Matematiikan propedeuttinen kurssi

Tommi Brander

Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tiivistelmä

Luentomuistiinpanot matematiikan propedeuttiselle kurssille syksylle 2016. Kurssi käsittelee analyyttistä geometriaa, derivointia ja integrointia, yhtälöryhmiä ja epäyhtälöitä. Muistiinpanoja on päivitetty viimeksi 17. marraskuuta 2016.

Sisältö

Yleisiä opiskeluohjeita ja tiedonlähteitä löytyy liitteestä A, kun taas kurssin yleiset käytännöt löytyvät liitteestä B.

1 Luku, joukko ja funktio

Ensimmäisessä osassa käymme läpi tai kertaamme matematiikan peruskäsitteitä.

Syvempää tietoa joukoista, funktiosta ja muustakin saa Johdatus matematiikkaan -kurssilta ja sen luentomonisteesta [2].

Joukko on kokoelma **alkio**ita. Joukko voidaan ilmaista luettelemalla kaikki sen alkiot aaltosulkeiden sisällä; esimerkiksi joukko $\{\text{kuutti}, \text{siili}, \text{sika}\}$ sisältää kolme alkiota. Väitettä 'alkio x kuuluu joukkoon A' merkitään $x \in A$; esimerkiksi siili $\in \{\text{kuutti}, \text{siili}, \text{sika}\}$, mutta $5 \notin \{\text{kuutti}, \text{siili}, \text{sika}\}$.

Joukkojen erotusta merkitään $A \setminus B$. Erotusjoukkoon kuuluvat kaikki joukon A alkiot, jotka eivät ole joukossa B.

Kokonaisluvut $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$[1]

Rationaaliluvut $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}; m,n \in \mathbb{Z} \text{ ja } n \neq 0\right\}$. Rationaaliluvut ovat siis kokonaislukujen osamäärät, joissa jakajana ei ole nolla. Murtoluku on yksi tapa esittää rationaaliluku.

Reaaliluvut $\mathbb{R}$ on kaikkien 'tavallisten' lukujen joukko, joka sisältää rationaalilukujen lisäksi irrationaaliluvut, kuten π ja $\sqrt{2}$.

Irrationaaliluvut $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ on niiden reaalilukujen joukko, jotka eivät ole rationaalisia.

Rationaalilukujen joukon määritelmässä esiintyi joukko-opillinen merkintä $\{\text{jokin asia}; \text{ehto}\}$. Joukkoon kuuluvat ennen puolipistettä (tai kaksois-

[1] Kirjain $\mathbb{Z}$ tulee saksankielisestä sanasta Zahl, luku.

pistettä tai pystyviivaa) esiintyvät asiat, jotka toteuttavat puolipisteen jälkeen mainitun ehdon tai ehdot.

Lukujoukoille pätee $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, missä merkintä $\subset$ (joskus $\subseteq$) tarkoittaa **osajoukko**a. Koska jokainen luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{Z}$ alkio on myös kokonaislukujen joukon $\mathbb{R}$ alkio, on väite $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ tosi.

Lisätietoa lukujoukoista ja reaalilukujen määritelmä löytyy kurssin 'Lukualueet' luentomonisteesta [4].

Merkkiä ∞ (joskus $+\infty$), luetaan **ääretön**, käytetään tarkoittamaan kaikkia reaalilukuja suurempaa arvoa. Kyseessä ei ole luku; ääretön ei kuulu mihinkään lukujoukkoon eikä sillä voi laskea kuin reaaliluvuilla. Vastaavasti merkintä $-\infty$ tarkoittaa kaikkia lukuja pienempää arvoa, joka ei myöskään ole luku.

1.1 Laskusäännöt

Reaaliluvut toteuttavat seuraavat laskusäännöt:

Laskusääntö 1.1.1. Olkoon $a,b,c \in \mathbb{R}$. Tällöin

1. $a + b = b + a$ ja $ab = ba$ (vaihdannaisuus).
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$ ja $a(bc) = (ab)c$ (liitännäisyys). Sulut jätetään usein kirjoittamatta.
3. $a(b + c) = ab + ac$ (osittelu).
4. $a + (-a) = a - a = 0$ (vastaluku).
5. kun pätee $a \neq 0$, niin $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ (käänteisluku).
6. kun pätee $ab = 0$, niin silloin $a = 0$ tai $b = 0$. (tulon nollasääntö)

Lause 1.1.2 (Murtolukujen laskusäännöt)**.** *Olkoot a, b, c ja d reaalilukuja ja $b \neq 0$ ja $d \neq 0$. Tällöin lausekkeet a/b ja c/d on määritelty ja niillä pätevät seuraavat laskusäännöt:*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \tag{1.1.1}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} \tag{1.1.2}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd} \tag{1.1.3}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right) / \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{ad}{bc} \text{ kun myös } c \neq 0 \tag{1.1.4}$$

$$\tag{1.1.5}$$

Yhteen- ja vähennyslaskun laskusääntöjä ei kannata opetella ulkoa, vaan johtaa tarvittaessa käyttämällä tietoa, että samaninimisiä murtolukuja (eli niitä, joilla on sama nimittäjä eli alakerta) voi laskea yhteen ja vähentää.

Yhteenlaskukaavan perustelu, joka käyttää kertolaskun kaavaa.

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \cdot 1 + \frac{c}{d} \cdot 1 \\
&= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} + \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b} \\
&= \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} \\
&= \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} \\
&= \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} \\
&= \frac{ad + bc}{bd}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Matemaattisten todistusten lukemisesta voi lukea liitteestä A.2.

Esimerkki 1.1.3.

$$
\begin{aligned}
3 + \frac{7}{2} &= \frac{3}{1} + \frac{7}{2} \\
&= \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{7}{2} \\
&= \frac{6}{2} + \frac{7}{2} \\
&= \frac{6 + 7}{2} \\
&= \frac{13}{2}.
\end{aligned}
$$

Laskuista voi jättää välivaiheita pois sitä mukaa, kun ne alkavat sujumaan, mutta jos joutuu ajattelemaan tai epäilee jonkin vaiheen totuutta, niin lisävälivaiheiden kirjoittaminen on hyvä ratkaisu.

1.2 Järjestys

Merkitsemme $a < b$, kun luku a on aidosti lukua b pienempi. Tällöin myös $b > a$, eli luku b on aidosti lukua a suurempi.

Merkintä $a \leq b$ tarkoittaa, että joko $a < b$ tai $a = b$. Vastaavasti $b \geq a$.

Laskusääntö 1.2.1. Olkoot a, b ja c reaalilukuja. Tällöin:

1. Jos $a > 0$ ja $b > 0$, niin $ab > 0$.

2. Jos $a > 0$ ja $b < 0$, niin $ab < 0$.
3. Jos $a < 0$ ja $b < 0$, niin $ab > 0$.
4. Jos $a > b$ ja $c > 0$, niin $ac > bc$.
5. Jos $a > b$ ja $c < 0$, niin $ac < bc$.

1.3 Potenssi

Reaaliluvun a potenssia merkitään a^p. Jos p on positiivinen kokonaisluku, niin $a^p = a \cdot a \cdots a$, missä lukuja a on p kappaletta. Muut rationaalipotenssit palautetaan yksinkertaiseen tapaukseen laskusäännöillä 1.3.1. Reaalipotenssit palautetaan rationaalipotensseihin raja-arvoja käyttämällä; emme käsittele asiaa enempää tässä luentomonisteessa.

Merkintä a^p on määritelty, kun
1. $a > 0$, $p \in \mathbb{R}$
2. $a \neq 0$, $p \in \mathbb{Z}$
3. $a = 0$, $p > 0$
4. $a \in \mathbb{R}$, p on muotoa $1/m$, missä m on pariton kokonaisluku.

Laskusääntö 1.3.1. Olkoot $a,b,m,n \in \mathbb{R}$. Seuraavat laskusäännöt pätevät, kun potenssimerkinnät on määritelty.
1. $a^{-m} = 1/a^m$
2. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $(ab)^m = a^m \cdot b^m$
5. $a^0 = 1$ kun $a \neq 0$
6. $0^p = 0$ kun $p > 0$

Olkoon $a > 0$ ja m positiivinen kokonaisluku. Säännön 1.3.1 kohdan 3 perusteella

$$\left(a^{1/m}\right)^m = a^1 = a, \tag{1.3.1}$$

joten

$$a^{1/m} = \sqrt[m]{a}. \tag{1.3.2}$$

Erikoistapauksena tästä $\sqrt{a} = a^{1/2}$, kun $a > 0$.

