



FYSP111, Derivointi ja integrointi
4. harjoitus, 10.2.2016

- Määrää käyrän $y^3 - 3y + x = 0$ tangentit niissä pisteissä, joissa käyrä leikkaa y -akselin. Hahmottele kuva.
- Määrää sykloidin

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

normaali, eli tangenttia vastaan kohtisuora suora, kohdassa $x = \frac{\pi}{2} - 1$.

- Tutki funktion $f(x) = (x - 1)^2 + \log x - x + 1$, $x > 0$, kulkua. (kasvaminen, väheneminen, ääriarvot, kupuruus, käännepeisteet, ...). Hahmottele kuvaaja.
- Paperin kääntöpuolella olevaan kuvaan on piirretty funktion f **derivaatan** kuvaaja $y = f'(x)$.
 - Mitä voit tämän perusteella päätellä funktion f ääriarvoista, kasvamisesta ja vähenemisestä sekä kupuruudesta ja käännepeisteistä?
 - Hahmottele funktion f kuvaaja $y = f(x)$, kun $f(3) = 0$.
 - Hahmottele f :n toisen derivaatan kuvaaja $y = f''(x)$.

- Oletetaan, että funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on kaksi kertaa derivoituva, $f'(x_0) > 0$ ja $f''(x) \geq 0$ kaikilla $x \geq x_0$. Osoita, että

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Selitä tulos geometrisesti.

- Määrää funktion $f(x) = \sin x \cdot \cos^2 x$ neljännen asteen Taylorin polynomi nollassa.
- Määrää raja-arvot

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x^3) - x^3}{x^4(e^{x^2} - 1)}$$

- Kosmisessa säteilyssä maahan voi tulla elektroneja, joiden liike-energia on 100 TeV, jolloin suhteellisuusteoreettinen ns. Lorentzin tekijä $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ saa likimain arvon $\gamma \approx 10^8$. Kuinka lähellä valon nopeutta c on tällaisen elektronin nopeus v ?
- Kuinka tarkkoja likiarvoja saadaan sinin arvoille välillä $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ käyttämällä likiarvojen laskemiseen seitsemännen asteen Taylorin polynomia

$$T_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}.$$

- Osoita, että

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

