Demo 9

1) a) $\int 2x^4 - x^3 + 2 + \sqrt{x} - \sqrt[3]{4}\, dx$

$= 2\int x^4 dx - \int x^3 dx + \int x^{1/2} dx$

$+ \int 2 - \sqrt[3]{4}\, dx$

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C,$ kun $n \neq -1$.

$= \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4$

$+ \frac{2}{3}x^{3/2} + (2 - \sqrt[3]{4})x + C.$

b) $\int x^{-1} + x^{-3} + 2\sin x + e^x dx$

$= \ln|x| + \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + 2(-\cos x) + e^x + C$

$= \ln|x| - \frac{1}{2}x^{-2} - 2\cos x + e^x + C.$

c) $$\int \frac{3x^4 - x^{2.99}}{x^3}\,dx$$

$$= \int \frac{3x^4}{x^3} - \frac{x^{2.99}}{x^3}\,dx$$

$$= \int 3x - x^{-0.01}\,dx$$

$$= \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{0.99}x^{0.99} + C$$

$$= \frac{3x^2}{2} - \frac{100}{99}x^{99/100} + C.$$

$$\frac{1}{0.99} = \frac{1}{\left(\frac{99}{100}\right)} = \frac{100}{99}$$

d) $$\int (2x-1)^2\,dx$$

Binomin neliö
$$= \int 4x^2 - 4x + 1\,dx$$

$$= \frac{4x^3}{3} - 2x^2 + x + C.$$

Tai yhdistetyn funktion integroinnilla:

$$\int (2x-1)^2\,dx$$

$f(x) = 2x - 1$

$f'(x) = 2$

$g'(x) = x^2$

$g(x) = \frac{x^3}{3}$

$$= \int \frac{f'(x)}{2}\, g'(f(x))\,dx$$

$= \frac{1}{2} \int f'(x)\, g'(f(x))\, dx$

$= \frac{1}{2}\, g(f(x)) + C$

$= \frac{1}{6}(2x-1)^3 + C.$

Nämä kaksi tapaa antavat toisistaan vain vakiolla eroavan tuloksen, minkä voi halutessaan todeta laskemalla lausekkeen $\frac{1}{6}(2x-1)^2$ avulla.

2 a) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

$= \int \frac{1}{x^{1/2}}\, dx$

$= \int x^{-1/2}\, dx$

$= \frac{1}{-1/2+1}\, x^{-1/2+1} + C$

$= \frac{1}{(1/2)}\, x^{1/2} + C$

$= 2\sqrt{x} + C.$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$

Yhdistetyn funktion integrointi:

$f(x) = 2x+1$

$f'(x) = 2$

$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$g(x) = 2\sqrt{x}$ (a)-kohdan nojalla)

$= \int \frac{f'(x)}{2} g'(f(x)) dx$

$= \frac{1}{2} \int f'(x) g'(f(x)) dx$

$= \frac{1}{2} g(f(x)) + C$

$= \sqrt{2x+1} + C.$

c) $\int e^{3x} + \sin(2x) dx$

$f(x) = 3x$

$f'(x) = 3$

$g'(x) = e^x$

$g(x) = e^x$

$\tilde{f}(x) = 2x$

$\tilde{f}'(x) = 2$

$\tilde{g}'(x) = \sin x$

$\tilde{g}(x) = -\cos x$

$= \int \frac{f'(x)}{3} g'(f(x)) dx$

$+ \int \frac{\tilde{f}'(x)}{2} \tilde{g}'(\tilde{f}(x)) dx$

$= \frac{1}{3} g(f(x)) + \frac{1}{2} \tilde{g}(\tilde{f}(x)) + C$

$= \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{2} \cos(2x) + C.$

③ $f'(x) = g(x) = 2x^2 - x + 5$

Analyysin peruslauseen nojalla

$f(x) = \int g(x)\,dx$ (jollain sopivalla integroimisvakiolla C)

$= \int 2x^2 - x + 5\,dx$

$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + 5x + C.$

Tiedetään että funktion f kuvaaja kulkee pisteen $(-1,1)$ kautta, täten

$1 = f(-1)$

$= \frac{2}{3}(-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2} + 5(-1) + C,$

mistä laskulla saadaan $C = \frac{43}{6}$.

Täten

$f(1) = \frac{2}{3}\cdot 1^3 - \frac{1^2}{2} + 5\cdot 1 + \frac{43}{6}$

$= \frac{37}{3}.$

① a) $\int \frac{x^2}{(x^3+2)^2} dx$

$f(x) = x^3+2$

$f'(x) = 3x^2$

$g'(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$= \int \frac{3x^2}{3} \cdot \frac{1}{(x^3+2)^2} dx$

$g(x) = -\frac{1}{x} = -x^{-1}$

$= \int \frac{f'(x)}{3} g'(f(x)) dx$

$= \frac{1}{3} g(f(x)) + C = -\frac{1}{3(x^2+2)} + C = -\frac{1}{3x^2+6} + C$

---

b) $\int \frac{x^2}{x^3+2} dx$

$f(x) = x^3+2$

$f'(x) = 3x^2$

$g'(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = \ln|x|$

(kuten a)-kohdassa)

$= \frac{1}{3} \int f'(x) g'(f(x)) dx$

$= \frac{1}{3} g(f(x)) + C$

$= \frac{1}{3} \ln|x^3+2| + C$

$= \ln\left(\sqrt[3]{|x^3+2|}\right) + C.$

5) $f: [1, 10] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

$g(x) = \ln x$, $h(x) = x$, $= \dfrac{g(x)}{h(x)}$

$g'(x) = 1/x$ $h'(x) = 1$

Osamäärän derivaatta:

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Nollakohdat:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \overset{!}{=} 0 \quad | \cdot x^2$$

(ok, $x^2 \neq 0$ kun $1 \leq x \leq 10$)

$$1 - \ln x = 0$$

$$\ln x = 1$$

$$x = e.$$

Funktion ääriarvot löytyvät joko derivaatan nollakohdista tai välin päätepisteistä.

$$f(1) = \frac{\ln 1}{1} = \frac{0}{1} = 0$$ Pienin arvo.