Emme todista seuraavaa väitettä tällä kurssilla.

Lause 1.3.2 (Potenssi ja järjestys)**.** *Olkoot a ja b reaalilukuja ja p positiivinen reaaliluku.*
1. *Aina $a^2 \geq 0$.*
2. *Jos $0 < a < b$, niin $0 < a^p < b^p$.*

Muistikaavat auttavat niin matematiikassa kuin päässälaskussa:

Lause 1.3.3 (Muistikaavat)**.** *Olkoot a ja b mitä tahansa reaalilukuja. Tällöin seuraavat yhtälöt ovat tosia:*

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1.3.3}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{1.3.4}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \tag{1.3.5}$$

Seuraava todistus noudattaa hyvin löyhästi Leslie Lamportin ohjeistusta [3].

Ensimmäisen muistikaavan todistus.

1. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ potenssin määritelmän nojalla.
2. $(a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b$ osittelulain nojalla.
3. $(a+b)a + (a+b)b = aa + ba + ab + bb$ osittelulain (ja vaihdannaisuuden) nojalla.
4. $aa + ba + ab + bb = a^2 + ba + ab + b^2$ potenssin määritelmän nojalla.
5. $a^2 + ba + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ vaihdannaisuuden nojalla.
6. Aiempien kohtien yhtäsuuruuksien perusteella $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

□

Esimerkki 1.3.4. Jotkut päässälaskut helpottuvat muistikaavoilla:

$$101^2 = (100+1)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10000 + 200 + 1 = 10201 \tag{1.3.6}$$

Onko vastauksessa järkeä? Ainoa tapa olla varma on todistaa vastaus oikeaksi, mutta usein on olemassa tarkistuskeinoja, joilla voi helposti havaita joitakin laskuvirheitä. Jos laskemme 100^2, niin vastauksen pitäisi olla vähän pienempi; ja $100^2 = 10000$, joka on vähän pienempi kuin 10201. Lisäksi, koska 101 on pariton luku, ja kahden parittoman luvun tulo on pariton, pitäisi vastauksen olla pariton. 10201 on pariton.

Esimerkki 1.3.5. Osoita, että $x^2 - 6x + 12 \geq 0$ kaikilla reaaliluvuilla x.

1. $x^2 - 6x + 12 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 12$ laskemalla kertolasku $2 \cdot 3 = 6$, sekä vaihdannaisuudella.
2. $12 = 9 + 3 = 3^2 + 3$ yhteenlaskulla ja potenssin määritelmällä.
3. $x^2 - 6x + 12 = (x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) + 3$ edeltävien kohtien perusteella. Sulut on lisätty selvyyden vuoksi ja liitännäisyys oikeuttaa niiden lisäämisen.
4. $(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) + 3 = (x-3)^2 + 3$ muistikaavan nojalla [2].

[2] Muistikaavaa käytetään "oikealta vasemmalle", missä ei ole mitään väärää – yhtäsuuruusmerkki toimii molempiin suuntiin, koska se kertoo lausekkeiden saavan saman arvon.

5. Kaikilla reaaliluvuilla x pätee $(x-3)^2 \geq 0$ potenssin ominaisuuksien perusteella.
6. $x^2 - 6x + 12 \geq 0 + 3$ kolmen edellisen kohdan perusteella.
7. $0 + 3 = 3 \geq 0$, mistä väite seuraa edellisen kohdan perusteella.

1.4 Väli

Määritelmä 1.4.1 (Välit)**.** Avoin väli $]a,b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ on niiden lukujen joukko, jotka ovat lukujen a ja b välissä, poislukien päätepisteet a ja b. Myös merkintää (a,b) käytetään, erityisesti englanninkielisissä maissa.

Suljettu väli $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ on niiden lukujen joukko, jotka ovat lukujen a ja b välissä, mukaanlukien päätepisteet a ja b.

Puoliavoimet välit $[a,b[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ on niiden lukujen joukko, jotka ovat lukujen a ja b välissä, mukaanlukien päätepiste a ja poislukien päätepiste b. Vastaavasti $]a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$. Puoliavoin väli ei ole avoin eikä suljettu.

Rajoittamattomat välit $[a,\infty[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$ on niiden lukujen joukko, jotka ovat suurempia tai yhtä suuria kuin luku a; väli on suljattu. Vastaavasti $]a,\infty[= \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$ on avoin väli, $]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$ on avoin väli ja $]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$ on suljettu väli.

Reaaliakseli $]-\infty,\infty[= \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ on kaikkien reaalilukujen joukko, ja sekä avoin että suljettu väli.

Tyhjä joukko $\emptyset$ on tyhjä joukko, johon ei kuulu mikään luku. Tyhjä joukko on sekä avoin että suljettu väli.

Huomaa, että merkintöjä kuten $[a,\infty]$ ei ole määritelty; koska ääretön ei ole luku, ei voida mielekkäästi kirjoittaa sen kuulumisesta reaalilukujen muodostamalle välillä.[3]

1.5 Lauseke

Lauseke koostuu luvuista ja muuttujista, jotka on yhdistetty laskutoimituksilla niin, että kun muuttujille antaa arvot, lausekkeella on jokin reaaliluku arvona. Sulkeita käytetään laskujärjestyksen määrittämiseksi.

Lauseke on hyvin määritelty, jos sen arvon voi laskea. Esimerkiksi nollalla jakamisesta tai negatiivisen luvun neliöjuuren ottamisesta seuraa, että lauseke ei ole hyvin määritelty, eikä sen arvoa voi laskea.

[3] “Mistä ei voi puhua, siitä on vaiettava.” [5]

Esimerkki 1.5.1 (Lausekkeita)**.** Seuraavat lausekkeet ovat hyvin määriteltyjä:

$$(2 \cdot 4 - \pi) \cdot e \tag{1.5.1}$$

$$-\frac{11x}{y^4 + 5\pi}. \tag{1.5.2}$$

Seuraava lausekke on määritelty hyvin, kunhan $x \neq 2$:

$$y^{2016} + \frac{666}{x-2}. \tag{1.5.3}$$

Seuraava lausekke on määritelty hyvin, kunhan $x \leq 5$:

$$\sqrt{5-x}. \tag{1.5.4}$$

Tehtävä 1.5.2. Etsi neljä virhettä (jotka estävät lauseketta olemasta hyvin määritelty):

$$\left(\frac{g}{6 - 2 \cdot 3} - \sqrt{} + \right) 0^0. \tag{1.5.5}$$

1.6 Funktio

Funktio eli kuvaus $f\colon A \to B$ on sääntö, joka liittää jokaiseen joukon A alkioon täsmälleen yhden joukon B alkion; merkintä tälle on $f(a) = b$, kun $a \in A$ ja $b \in B$. Joukkoa A kutsutaan funktion f määrittelyjoukoksi ja joukkoa B maalijoukoksi. Kaksi funktiota ovat samat, jos niillä on sama määrittelyjoukko, sama maalijoukko, ja sama sääntö. Tällä kurssilla määrittelyjoukkona on yleensä kaikkien reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$, joku sen väli, tai useamman välin yhdiste. Maalijoukkona on reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$. Funktion sääntö ilmaistaan usein lausekkeena, jonka on oltava hyvin määritelty funktion määrittelyjoukossa.

Reaalifunktio tulkitaan usein sen kuvaajan eli graafin kautta. Tällöin funktion määrittelyjoukko on koordinaatiston vaaka-akselin suuntainen (usein x-akseli) ja maalijoukko on pysty- eli usein y-akselin suuntainen. Funktion arvo jossain pisteessä kertoo, kuinka korkealle funktion kuvaaja piirretään kyseisen pisteen kohdalla.

Esimerkki 1.6.1. Määritellään kuvaus $v\colon L \to \{\text{vihreä}, \text{keltainen}, \text{punainen}, \text{ei toimi}\}$ asettamalla L olemaan liikennevalojen joukko ja määrittämällä kuvauksen arvo liikennevalon näyttämän värin mukaan (tietyllä ajanhetkellä, esimerkiksi tämän tekstin kirjoitushetkellä).

