

**FYSP111, Derivointi ja integrointi****1. harjoitus, 20.1.2016**

1. Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^3 - 3x$. Määrittää joukko $f^{-1}([0, 2[)$. Piirrä kuva.

2. Johda kaava

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

3. Luentomonisteen tehtävä (7) sivulla 12.

4. Osoita, että

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Mitä tämä tarkoittaa geometrisesti?

5. Sievennä

$$\cos(\arcsin x) \text{ ja } \arcsin(\cos x).$$

Jälkimmäisessä riittää tarkastella tapausta $0 \leq x \leq \pi$.

6. Ratkaise yhtälö

$$\cos 2x + \cos x + 1 = 0.$$

7. Laske $\tan \varphi$, kun tiedämme, että $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ja $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.

8. Johda kaava

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

9. Osoita, että

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.$$

10. Johda hyperbolisen sinin käänteisfunktiolle esitys

$$\operatorname{arsinh} x = \log \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right).$$

11. Kolmannen asteen yhtälöllä

$$x^3 + px + q = 0$$

on yksi reaalinen juuri, kun $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$. Tekemällä yhtälöön sijoitus $x = u + v$ ja asettamalla ehto $uv = -p/3$ johda juurelle kaava

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

12. Tarkastellaan kolmannen asteen yhtälöä

$$x^3 + px + q = 0$$

tilanteessa $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \leq 0$, jolloin sillä on kolme reaalista juurta. Tekemällä yhtälöön sijoitus $x = 2\sqrt{-p/3} \cos t$ ja käyttämällä tehtävän 8 kaavaa johda yhtälölle ratkaisukaava.