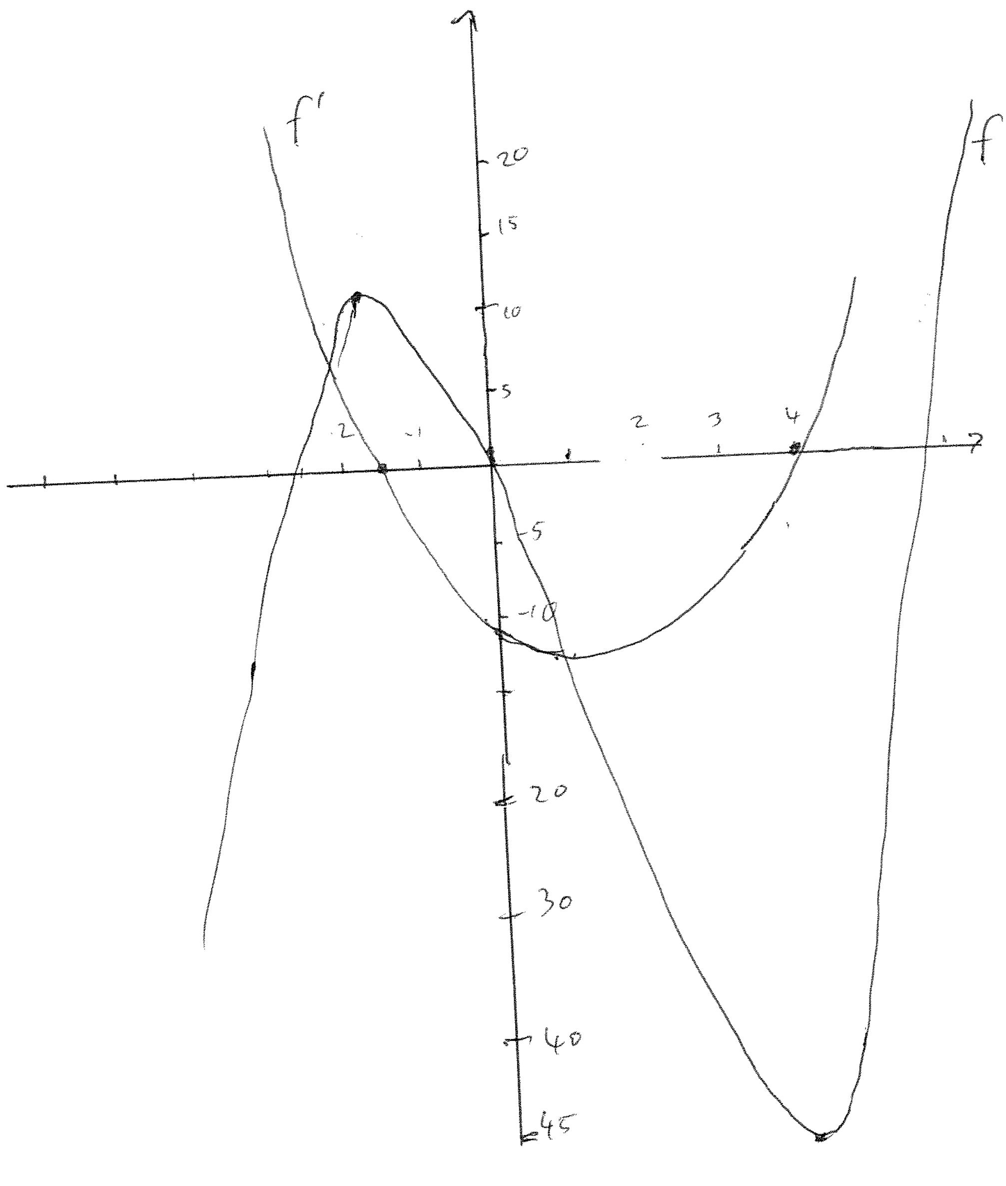
Koska $2x^2-5x-12$ on ylöspäin aukeava paraabeli derivaatan merkki on välillä $(-\frac{3}{2},4)$ miinus ja plus tämän välin ulkopuolella.

