



FYSP111, Derivointi ja integrointi
Kertaustehtäviä

1. Kolmannen asteen polynomilla $P(x)$ on kaksinkertainen nollakohta pisteessä $x = 1$ ja lokaali ääriarvo $P(0) = 1$ pisteessä $x = 0$. Määrä polynomi $P(x)$.

2. Ratkaise yhtälöt

$$\cos x = \sin 2x, \quad \arcsin(\cos x) = x, \quad \sin(\arccos x) = x.$$

3. Määrä raja-arvot

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \log(1 + x)}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{\sin(x^3)}.$$

4. Mikä on lyhin x -akselin kautta kulkeva tie xy -tasossa pisteestä $(0, 3)$ pisteeseen $(4, 1)$?

5. Tutki funktion $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ kulkua (kasvaminen, väheneminen, ääriarvot, kupuruus, asymptootit). Hahmottele kuvaaja.

6. Määrä funktion $f(x) = e^{-x^2} \sin(x^2)$ kuudennen asteen Taylorin polynomi origossa.

Määrä integraalifunktiot:

7.

$$\int \frac{1}{x^4 - 1} dx, \quad \int \frac{dx}{2 + e^x}, \quad \int x^3 \cos(x^2) dx.$$

8.

$$\int \sqrt{1 + e^x} dx, \quad \int \frac{\sqrt{x}}{1 + x} dx, \quad \int \frac{dx}{\tan x + \sin x}.$$

9. Määrä ellipsin $x^2/4 + y^2 = 1$ tangentti pisteessä $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

- (a) ratkaisemalla yhtälöstä y x :n funktiona.
- (b) käyttämällä implisiittistä derivointia.
- (c) käyttämällä parametriesitystä

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = \sin t. \end{cases}$$

10. Laske ellipsin $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ rajoittaman alueen pinta-ala.

11. Hahmottele käyrä

$$\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = t^2 \end{cases}$$

ja laske sen rajoittaman silmukan ala.

12. Määrä edellisen tehtävän käyrälle pisteeseen $(\sqrt{2}, 2)$ piirretyn tangentin yhtälö.

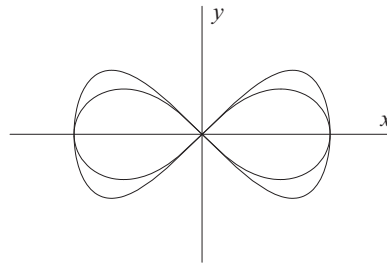
13. Käyrän yhtälö on $x^2 = y^2 - y^4$. Määrä käyrän pisteeseen $(-\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{2})$ piirretyn tangentin yhtälö. Hahmottele kuva!

14. Oheisessa kuvassa on kaksi ∞ -merkin muotoista käyrää. Toisen parametriesitys on

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \frac{1}{2} \sin(2t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

ja toisen yhtälö napakoordinaateissa on

$$r^2 = \cos(2\varphi).$$



Kumpi käyristä on sisempi ja kumpi ulompi? Laske käyrien väliin jäävän alueen pinta-ala.

15. Olkoon f jatkuva jaksollinen funktio jaksona ω . Osoita, että integraalin

$$\int_x^{x+\omega} f(t) dt$$

arvo ei riipu x :stä.

16. Laske integraalille

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$$

likiarvo approksimoimalla integroitavaa funktiota sen toisen asteen Taylorin polynomilla origossa. Arvioi tuloksen tarkkuutta.

17. Millä a :n arvolla käyrän $y = \frac{1}{x^2+1}$ ja x -akselin väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $a \leq x \leq a + 1$ on suurin mahdollinen?

18. Tarkastellaan käyrää $y^2 = x^3$. Määrä käyrän yhtälö napakoordinaateissa. Etsi käyrälle jokin parametriesitys. Laske käyrän pituus välillä $0 \leq y \leq 1$.

19. Ympyrä $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ ($0 < r < R$) pyörii x -akselin ympäri. Laske näin syntyvän rinkelin tilavuus.

20. Laske seuraavat epäoleelliset integraalit.

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx \quad \int_0^1 \log x dx$$

21. Selvitä suppenevatko seuraavat epäoleelliset integraalit.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} \quad \int_0^{\infty} \sin(e^{-x}) dx$$

22. Ratkaise differentiaaliyhtälöt

$$x y' = 1 - y^2, \quad y' + 2y = e^x + x, \quad y' - y = e^x.$$

23. Ratkaise alkuarvot tehtävät

$$y' = 2y - y^2, \quad y(1) = 1, \quad y' = \sin y, \quad y(0) = 0.$$

24. Yksinkertainen väestöennuste. Olkoon t aika ja $p(t)$ (esim. maapallon) väestömäärä hetkellä t . Jos oletamme, että syntyvyys on vakio ja kuolleisuus suoraan verrannollinen väkilukuun, niin saamme väestön kasvua kuvaavan differentiaaliyhtälön:

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = a - bp(t),$$

missä a ja b ovat positiivisia vakioita. Ratkaise tämä differentiaaliyhtälö alkuehdolla $p(t_0) = p_0$. Miten $p(t)$ käyttäytyy, kun $t \rightarrow \infty$?

25. Tiedämme, että syntyvyys on noin 2,9%, ja vuonna 1961, kun maapallon väkiluku oli 3,06 miljardia vuotuinen väestönkasvu oli noin 2%. Laadi näiden tietojen perusteella edellisen tehtävän mallin mukainen maapallon väestön kasvuennuste.