



**FYSP111, Derivointi ja integrointi**  
**6. harjoitus, 24.2.2016**

1. Olkoon  $f$  parillinen funktio. Osoita, että

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

2. Laske syklodin (moniste s. 41) ja  $x$ -akselin väliin jäävän alueen pinta-ala.
3. Laske syklodin kaarenpituus.
4. Miltä näyttää paraabelin  $y = x^2$  yhtälö napakoordinaateissa? Laske paraabelin kaarenpituus välillä  $0 \leq x \leq 1$ .
5. Logaritmisen spiraalin yhtälö napakoordinaateissa on  $r = e^{-\varphi}$ . Laske logaritmisen spiraalin pituus välillä  $0 \leq \varphi < \infty$ . Hahmottele kuva!
6. Olkoon annettu käyrän  $\Gamma$  esitys napakoordinaateissa:  $r = r(\varphi)$ . Miten käyrän tangentin kulmakerroin pisteessä  $(x, y)$  lausutaan napakoordinaattiesityksen avulla? Määrittää logaritmisen spiraalin  $r = e^{-\varphi}$  tangenti pisteessä  $(x, y) = (1, 0)$ . Hahmottele kuva.
7. Tarkastellaan napakoordinaateissa annettua käyrää  $r = \sin 2\varphi$  ( $r \geq 0$ ). Hahmottele kuva! Laske käyrän rajoittaman alueen pinta-ala. Millainen on käyrän yhtälö  $xy$ -koordinaateissa?
8. Johda ympyräpohjaisen kartion tilavuuden kaava  $V = \frac{1}{3} A_p h$ , missä  $A_p$  on kartion pohjan pinta-ala ja  $h$  on kartion korkeus.
9. Laske epäoleellinen integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}$$

10. Osoita, että epäoleellinen integraali (gammafunktio)

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$

suppenee kaikilla  $s > 0$  ja että  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ . Laske  $\Gamma(n)$ , kun  $n > 0$  on luonnollinen luku.

11. Esitä epäoleellinen integraali

$$\int_0^{\infty} x^p e^{-ax^2} dx$$

gammafunktion avulla.