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} \approx 0.368$$ Suurin arvo.

$$f(10) = \frac{\ln 10}{10} \approx 0.230.$$

Vastaus: Pienin arvo $f(1) = 0$

Suurin arvo $f(e) = \frac{1}{e}$.

6.) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

Funktio f on määritelty kun neliöjuuren argumentti on positiivinen.

$$1 - x^2 \geq 0 \quad \cancel{1} + x^2$$

$$x^2 \leq 1 \text{, eli } -1 \leq x \leq 1.$$

Funktion f määrittelyjoukko siis on väli $[-1, 1]$.

$f(x) = g(x)h(x)$, kun $g(x) = x$, $h(x) = \sqrt{1-x^2}$.

$$f'(x) = (g(x)h(x))'$$

$$\overset{\text{Tulon derivaatta}}{=} g'(x)h(x) + g(x)h'(x).$$

$$= \sqrt{1-x^2} + x h'(x).$$

Lasketaan $h'(x)$.

$h(x) = \sqrt{1-x^2} = j(i(x))$, kun $j(x) = \sqrt{x}$, $i(x) = 1-x^2$.

$$h'(x) \underline{\overset{\text{Yhdistetyn funktion derivaatta}}{=}} i'(x)j'(i(x))$$

$$= -\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

$i'(x) = -2x$

$j'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Täten

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \left(-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{1}^{(\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Derivaatan nollakohdat ovat polynomin $1-2x^2$ nollakohdat, eli $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ (esim. 2. asteen yhtälön ratkaisukaavalla)

Funktion ääriarvot löytyvät joko välin päistä tai derivaatan nollakohdista.

$$f(-1) = -1\sqrt{1-(-1)^2} = -1 \cdot \sqrt{0} = 0.$$

$$f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})^2}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{1}{2}.$$

(eli $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2}$.)

$$f(1) = 1 \cdot \sqrt{1-1^2} = 0.$$

Vastaus: Pienin arvo $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2}$,

suurin arvo $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}$.

7. Alkuperäinen $\frac{\text{tuotto}}{\text{kirja}}$: 15 €/kpl

Alkuperäinen myynti: 300 kpl.

Alennuksen jälkeinen $\frac{\text{tuotto}}{\text{kirja}}$: $(15 - 0.10x)$ €/kpl

— II — myynti $(300 + 6x)$ kpl

$$\text{Kokonaistuotto} = \frac{\text{tuotto}}{\text{kirja}} \cdot \text{myynti}$$

merkitään $= f(x)$

$$= \left(15 - \frac{x}{10}\right)(300 + 6x)$$

$$= -\frac{3}{5}x^2 + 60x + 4500.$$

Funktion f kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, ~~täten~~ funktio f saavuttaa globaalin maksiminsa paraabelin huipulla, joka sijaitsee funktion f derivaatan ainoassa nollakohdassa.

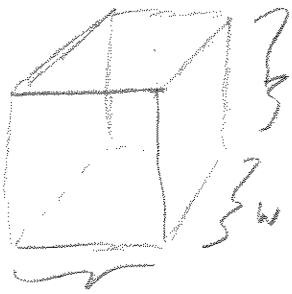
$$f'(x) = -\frac{6}{5}x + 60 \stackrel{!}{=} 0,$$

mistä saadaan $x = 50$.

Täten optimaalinen tuotto saadaan kun yhdestä kirjasta saatava tuotto on 10€.

Vastaus: Kirjaa tulisi myydä hinnalla $\underline{\underline{25€}}$.

(8.)



h, korkeus (dm),

w, pohjasärmän pituus (dm)

$h > 0$, $w > 0$

Tilavuusehto:

$$w^2 h = 1$$

(koska $dm^3 = l$).

Täten $h = \frac{1}{w^2}$,

$$\text{ja } \frac{h}{w} = \frac{1}{w^3}.$$

Peltiä kuluu astiaan

$$f(w) = \underbrace{4hw}_{\text{seinät}} + \underbrace{w^2}_{\text{pohja.}}$$

$$= \frac{4}{w} + w^2.$$

$$f'(w) = -\frac{4}{w^2} + 2w.$$

Derivaatan nollakohdat:

$$f'(w) = -\frac{4}{w^2} + 2w \doteq 0 \quad \Big| + \frac{4}{w^2}$$

$$2w = \frac{4}{w^2} \quad \Big| \cdot \frac{w^2}{2}, \text{ ok, koska } w \neq 0$$

(jos $w=0$, astialla ei ole tilavuutta)

$$w^3 = 2$$

$$w = \sqrt[3]{2}.$$

Onko kyseinen nollakohta funktion f globaali minimi? Tehdään funktion f kulkukaavio.

	0		$\sqrt[3]{2}$	
f'		$-$		$+$
f		$\searrow$		$\nearrow$

globaali minimi.

$$1 < \sqrt[3]{2} < 2$$

$$f'(1) = -4 + 2 = -2 < 0$$

$$f'(2) = -\frac{4}{4} + 2 \cdot 2 = 3 > 0.$$

(Derivaatta voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdassa)

<u>Vastaus:</u> Mahdollisimman vähän peltiä kuluu, kun korkeuden h ja pohjasärmän suhde w,

$$\frac{h}{w} = \frac{1}{w^3} = \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^3} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$