Määritellään kuvaus $j\colon E \to \mathbb{Z}$ seuraavasti: E on selkärankaisten eläinlajien joukko[4], $\mathbb{Z}$ on kokonaislukujen joukko, ja funktio j kertoo, kuinka monta

[4] Jätämme tässä huomiotta, että eläinlaji on varsin hankala käsite määritellä tarkasti.

jalkaa terveellä ja aikuisella kyseisen eläinlajin edustajalla on. Esimerkiksi $j(\text{koira}) = 4$, mutta $j(\text{limasieni})$ ei ole määritelty, koska limasieni ei ole selkärankainen. Millekään eläinlajille z ei päde, että $j(z) = 7$, mutta $7 \in \mathbb{Z}$; tämä ei ole ongelma, vaan kuvauksen määritelmä sallii tämän.

Esimerkki 1.6.2 (Lausekkeiden avulla määriteltyjä funktioita)**.** Funktio $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(c) = \frac{1}{2}c^2 - 4c - 11, \tag{1.6.1}$$

on hyvin määritelty – lauseke saa reaalilukuarvon kun muuttujan c paikalle laitetaan mikä tahansa reaaliluku.

Funktio $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(u) = u^{-1}, \tag{1.6.2}$$

on hyvin määritelty, koska $-1 \in \mathbb{Z}$. Funktio ei olisi määritelty kaikilla reaaliluvuilla, koska $f(0)$ ei ole määritelty; siksi nolla on poistettu määrittelyjoukosta.

Funktio $h\colon [-2{,}11 + \pi] \to [0{,}\infty[$,

$$h(a) = \sqrt{a+5}, \tag{1.6.3}$$

on hyvin määritelty. Sen voisi määritellä suuremmassa joukossa $[-5{,}\infty[$ samalla lausekkeella, mutta näin ei tarvitse tehdä.

1.7 Summamerkintä

Kreikkalainen kirjain sigma, kirjoitetaan isona kirjaimena Σ, vastaa aakkostomme S-kirjainta. Symbolia käytetään lyhentämään pitkä yhteenlasku[5] lyhyemmäksi. Merkintä

$$\sum_{j=a}^{b} f(j) \tag{1.7.1}$$

tarkoittaa lauseketta $f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \ldots f(b-1) + f(b)$. Merkintä olettaa, että a ja b ovat kokonaislukuja ja $a \leq b$. Kirjaimen j paikalle siis sijoitetaan ensin a, sitten $a+1$, ja jatketaan kunnes vastaan tulee luku b. Kaikki näin saadut luvut lasketaan yhteen.

Indeksinä voi olla jokin muu kirjain kuin j; i ja k ovat suosittuja.

[5] Summa, eli S, eli Σ. Vastaavasti tulo product voidaan lyhentää p-kirjainta vastaavalla kirjaimella pii, eli Π.

Esimerkki 1.7.1.

$$\sum_{i=0}^{4} 2i = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 20 \tag{1.7.2}$$

$$\sum_{k=2}^{3} \frac{e^{2k}}{k-4} = \frac{e^{2\cdot 2}}{2-4} + \frac{e^{2\cdot 3}}{3-4} = -\frac{1}{2}e^4 - e^6 \tag{1.7.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} j = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{1}{2}n\,(n+1) \tag{1.7.4}$$

1.8 Itseisarvo

Reaaliluvun a **itseisarvo**, merkitään a, määritellään lausekkeella

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{kun } a \geq 0 \\ -a, & \text{kun } a < 0. \end{cases} \tag{1.8.1}$$

Itseisarvo on myös funktio $|\cdot| : \mathbb{R} \to [0,\infty[$, jonka säännön määrää lauseke (1.8.1).

Esimerkki 1.8.1.
- $|11| = 11$, koska $11 \geq 0$.
- $|-11| = -(-11) = 11$, koska $-11 < 0$.
- Kaikille reaaliluvuille y pätee $|y^2 + 4| = y^2 + 4$, koska $y^2 + 4 \geq 4 \geq 0$.
- $|x| = 4$ jos ja vain jos $x = 4$ tai $x = -4$.

Lause 1.8.2 (Itseisarvon ominaisuuksia)**.** *Kaikille reaaliluvuille x ja y pätee*
- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0$ *vain ja ainoastaan kun* $x = 0$
- $|xy| = |x|\,|y|$
- $|x| + |y| \geq |x + y|$ *(kolmioepäyhtälö)*

Itseisarvo tulkitaan luvun etäisyydeksi nollasta, tai luvun ja nollan välisen janan pituudeksi.

2 Yhtälöt ja epäyhtälöt

Matematiikassa **yhtälö** koostuu kahdesta lausekkeesta, joiden välillä on yhtäsuuruusmerkki =.

Yhtälöä ratkaistessa pyritään etsimään se tai ne muuttujan tai muuttujien arvot, jotka toteuttavat annetun kaavan. Muuttujien arvoja kutsutaan yhtälön **ratkaisuiksi**, ja niiden muodostamaa joukkoa yhtälön **ratkaisujoukoksi**.

Epäyhtälössä on kaksi lauseketta, joiden välillä on joku suuruussuhteesta kertova merkki: $<, >, \leq$ tai $\geq$. Epäyhtälöllä on harvoin vain yksi ratkaisu; yleensä niitä on useita tai ei yhtään.

2.1 Yhtälön ratkaiseminen

Esimerkki 2.1.1.
- Yhtälöllä $2x = 14x - 6$ on ainakin yksi ratkaisu, $x = 1/2$. Yhtälöä ratkaistessa selvitetään, että ratkaisuja on vain yksi. Palaamme asiaan myöhemmin.
- Yhtälöllä $y = y$ on äärettömän monta ratkaisua; jokainen reaaliluku $y \in \mathbb{R}$ toteuttaa sen.
- Yhtälöllä $z = |z|$ on myös äärettömän monta ratkaisua; kaikki ei-negatiiviset reaaliluvut $z \in [0,\infty[$ toteuttavat yhtälön. Tämä on helppo todeta itseisarvon määritelmästä.
- Yhtälöllä $x = x + 1$ ei ole ratkaisuja. Perustelemme tämän myöhemmin.

Jos yhtälössä olevilla vapaille muuttujille kiinnitetään lukuarvot, niin yhtälö on väite, jolla on totuusarvo; yhtäsuuruus joko pätee tai ei päde. Kun ratkaisee yhtälöä, on tärkeää olla muuttamatta yhtälön totuusarvoa. Kaksi operaatiota ovat turvallisia, eli eivät muuta yhtälön totuusarvoa:

1. Sieventäminen. Tarkemmin yhtälön jommalla kummalla puolella olevan lausekkeen sieventäminen. Sieventäminen ainoastaan muuttaa lausekkeen ulkoasua, ei arvoa, joten se on turvallista.
2. Saman laskutoimituksen tekeminen yhtälön molemmille puolille. Jos yhtälön molemmilla puolilla on sama arvo ja niille tehdään sama asia, on myös tulos yhtä suuri. Täten tosi yhtälö säilyy totena. Myös epätosi yhtälö voi muuttua todeksi; esimerkiksi jos epätoden yhtälön $1 = 2$ molemmat puolet kertoo luvulla nolla, tuloksena on tosi yhtälö $0 = 0$. Epätoden muuttuminen todeksi voi tapahtua vain silloin, jos yhtälön molemmille puolille tehdyllä operaatiolle ei ole käänteisoperaatiota, joka palauttaa tilanteen entiselleen. Nollalla kertomiselle käänteisoperaatiota ei ole.

Sieventämisen ja operaatioiden tekemisen tavoitteena on selvittää, mitkä muuttujan arvot (jos mitkään) toteuttavat yhtälön. Yleensä tämä onnistuu (jos onnistuu) siirtämällä tuntemattomat tekijät yhdelle puolelle yhtälöä ja tunnetut termit toiselle, joskin muitakin tapoja löytyy, eikä tämä aina toimi. Yleisessä tilanteessa **yhtälön ratkaisemiseksi ei ole mitään varmaa ja aina toimivaa keinoa**, vaan se vaatii kokemusta ja pelisilmää.