Saadaan merkkikaavio

	$-\frac{3}{2}$		4	
f'	+	−	+	
f	kasv. ↗	väh. ↘	kasv. ↗	

josta nähdään että ~~$-\frac{3}{2}$ on lokaali maksimi~~ pisteessä $-\frac{3}{2}$ f:llä on lokaali maksimi $f(-\frac{3}{2})=\frac{563}{36}\approx 15,6$

ja pisteessä 4 f:llä on lokaali minimi $f(4)=-\frac{431}{96}\approx -4,5$



5. $f(x) = x + \cos x$

Derivoimalla saadaan $f'(x) = 1 - \sin x$.

Koska $-1 \le \sin x \le 1$ on $f'(x) \geq 0$, sillä $1 - \sin x \geq 1 - 1 = 0$.

Lisäksi $f'(x) = 0$ kun

$\sin x = 1$

eli $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$.

f:n derivaatta on positiivinen erillisiä pisteitä $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$ lukuunottamatta. Siis f on aidosti kasvava (ks. luennot.)

6.

Olkoon $g(v) = a v^2 e^{-bv^2}$, missä $v > 0$ ja a ja b ovat positiivisia vakioita. Etsitään g:n lokaalit ääriarvot.

Lasketaan derivaatan nollakohdat:

$$g'(v) = a\, 2v\, e^{-bv^2} + a\, v^2 \cdot (-b2v) e^{-bv^2}$$, sillä

ketjusäännön mukaan $De^{-bv^2} = (-b \cdot 2v)\, e^{-bv^2}$, kun sisäfunktiona on $-bv^2$ ja ulkofunktiona e^v.

Siis $g'(v) = (a\, 2v - a\, 2b\, v^3) e^{-bv^2} = 2a(v - bv^3) e^{-bv^2}$.

Koska a on positiivinen oletuksen mukaan ja e^{-bv^2} on kaikilla v:n arvoilla positiivinen ($e^x > 0$ kaikilla x), niin

$g'(v)=0$ täsmälleen silloin kun $v-bv^3=0$.

$$v-bv^3=0$$
$$v(1-bv^2)=0$$

$$v=0 \quad \text{tai} \quad 1-bv^2=0$$
$$\pm\sqrt{\frac{1}{b}}=v.$$

Koska $v>0$ ainoa derivaatan nolla kohta on pisteessä $v=\sqrt{\frac{1}{b}}$.

Koska $2ae^{-bv^2}>0$ ja $v>0$, niin $g'(v)=2ae^{-bv^2}v(1-bv^3)$:n merkki on sama kuin $1-bv^2$:n merkki.

$1-bv^2$ on alaspäin aukeava paraabeli (huomaa, että $b>0$), joten välillä $(0,\frac{1}{\sqrt{b}})$ g' on positiivinen ja välillä $(\frac{1}{\sqrt{b}},\infty)$ g' on negatiivinen.

	0	$\frac{1}{\sqrt{b}}$
g'	$+$	$-$
g	$\nearrow$	$\searrow$

Siis pisteessä $\frac{1}{\sqrt{b}}$ on lokaali maksimi, itseasiassa kulkukaaviosta nähdään, että pisteessä $\frac{1}{\sqrt{b}}$ on g:n suurin arvo, sillä g on aidosti kasvava välillä $(0,\frac{1}{\sqrt{b}})$ ja vähenevä pisteen $\frac{1}{\sqrt{b}}$ jälkeen.

Valitsemalla $a=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$ ja $b=\frac{m}{2kT}$ saadaan g:stä Maxwell-Boltzmann jakauma.

Todennäköisin nopeus on $v=\frac{1}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{2kT}{m}}$.

7. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 12x^2 + 1000$

Derivoidaan

$$f'(x) = x^3 + 2x^2 - 24x = x(x^2 + 2x - 24)$$

$f'(x) = 0$ jos $x = 0$ tai $x^2 + 2x - 24 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-2 \pm 10}{2}$$

eli: $x = 4$ tai $x = -6$.

Nyt $x^2 + 2x - 24 < 0$ kun $-6 < x < 4$ ja < 0 kun $x < -6$ tai $x > 4$, sillä $x^2 + 2x - 24$ on alaspäin aukeava paraabeli.

Derivaatan f' merkki saadaan esim. seuraavasta merkkikaaviosta

		-6	0	4
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x^2+2x-24$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x(x^2+2x-24) = f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
f	↘	↗	↘	↗

TAI derivaatan merkin nollakohtien välillä voi selvittää laskemalla derivaatan arvon jossain välin pisteessä.