Esimerkki 2.1.2. Tutkimme yhtälöä

$$2x = 14x - 6. \tag{2.1.1}$$

Yhtälön molemmat puolet ovat melko yksinkertaisia, joten emme sievennä niitä pitemmälle. Haluamme siirtää kaikki tuntemattoman muuttujan x sisältävät termit yhdelle puolelle ja muut toiselle. Ensin vähennämme yhtälön molemmilta puolilta $14x$, eli lisäämme yhtälön molemmille puolille $-14x$, jolloin saamme

$$2x - 14x = 14x - 6 - 14x. \tag{2.1.2}$$

Sieventämällä saamme

$$-12x = -6. \tag{2.1.3}$$

Muuttuja x esiintyy ainoastaan yhtälön vasemmalla puolella, mutta sillä on vielä kiusallinen kertoja -12. Jakamalla yhtälön molemmat puolet luvulla -12 saamme

$$\frac{-12x}{-12} = \frac{-6}{-12}, \tag{2.1.4}$$

josta sieventämällä tulee

$$x = \frac{1}{2}. \tag{2.1.5}$$

Kaikki suorittamamme laskutoimitukset voi kääntää eli niille on olemassa käänteisoperaatio: kertominen luvulla -12 tai vähentämällä molemmilta puolilta $-14x$ (joka on yhtäpitävää luvun $14x$ lisäämisen kanssa). Näillä toimilla ja sieventämällä pääsemme lopullisesta yhtälöstä $x = 1/2$ alkuperäiseen yhtälöön $2x = 14x-6$. Osoitimme siis, että $x = 1/2$ jos ja vain jos $2x = 14x-6$, eli että yhtälöllä $2x = 14x - 6$ on vain yksi reaalilukuratkaisu, $x = 1/2$.

Yleensä matematiikassa yhtälö ratkaistaan lyhyemmällä merkitätavalla, jossa mukana on kaksi symbolia:

Yhtäpitävyys eli ekvivalenssi $\iff$, luetaan ‘jos ja vain jos’, ‘aina ja vain kun’, ‘vain ja ainoastaan kun’ tai ‘täsmälleen kun’.

Seuraus eli implikaatio $\Rightarrow$, luetaan ‘jos [edeltävä väite], niin [seuraava väite]’, tai ‘[edeltävästä väitteestä] seuraa [seuraava väite]’. Joskus käytössä on myös $\Leftarrow$, joka tekee saman toiseen suuntaan.

Yhtäpitävyys vastaa tarkalleen seurausta molempiin suuntiin.

Kun ratkaisee tai muokkaa yhtälöä, yhtäpitävyysmerkkiä voi käyttää seuraavissa tilanteissa:

- Yhtälön toista tai molempia puolia sievennetään.
- Yhtälön molemmille puolille tehdään sama operaatio, jolle on olemassa käänteisoperaatio.

Seurausnuolta $\Rightarrow$ voi käyttää, kun

- Yhtäpitävyysmerkkiä voi käyttää.
- Yhtälön molemmille puolille tehdään sama operaatio, vaikka sille ei olisi käänteisoperaatiota.

Esimerkki 2.1.3. Ratkaisemme yhtälön

$$2x = 14x - 6$$

ja käytämme yhtäpitävyys- ja seurausmerkitöjä:

$$\begin{aligned}
& & 2x &= 14x - 6 & &\| - 14x \\
&\Leftrightarrow & 2x - 14x &= 14x - 6 - 14x & &\text{(sievennys)} \\
&\Leftrightarrow & -12x &= -6 & &\| \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) \\
&\Leftrightarrow & -12x \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) &= -6 \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) & &\text{(sievennys)} \\
&\Leftrightarrow & x &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Siis luku x on alkuperäisen yhtälön ratkaisu jos ja vain jos $x = 1/2$. Yhtäpitävyyden voi päätellä, koska yhtälöä ratkaistessa jokainen vaihe oli joko sievennys tai yhtälön molemmille puolille suoritettu kääntyvä operaatio.

Tarkastus Sijoita arvo $x = 1/2$ alkuperäiseen yhtälöön ja saat sieventämisen jälkeen $1 = 1$, eli yhtälö on tosi kun $x = 1/2$. Kaikkien mahdollisten arvojen saavuttamista ei voi tarkistaa millään muulla yleispätevällä keinolla kuin yhtälön ratkaisemalla.

Esimerkki 2.1.4.

$$\begin{aligned}
& & x &= x + 1 & &\| - x \\
&\Leftrightarrow & x - x &= x + 1 - x & &\text{(sievennys)} \\
&\Leftrightarrow & 0 &= 1,
\end{aligned}$$

joten yhtälö $x = x + 1$ ratkeaa jos ja vain jos $0 = 1$. Koska $0 \neq 1$ riippumatta muuttujan x arvosta, ei yhtälöllä ole ratkaisuja.

Kokemuksen karttuessa välivaiheita voi vähentää, mutta aina jos yhtälö vaikuttaa vaikealta, välivaiheiden lisääminen on hyvä ensimmäinen etenemisyritys.

Esimerkki 2.1.5. Metsäpalsta on suorakulmion muotoinen ja sen pitempien sivujen pituus on kolminkertainen verrattuna lyhempien sivujen pituuteen. Palstan pinta-ala on 30 hehtaaria. Kuinka pitkät sivut palstalla on?

Haluamme tietää sivujen pituudet. Annamme nimen toiselle; koska kolmella kertominen on mukavampaa kuin kolmella jakaminen, annamme nimen lyhyemmälle sivulle; olkoot se l (niin kuin lyhyt tai length). Tällöin pitkän sivun pituus on $3l$. Saamme yhtälön

$$3l \cdot l = 30 \text{ ha}, \tag{2.1.6}$$

missä palstan lyhyemmän sivun pituus l on positiivinen reaaliluku pituuden yksikön kera. Ratkaisemme yhtälön:

$$
\begin{array}{llll}
 & 3l \cdot l = 30 \text{ ha} & & \text{(sievennys)} \\
\Leftrightarrow & 3l^2 = 30 \text{ ha} & & \| \cdot \dfrac{1}{3} \\
\Leftrightarrow & l^2 = 10 \text{ ha} & & \| \sqrt{} \\
\Leftrightarrow & l = \begin{cases} \sqrt{10 \text{ ha}} \text{ tai} \\ -\sqrt{10 \text{ ha}} \end{cases} & & \text{(sievennys)} \\
\Leftrightarrow & l = \begin{cases} \sqrt{10} \text{ hm tai} \\ -\sqrt{10} \text{ hm} \end{cases} & & l \geq 0 \\
\Leftrightarrow & l = \sqrt{10} \text{ hm}. & &
\end{array}
$$

Hehtometrin sijaan voisimme kirjoittaa myös, että $l = \sqrt{10} \cdot 100$ metriä tai $l = \sqrt{10}/10$ kilometriä. Likiarvona lyhyen sivun pituus $l \approx 300$ metriä ja pitkän sivun pituus $3l = \sqrt{10} \cdot 300 \text{ m} \approx 900$ metriä.

Esimerkki 2.1.6. Ratkaisemme toisen asteen yhtälön neliöksi täydentämällä eli muistikaavan avulla. Tavoitteena on saada yhtälön yhdelle puolelle lauseke $(az \pm b)^2$ (missä a, b ovat reaalilukuja ja z on muuttuja) ja toiselle puolelle pelkkä luku.

$$
\begin{aligned}
& & z^2 &= 5z-2 && \| -5z \\
&\Leftrightarrow & z^2-5z &= 5z-2-5z && \text{(sievennys)} \\
&\Leftrightarrow & z^2-2\cdot\frac{5}{2}z &= -2 && \| +\left(\frac{5}{2}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow & z^2-2\cdot\frac{5}{2}z+\left(\frac{5}{2}\right)^2 &= -2+\left(\frac{5}{2}\right)^2 && \text{(muistikaava)} \\
&\Leftrightarrow & \left(z-\frac{5}{2}\right)^2 &= -2+\left(\frac{5}{2}\right)^2 && \text{(sievennys)} \\
&\Leftrightarrow & \left(z-\frac{5}{2}\right)^2 &= -2\cdot\frac{4}{4}+\frac{25}{4} && \text{(sievennys)} \\
&\Leftrightarrow & \left(z-\frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{-8+25}{4} && \text{(sievennys)} \\
&\Leftrightarrow & \left(z-\frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{17}{4} && \|\sqrt{} \\
&\Leftrightarrow & z-\frac{5}{2} &= \begin{cases}\sqrt{\frac{17}{4}} \text{ tai} \\ -\sqrt{\frac{17}{4}}\end{cases} && \text{(sievennys)} \\
&\Leftrightarrow & z-\frac{5}{2} &= \begin{cases}\frac{\sqrt{17}}{2} \text{ tai} \\ -\frac{\sqrt{17}}{2}\end{cases} && \| +\frac{5}{2} \\
&\Leftrightarrow & z-\frac{5}{2}+\frac{5}{2} &= \begin{cases}\frac{\sqrt{17}}{2}+\frac{5}{2} \text{ tai} \\ -\frac{\sqrt{17}}{2}+\frac{5}{2}\end{cases} && \text{(sievennys)} \\
&\Leftrightarrow & z &= \begin{cases}\frac{\sqrt{17}+5}{2} \text{ tai} \\ \frac{-\sqrt{17}+5}{2}.\end{cases}
\end{aligned}
$$

Siis yhtälön ratkaisujoukko on

$$\left\{\frac{\sqrt{17}+5}{2}, \frac{-\sqrt{17}+5}{2}\right\}.$$

2.2 Epäyhtälön ratkaiseminen

Epäyhtälön ratkaisujoukko koostuu niistä muuttujien arvoista, joilla epäyhtälö on tosi. Epäyhtälön ratkaiseminen tarkoittaa tämän joukon selvittämistä.