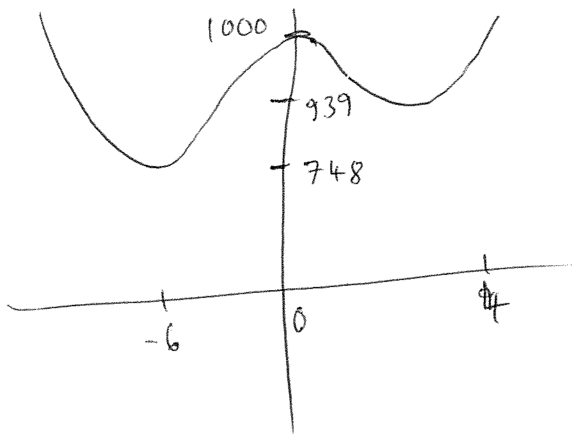
$f'(-7) = -7(49 - 14 - 24) = -77 \rightarrow f'(x) < 0$ välillä $(-\infty, -6)$

ja $f'(-1) = -1(1 - 2 - 24) = 25$

$f'(1) = 1(1 + 2 - 24) = -21$. $f'(5) = 5(25 + 10 - 24) = 55$.

Lokaalit ääriarvot ovat

$$f(-6) = 748$$
$$f(0) = 1000$$
$$f(4) = \frac{2816}{3} \approx 939$$



8. $f(x) = e^{3x} - 75e^{x} + 250$

Derivaatta

$f'(x) = 3e^{3x} - 75e^{x}$, sillä ketjusäännön mukaan

$De^{3x} = 3e^{3x}$, (valitse sisäfunktioksi $3x$ ja ulkofunktioksi e^x).

Derivaatan nollakohdat:

$f'(x) = 0$ kun $3e^{3x} - 75e^{x} = 0 \quad |:3$

$$e^{3x} - 25e^{x} = 0$$

$$e^{3x} = 25e^{x} \quad |:e^{x} \quad e^{x} > 0$$

$$e^{2x} = 25 \quad | \ln(\ldots)$$

$$\ln e^{2x} = \ln 25$$

$$2x = \ln 5^2$$

$$2x = 2\ln 5$$

$$x = \ln 5.$$

Derivaatan ainoa nollakohta on $x = \ln 5$.

Välillä $(-\infty, \ln 5)$ derivaatta on negatiivinen sillä

$$f'(0) = 3 \cdot 1 - 75 = -72.$$

ja välillä $(\ln 5, \infty)$ positiivinen, sillä $f'(2) = 3 \cdot e^6 - 75e^2 \approx 656$.

Kulkukaavio

		$\ln 5$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

f on vähenevä välillä $(-\infty, \ln 5)$ ja kasvava välillä $(\ln 5, \infty)$.

Kulkukaavion mukaan pisteessä $\ln 5$ on nyt f:n pienin arvo. Pienin arvo

$$f(\ln 5) = e^{3 \cdot \ln 5} - 75e^{\ln 5} + 250$$

$$= 5^3 - 75 \cdot 5 + 250 = 0$$

Koska tämä on funktion pienin arvo on kaikilla x

$$f(x) \geq f(\ln 5) \quad \text{eli} \quad f(x) \geq 0$$

eli

$$e^{3x} - 75e^x + 250 \geq 0$$

$$e^{3x} \geq 75e^x - 250$$

$Q = 1$

$C = \frac{1}{3}$ - Cantor

välien pituus $\frac{1}{3^j}$

Kuva $\mathcal{G}$ Cantor joukko s.e. välien pituudet

$$2^{-k} \varphi(k)$$

Poistetut välit

$$\approx 2^{-k} (-\varphi'(k))$$

Dimensio $\quad t \dfrac{1}{\varphi(\log \frac{1}{t})}$

$$f : [0,1] \to [0,1] \quad \text{s.e.} \quad f(C) = \mathcal{G}.$$

f abs. jvq. $\quad f' = \left(\frac{3}{2}\right)^k (-\varphi'(k))$

$$\int f' = \sum_{j=1}^{\infty} 2^j \, 3^{-j} (-\varphi'(k)) \left(\frac{3}{2}\right)^k < \infty$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi'(k) < \infty$$

$$\varphi'(k) = k^{-1-\varepsilon}$$

$$\varphi(k) = k^{-\varepsilon}$$

Dimensio $\quad t \log^{\varepsilon} \frac{1}{t} \qquad \varepsilon > 0$