Esimerkki 2.2.1. Huomaa, että kun epäyhtälön molemmat puolet kerrotaan negatiivisella luvulla, niin epäyhtälömerkki vaihtaa suuntaansa. Tämä perustuu laskusääntöön 1.2.1, kohta 5. Kohdan 4 perusteella järjestys ei vaihdu, kun epäyhtälön molemmat puolet kerrotaan positiivisella luvulla.

$$
\begin{aligned}
&& \frac{2}{5}x < x - 7 && \| - x \\
\Leftrightarrow && \frac{2}{5}x - x < x - 7 - x && \text{(sievennys)} \\
\Leftrightarrow && -\frac{3}{5}x < -7 && \| \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \\
\Leftrightarrow && -\frac{3}{5}x \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) > -7 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) && \text{(sievennys)} \\
\Leftrightarrow && x > \frac{35}{3}. &&
\end{aligned}
$$

Epäyhtälön ratkaisujoukko on laskun perusteella avoin väli $]\frac{35}{3}, \infty[$.

Tarkistus Sijoitamme epäyhtälöön hyvin negatiivisen luvun, vaikkapa -1000, suuren positiivisen luvun, vaikkapa 1000, ja rajatapauksen $\frac{35}{3}$. Lisävarmistuksena voi vielä sijoittaa vähän rajatapausta suuremman luvun, esimerkiksi 15, ja vähän sitä pienemmän luvun, kuten 10. Tällöin epäyhtälön pitäisi olla totta jos ja vain jos sijoitettu luku kuuluu ratkaisujoukkoon.

Esimerkki 2.2.2 (Itseisarvoepäyhtälö)**.**

$$|x - 2| \leq 3$$

Itseisarvo on määritelty paloittain, erikseen positiivisille ja negatiivisille luvuille, joten tutkimme epäyhtälöä vastaavasti paloittain.

Olkoot ensin $x - 2 \geq 0$, eli yhtäpitävästi $x \geq 2$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
&& |x - 2| \leq 3 && (x - 2 \geq 0) \\
\Leftrightarrow && x - 2 \leq 3 && \| + 2 \\
\Leftrightarrow && x \leq 5. &&
\end{aligned}
$$

Siis, jos $x \geq 2$, niin epäyhtälö on tosi jos ja vain jos $x \leq 5$. Osa ratkaisujoukosta on siis $[2, 5]$.

Tutkitaan seuraavaksi tapausta $x - 2 < 0$, eli yhtäpitävästi $x < 2$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
&& |x - 2| \leq 3 && (x - 2 < 0) \\
\Leftrightarrow && -(x - 2) \leq 3 && \text{(sievennys)} \\
\Leftrightarrow && 2 - x \leq 3 && \| - 2 \\
\Leftrightarrow && -x \leq 1 && \| \cdot (-1) \\
\Leftrightarrow && x \geq -1. &&
\end{aligned}
$$

Siis, jos $x < 2$, niin epäyhtälö on tosi jos ja vain jos $x \geq -1$. Osa ratkaisujoukosta on siis $[-1{,}2[$.

Koska tapaukset $x \geq 2$ ja $x < 2$ kattavat kaikki mahdollisuudet, olemme löytäneet koko ratkaisujoukon $[-1{,}5]$.

Tarkistus: Sijoita epäyhtälöön rajatapaukset -1 ja 5, jokin selvästi välillä kuuluva arvo kuten 3, hiukan välin ulkopuolella olevat arvot kuten -2 ja 6, sekä todella suuri ja todella pieni arvo kuten -10000 ja $+10000$.

2.3 Yhtälöryhmän ratkaiseminen

Yhtälöryhmä koostuu joukosta yhtälöitä, jotka kaikki halutaan ratkaista samalla kertaa. Kahden yhtälön ryhmää kutsutaan yhtälöpariksi. Yhtälöryhmän ratkaiseminen tarkoittaa ratkaisujoukon etsimistä. Yhtälöryhmien ratkaisemiseksi ei ole yleispätevää menetelmää, mutta paremman idean puutteessa voi yrittää aina esittää yksittäisen muuttujan muiden avulla ja jatkaa tätä kunnes jäljellä on enää yhden muuttujan yhtälö tai prosessi pysähtyy.

Esimerkki 2.3.1.

$$\begin{cases} \frac{1}{3}y & = 3 - x \\ \sqrt{3}x - 7 & = 10y + 2 \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Ratkaistaksemme yhtäloparin tarkastelemme ensin toista yhtälöä yksinään; päätämme ratkaista muuttujan y ensimmäisestä yhtälöstä (koska näyttää, että syntyvään yhtälöön ei tule murtolukuja tai muuta hankalaa).

$$\begin{aligned} & & \frac{1}{3}y &= 3 - x & & \Vert \cdot 3 \\ &\Leftrightarrow & \frac{1}{3}y \cdot 3 &= (3 - x) \cdot 3 & & \text{(sievennys)} \\ &\Leftrightarrow & y &= 9 - 3x. \end{aligned}$$

Syntynyt yhtälö on yhtäpitävä alkuperäisen kanssa, joten (halutessamme) voimme kirjoittaa yhtälöparin muotoon

$$\begin{cases} y & = 9 - 3x \\ \sqrt{3}x - 7 & = 10y + 2. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Sijoitamme ensimmäisessä yhtälössä ratkaistun lausekkeen toiseen yhtälöön – jokainen y toisessa yhtälössä korvautuu lausekkeella $9 - 3x$ – ja ratkaisemme syntyneen yhtälön jäljelle jäävän muuttujan x suhteen:

$$\begin{aligned}
& & \sqrt{3}x - 7 &= 10y + 2 & &(\text{sijoitus } y = 9 - 3x) \\
&\Rightarrow & \sqrt{3}x - 7 &= 10 \cdot (9 - 3x) + 2 & &(\text{sievennys}) \\
&\Leftrightarrow & \sqrt{3}x - 7 &= 92 - 30x & &\| + 30x + 7 \\
&\Leftrightarrow & \sqrt{3}x - 7 + 30x + 7 &= 92 - 30x + 30x + 7 & &(\text{sievennys}) \\
&\Leftrightarrow & \left(\sqrt{3} + 30\right) x &= 99 & &\| \cdot \frac{1}{30 + \sqrt{3}} \\
&\Leftrightarrow & x &= \frac{99}{30 + \sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Päättelimme, että jos alkuperäinen yhtälöpari toteutuu, on oltava $x = \frac{99}{30+\sqrt{3}}$. Tämän tiedon voi sijoittaa kumpaan tahansa yhtälöön ja saa yhtälön, jossa on ainoastaan yksi tuntematon muuttuja y. Käytämme ensimmäistä yhtälöä, koska se näyttää yksinkertaisemmalta:

$$\begin{aligned}
& & y &= 9 - 3x & &\left(\text{sijoitus } x = \frac{99}{30 + \sqrt{3}}\right) \\
&\Rightarrow & y &= 9 - 3 \cdot \frac{99}{30 + \sqrt{3}} & &(\text{sievennys}) \\
&\Leftrightarrow & y &= 9 - \frac{297}{30 + \sqrt{3}} & &(\text{sievennys}) \\
&\Leftrightarrow & y &= 9 \cdot \frac{30 + \sqrt{3}}{30 + \sqrt{3}} - \frac{297}{30 + \sqrt{3}} & &(\text{sievennys}) \\
&\Leftrightarrow & y &= \frac{270 + 9\sqrt{3}}{30 + \sqrt{3}} - \frac{297}{30 + \sqrt{3}} & &(\text{sievennys}) \\
&\Leftrightarrow & y &= \frac{270 - 297 + 9\sqrt{3}}{30 + \sqrt{3}} & &(\text{sievennys}) \\
&\Leftrightarrow & y &= \frac{-27 + 9\sqrt{3}}{30 + \sqrt{3}} & &(\text{sievennys}) \\
&\Leftrightarrow & y &= 9 \cdot \frac{-\sqrt{3} + 1}{10\sqrt{3} + 1}
\end{aligned}$$

Saimme siis laskettua, että **jos** yhtälöllä on ratkaisu, **niin** se on pari

$$\begin{cases} x &= \frac{99}{30+\sqrt{3}} \\ y &= 9 \cdot \frac{-\sqrt{3}+1}{10\sqrt{3}+1}. \end{cases} \tag{2.3.3}$$

Koska osana ratkaisua sijoitimme arvoja yhtälöihin, emme tiedä, onko pari varmasti ratkaisu. Sen saa selville sijoittamalla arvot alkuperäiseen yhtälöpariin.

Koska arvot toteuttavat yhtälön ja ovat ainoa mahdollinen yhtälön toteuttava pari, on yhtälöpari ratkaistu.

2.4 Epäyhtälöryhmän ratkaiseminen

Epäyhtälöryhmä, jossa on useita epäyhtälöitä ja useita muuttujia, tulee harvoin vastaan emmekä käsittele sitä tällä kurssilla. Myös ratkaisujoukon kirjoittaminen olisi hankalaa.

Sen sijaan tutkimme tilannetta, jossa on yksi muuttuja ja useita epäyhtälöitä. Tällöin jokainen epäyhtälö antaa rajoitteita muuttujan sallitulle arvolle. Kaikkien rajoitteiden huomioiminen samaan aikaan antaa ratkaisujoukon.

Mikään ei estä asettamasta sekä yhtälöitä että epäyhtälöitä samaan ryhmään, jolloin ratkaisuiden tulee toteuttaa kaikki niistä samaan aikaan.

Esimerkki 2.4.1.

$$\begin{cases} 4t-1 & \leq 11-2t \\ 3+14t-2\pi & < 16t+3. \end{cases} \tag{2.4.1}$$

Ratkaisemme ensin ensimmäisen epäyhtälön.

$$\begin{aligned} & & 4t-1 \leq 11-2t & \qquad \| +1+2t \\ &\Leftrightarrow & 4t-1+1+2t \leq 11-2t+1+2t & \qquad \text{(sievennys)} \\ &\Leftrightarrow & 6t \leq 12 & \qquad \| \cdot 1/6 \text{ ja sievennys} \\ &\Leftrightarrow & t \leq 2. & \end{aligned}$$

Ensimmäinen epäyhtälö toteutuu siis vain ja ainoastaan, kun $t \leq 2$ eli $t \in]-\infty, 2]$.

Ratkaisemme seuraavaksi toisen epäyhtälön.

$$\begin{aligned} & & 3+14t-2\pi < 16t+3 & \qquad \| -3-14t \\ &\Leftrightarrow & 3+14t-2\pi-3-14t < 16t+3-3-14t & \qquad \text{(sievennys)} \\ &\Leftrightarrow & -2\pi \leq 2t & \qquad \| \cdot 1/2 \text{ ja sievennys} \\ &\Leftrightarrow & -\pi < t. & \end{aligned}$$

Toinen epäyhtälö on siis yhtäpitävää ehdon $-\pi < t$ kanssa, eli yhtälön ratkaisujoukko on $]-\pi, \infty[$. Kun otamme huomioon sekä ensimmäisen että toisen epäyhtälön antaman rajoitteen, saamme ehdon $-\pi < t \leq 2$, eli epäyhtälöparin ratkaisujoukko on $]-\pi, 2]$.

3 Analyyttinen geometria

Analyyttisessä geometriassa geometrisia ongelmia ratkaistaan algebran (ja jopa analyysin) koneistolla, eli yhtälöiden ja muuttujien avulla, sekä myöhemmin integraali- ja differentiaalilaskennalla.

Peruskäsite analyyttisessä geometriassa on **koordinaatisto**. Koordinaatiston nollapiste on nimeltään **origo**. Jokainen kaksiulotteisen avaruuden piste esitetään lukuparina (a,b), missä a kertoo kuinka pitkälle origosta liikutaan ensimmäisen koordinaatin suuntana, ja b kertoo kuinka pitkälle liikutaan toisen koordinaatin suuntaan. Luvut a ja b voivat olla myös negatiivisia tai nollia. Piste (0,0) on origo.

Usein ensimmäistä suuntaa tai koordinaattia merkitään kirjaimella x ja toista kirjaimella y, mutta myös esimerkiksi x_1 ja x_2 ovat käytössä, samoin kuin monet muut merkinnät. Tällä kurssilla käytämme x- ja y-akseleita ja koordinaatteja. x-koordinaatti on vaakasuora ja positiivinen suunta on oikealla; y-koordinaatti on pystysuuntainan ja positiivinen suunta on ylös.

3.1 Suora

Suoran yhtälö on

$$y = kx + b, \tag{3.1.1}$$

missä k ja b ovat reaalilukuja.

Jokainen lukupari (x,y), joka toteuttaa yhtälön 3.1.1, on kyseisen suoran piste, ja jokainen suoran piste toteuttaa kyseisen yhtälön. Lukua k sanotaan suoran **kulmakertoimeksi**. Kulmakertoimen voi tulkita suoran jyrkkyydeksi; positiivinen kulmakerroin tarkoittaa nousevaa suoraa ja negatiivinen laskevaa. Kulmakerroin 0 tarkoittaa vaakasuoraa suoraa. Pystysuoraa suoraa ei voi esittää yhtälön (3.1.1) avulla, vaan pystysuoran suoran yhtälö on

$$x = c, \tag{3.1.2}$$

missä c on reaaliluku.

Esimerkki 3.1.1. Piste (1,2) kuuluu suoralle $y = -x + 3$, koska yhtälö toteutuu kun $x = 1$ ja $y = 2$. Piste (1,2) ei kuulu suoralle $y = x - 1$, koska sijoittamalla arvot $x = 1$ ja $y = 2$ yhtälöön saamme epätoden väitteen $2 = 0$.

Pisteen kautta kulkeva suora. Pisteen (x_0,y_0) kautta kulkevan suoran yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0), \tag{3.1.3}$$

missä kulmakerroin k on sama kuin suoran yhtälössä (3.1.1).

Suora yleisessä muodossa Suoraan voidaan myös esittää yleisessä muodossa

$$Ax + By + C = 0, \tag{3.1.4}$$

missä A, B ja C ovat reaalilukuja ja A tai B ei ole nolla.

Suorien yhdensuuntaisuus ja kohtisuoruus. Suorat ovat yhdensuuntaisia jos ja vain jos niillä on sama kulmakerroin. Suorat ovat kohtisuoria jos ja vain jos niiden kulmakerrointen tulo on -1.

Lause 3.1.2. *Olkoot l suora ja P piste. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi suoran l kanssa yhdensuuntainen suora, joka kulkee pisteen P kautta, ja täsmälleen yksi suoran l kanssa kohtisuora suora, joka kulkee pisteen P kautta.*

Todistuksen idea. Oletetaan, että suora on kirjoitettu muodossa $y = kx + b$ tai $x = c$. Lasketaan suoran kanssa yhdensuuntainen/kohtisuora suora. Lasku osoittaa, että kyseinen suora on ainoa mahdollinen yhdensuuntainen/kohtisuora suora. Tarkistetaan, että se oikeasti on yhdensuuntainen/kohtisuora ja kulkee annetun pisteen kautta. □

Esimerkki 3.1.3. Suora kulkee pisteen $(-1, -4)$ kautta ja sen kulmakerroin on 5. Määritämme suoran yhtälön.

Sijoitamme arvot $k = 5$, $x = -1$ ja $y = -4$ suoran yhtälöön (3.1.1):

$$-4 = 5 \cdot (-1) + b.$$

Sieventämällä saamme $b - 5 = -4$, josta $b = 1$. Suoran yhtälö on siis

$$y = 5x + 1.$$

Esimerkki 3.1.4. Suora kulkee pisteiden $(2, -1)$ ja $(-\sqrt{5}, 2)$ kautta. Selvitämme suoran yhtälön ja (erityisesti) kulmakertoimen.

Sijoitamme ensimmäisen pisteen $(x_0,y_0) = (2,-1)$ pisteen kautta kulkevan suoran yhtälöön (3.1.3):

$$y - (-1) = k(x - 2),$$

eli yhtäpitävästi

$$y + 1 = k(x - 2). \tag{3.1.5}$$

Koska toinen piste on samalla suoralla, on sen toteutettava syntynyt suoran yhtälö. Sijoitamme toisen pisteen $(x,y) = (-\sqrt{5},2)$ yhtälöön (3.1.5):

$$2 + 1 = k(-\sqrt{5} - 2). \tag{3.1.6}$$

Yhtäpitävästi

$$k = -\frac{3}{\left(\sqrt{5}+2\right)} = -\frac{3\left(\sqrt{5}-2\right)}{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)} = 6 - 3\sqrt{5}. \tag{3.1.7}$$

Kun kulmakertoimen arvon ja esimerkiksi pisteen $(x,y) = (2,-1)$ sijoittaa suoran yhtälöön (3.1.1), saa

$$-1 = \left(6 - 3\sqrt{5}\right) \cdot 2 + b, \tag{3.1.8}$$

josta voi ratkaista termin b arvoksi

$$b = -1 - 2\left(6 - 3\sqrt{5}\right) = -13 + 6\sqrt{5}. \tag{3.1.9}$$

Siis suoran yhtälö on

$$y = \left(6 - 3\sqrt{5}\right)x - 13 + 6\sqrt{5}. \tag{3.1.10}$$

Vaihtoehtoisesti voimme käyttää suoran yhtälöä (3.1.1). Sijoittamalla ensin yhden ja sitten toisen pisteen yhtälöön saamme yhtälöparin

$$\begin{cases} -1 & = 2k + b \\ 2 & = -\sqrt{5}k + b. \end{cases} \tag{3.1.11}$$

Ensimmäinen yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $b = -2k - 1$ kanssa. Kun tämän sijoittaa toiseen yhtälöön, saa

$$\begin{aligned} && 2 &= -\left(\sqrt{5}+2\right)k - 1 && \| + 1 \\ \Leftrightarrow && 3 &= -\left(\sqrt{5}+2\right)k && \| \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{5}+2}\right) \\ \Leftrightarrow && -\frac{3}{\sqrt{5}+2} &= k. && \end{aligned}$$

Kulmakertoimen arvon voi sieventää kuten yhtälössä (3.1.7). Täten

$$b = -2k - 1 = -12 + 6\sqrt{5} - 1 = -13 + 6\sqrt{5}. \tag{3.1.12}$$

Näillä tiedoilla yhtälön voi muodostaa kuten ensimmäisessä vaihtoehdossa.

Lause 3.1.5. *Yleisessä muodossa annettu suora*

$$Ax + By + C = 0, \tag{3.1.13}$$

missä $A \neq 0$ tai $B \neq 0$, toteuttaa suoran yhtälön

$$y = kx + b \text{ tai } x = c. \tag{3.1.14}$$

Todistus. Suora on annettu yleisessä muodossa

$$Ax + By + C = 0. \tag{3.1.15}$$

Jos $B \neq 0$, niin kirjoitamme suoran yhtälön muodossa $y = kx + b$. Jos $B = 0$, niin kirjoitamme suoran yhtälön muodossa $x = c$.

Olkoot siis ensin $B \neq 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} & & Ax + By + C &= 0 & & \| - Ax - C \\ &\Leftrightarrow & By &= -Ax - C & & \| \cdot \left(\frac{1}{B}\right) \\ &\Leftrightarrow & y &= -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. & & \end{aligned}$$

Siis suoran kulmakerroin $k = -A/B$ ja $b = -C/B$.

Olkoot sitten $B = 0$. Tällöin, suoran yleisen muodon määritelmän mukaan, $A \neq 0$ ja

$$\begin{aligned} & & Ax + By + C &= 0 & & \text{sijoitus } B = 0 \\ &\Leftrightarrow & Ax + C &= 0 & & \| - C \\ &\Leftrightarrow & Ax &= -C & & \| \cdot \left(\frac{1}{A}\right) \\ &\Leftrightarrow & x &= -\frac{C}{A}, & & \end{aligned}$$

joka on halutussa muodossa. □

Seuraavan lauseen todistus jää harjoitustehtäväksi:

Lause 3.1.6. *Suora, joka on esitetty yhtälön $y = kx + b$ tai yhtälön $x = c$ avulla ($k, b, c \in \mathbb{R}$), voidaan kirjoittaa myös yleisessä muodossa*

$$Ax + By + C = 0, \tag{3.1.16}$$

missä A, B ja C ovat reaalilukuja.

Yhdessä nämä lauseet kertovat, että suoran yleinen muoto ja erityiset suoran yhtälöt sisältävät saman tiedon. Se, kumpaa esitystapaa suoralle haluaa käyttää, riippuu sitä mihin kysymyksiin haluaa vastauksia tai mihin suoraa haluaa hyödyntää.

Esimerkki 3.1.7. Olkoon suoran l kulmakerroin -4. Mikä on sellaisen suoran yhtälö, joka kulkee pisteen $(-1, -1)$ kautta ja on kohtisuorassa suoran l kanssa?

Suorat ovat kohtisuorassa, kun niiden kulmakerrointen tulo on -1. Täten pyydetylle suoralle pätee $k = 1/4$. Sijoitamme suoran yhtälöön pisteen $(x,y) = (-1,-1)$ ja kulmakertoimen $k = 1/4$:

$$\begin{aligned} & y = kx + b && \text{(sijoitukset } y = -1, x = -1, k = \tfrac{1}{4}\text{)} \\ \Rightarrow\quad & -1 = -\frac{1}{4} + b && \parallel + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow\quad & -\frac{3}{4} = b. && \end{aligned}$$

Jos kysytty suora on olemassa, on sen yhtälön siis oltava

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}. \tag{3.1.17}$$

Suora on olemassa lauseen 3.1.2 nojalla.

3.2 Ympyrä

Ympyräksi kutsutaan niiden pisteiden joukkoa, jotka ovat annetun etäisyyden eli säteen (usein r eli radius) päässä annetusta pisteestä eli keskipisteestä. Analyyttisessä geometriassa ympyrä tarkoittaa nimenomaan ympyrän kehää.

Olkoot ympyrän keskipiste (x_0,y_0) ja säde $r > 0$. Ympyrän yhtälö keskipistemuodossa on tällöin

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \tag{3.2.1}$$

Vain ja ainoastaan ne pisteet (x,y), jotka toteuttavat ympyrän yhtälön, kuuluvat ympyrään (eli ympyrän kehälle).

Esimerkki 3.2.1. Piste (2,1) ei kuulu 4-säteiselle ympyrälle, jonka keskipiste on $(x_0,y_0) = (-1,3)$. Ympyrän yhtälö on

$$(x - (-1))^2 + (y - 3)^2 = 4^2. \tag{3.2.2}$$

Pisteen $(x,y) = (2,1)$ sijoittaminen johtaa yhtälöön

$$(2 + 1)^2 + (1 - 3)^2 = 16, \tag{3.2.3}$$

joka on yhtäpitävää yhtälön $13 = 16$ kanssa. Tämä yhtälö on epätosi, joten tutkittu piste ei kuulu ympyrälle.

Esimerkki 3.2.2. Määritämme ympyrän keskipisteen ja säteen, kun ympyrän määrittää yhtälö

$$x^2 - 4x + (4+y)^2 - 44 = 0. \tag{3.2.4}$$

Haluamme muuttaa yhtälön keskipistemuotoon.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + (4+y)^2 - 44 &= x^2 - 2\cdot 2x + (y-(-4))^2 - 44 \\ &= x^2 - 2\cdot 2x + 2^2 - 2^2 + (y-(-4))^2 - 44 \\ &= (x-2)^2 + (y-(-4))^2 - 48. \end{aligned}$$

Siis alkuperäisen yhtälön kanssa yhtäpitävä yhtälö on

$$\begin{aligned} & (x-2)^2 + (y-(-4))^2 - 48 = 0 && \| + 48 \\ \Leftrightarrow\quad & (x-2)^2 + (y-(-4))^2 = 48 \\ \Leftrightarrow\quad & (x-2)^2 + (y-(-4))^2 = 16\cdot 3 \\ \Leftrightarrow\quad & (x-2)^2 + (y-(-4))^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2. \end{aligned}$$

Viimeinen yhtälö on keskipistemuodossa. Ympyrän keskipiste on $(2, -4)$ ja säde on $4\sqrt{3}$.

Määritelmä 3.2.3 (Yksikköympyrä)**.** Ympyrä, jonka säde on yksi, ja keskipiste on origo, on nimeltään yksikköympyrä. Sen yhtälö on

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{3.2.5}$$

Esimerkki 3.2.4. Pisteet

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \text{ ja } \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) \tag{3.2.6}$$

kuuluvat yksikköympyrälle. Todistus laskemalla pisteille $x^2 + y^2$ ja havaitsemalla, että tulos on yksi.

Esimerkki 3.2.5 (Suoran ja ympyrän leikkaus)**.** Leikkaako suora $y = x/3 - 3/2$ yksikköympyrää, ja jos kyllä, niin missä pisteessä tai pisteissä?

Ratkaisemme yhtälöparin

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 1 \\ y &= x/3 - 3/2. \end{cases} \tag{3.2.7}$$

Yhtälöparin ratkaisut toteuttavat sekä suoran että ympyrän yhtälön eli yhtäpitävästi kuuluvat sekä suoralle että ympyrälle. Kun jälkimmäisen yhtälön sijoittaa ylempään, saa

$$\begin{aligned}
& & x^2+y^2 &= 1 & &\text{sijoitus } y=\frac{x}{3}-\frac{3}{2}\\
&\Leftrightarrow & x^2+\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{2}\right)^2 &= 1 & &\\
&\Leftrightarrow & x^2+\frac{x^2}{9}-2\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4} &= 1 & &\\
&\Leftrightarrow & \frac{10}{9}x^2-x+\frac{9}{4} &= 1 & &\|-\frac{9}{4}\\
&\Leftrightarrow & \frac{10}{9}x^2-x &= -\frac{5}{4} & &\|\cdot\frac{9}{10}\\
&\Leftrightarrow & x^2-\frac{9}{10}x &= -\frac{9}{8} & &\\
&\Leftrightarrow & x^2-2\cdot\frac{9}{20}x+\left(\frac{9}{20}\right)^2-\left(\frac{9}{20}\right)^2 &= -\frac{9}{8} & &\|+\frac{81}{400}\\
&\Leftrightarrow & \left(x-\frac{9}{20}\right)^2 &= -\frac{9}{8}+\frac{81}{400} & &\\
&\Leftrightarrow & \left(x-\frac{9}{20}\right)^2 &= \frac{81-450}{400}. & &
\end{aligned}$$

Mutta nyt yhtälön vasen puoli on aina vähintään nolla, kun taas oikea puoli on negatiivinen. Täten yhtäsuuruus ei ole ikinä tosi, eikä mikään suoran piste voi sijaita ympyrällä. Siis suora ja ympyrä eivät leikkaa toisiaan.

4 Reaalifunktiot

Reaalifunktio on kuvaus, jonka määrittelyjoukko ja maalijoukko ovat reaalilukujen joukon osajoukkoja. Käsittelemme seuraavassa joitakin yleisiä reaalifunktioita.

Reaalifunktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **nollakohta** on sellainen muuttujan arvo, jolla funktion arvo on nolla. Yhtäpitävästi nollakohta on sellainen $t\in\mathbb{R}$, jolla pätee $f(t)=0$. Jos funktio on määritelty jossain muussa joukossa kuin $\mathbb{R}$, ovat sen nollakohtia ne määrittelyjoukon pisteet, joissa funktio saa arvon nolla.

Esimerkki 4.1. Funktion $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(r)=|r|+r$, nollakohtia ovat kaikki luvut väliltä $]-\infty{,}0]$.

Todistaaksemme tämän tutkimme kolmea tapausta: $r>0$, $r=0$ ja $r<0$.

- Kun $r > 0$, $|r| = r$ ja $h(r) = 2r > 0$. Siis funktio ei saa arvoa nolla, kun $r > 0$.
- Laskemalla $h(0) = 0 + 0 = 0$ huomaamme, että 0 on yksi funktion nollakohdista.
- Kun $r < 0$, $|r| = -r$ ja $h(r) = -r + r = 0$. Siis funktio saa arvon nolla aina, kun $r < 0$.

Yhdistämällä äsken saadut tiedot väite on todistettu.

4.1 Polynomit ja potenssifunktiot

Määritelmä 4.1.1. Asteen n polynomi $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on funktio, joka voidaan esittää muodossa

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \tag{4.1.1}$$

missä $n \in \mathbb{N}$ ja jokainen a_j on reaaliluku. Lisäksi vaaditaan, että $a_n \neq 0$.

Huomautus 4.1.2. Merkinnät a_1, a_5, ja a_j ovat nimeltään alaindeksejä. Alaindeksi ei tarkoita mitään laskutoimitusta, vaan a_3 on samanlainen muuttuja kuin esimerkiksi x tai s on.

Esimerkki 4.1.3 (Vakiofunktio)**.** Olkoon c reaaliluku. Tällöin voidaan määritellä vakiofunktio $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla $c(x) = c$ kaikille reaaliluvuille x. Funktio siis saa aina arvon c (ajateltuna reaalilukuna), riippumatta mikä arvo sille syötetään. Vakiofunktion ovat asteen 0 polynomeja (paitsi nollafunktio, jolle määritelmämme ei anna astetta; joskus sen asteeksi otetaan $-\infty$).

Määritelmä 4.1.4 (Lineaarinen eli ensimmäisen asteen yhtälö)**.** Lineaarinen yhtälö on muotoa

$$ax + b = 0, \tag{4.1.2}$$

missä a ja b ovat reaalilukuja ja $a \neq 0$. Myös yhtälö, joka voidaan palauttaa ylläolevaan muotoon yhtäpitävyyden säilyttävillä laskutoimituksilla ja sieventämällä, on lineaarinen.

Lineaarisessa yhtälössä yhtälön toinen puoli on ensimmäisen asteen polynomi ja toinen puoli on nolla. Vastaavasti voi määritellä lineaarisen epäyhtälön ja lineaarisen yhtälöryhmän.

Yleisemmin voimme määritellä asteen n yhtälön:

Määritelmä 4.1.5 (Asteen n yhtälö)**.** Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Asteen n yhtälö on yhtälö joka voidaan palauttaa muotoon, jossa yhtälön vasemmalla puolella on asteen n polynomi ja oikealla puolella on luku 0.

Lause 4.1.6 (Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava)**.** *Olkoot a, b ja c reaalilukuja ja $a \neq 0$. Tällöin luku x ratkaisee yhtälön*

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{4.1.3}$$

jos ja vain jos

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ tai } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{4.1.4}$$

Todistus. Jakamalla yhtälön (4.1.3) puolittain luvulla a (joka ei ole nolla) saamme yhtäpitävän yhtälön

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0. \tag{4.1.5}$$

Täydennämme yhtälön (4.1.5) vasemman puolen neliöksi:

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \\
&= x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} \\
&= x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} \\
&= \left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} && \text{muistikaava} \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.
\end{aligned}$$

Laskussa ei tapahtunut muuta kuin lausekkeen manipuloimista, joten yhtälö

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \tag{4.1.6}$$

on yhtäpitävä alkuperäisen yhtälön (4.1.3) kanssa. Ratkaisemme yhtälön (4.1.6).

$$
\begin{aligned}
& & \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2} &= 0 & \quad \| + \frac{b^2-4ac}{4a^2} \\
&\Leftrightarrow & \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2} & \quad \| \sqrt{} \\
&\Leftrightarrow & x+\frac{b}{2a} &= \begin{cases} \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \text{ tai} \\ -\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \end{cases} & \\
&\Leftrightarrow & x+\frac{b}{2a} &= \begin{cases} \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}} \text{ tai} \\ -\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}} \end{cases} & \\
&\Leftrightarrow & x+\frac{b}{2a} &= \begin{cases} \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ tai} \\ -\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{cases} & \quad \| - \frac{b}{2a} \\
&\Leftrightarrow & x &= \begin{cases} \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} \text{ tai} \\ -\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} \end{cases} & \\
&\Leftrightarrow & x &= \begin{cases} \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ tai} \\ \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \end{cases} &
\end{aligned}
$$

Koska kaikki päättelyn vaiheet säilyttävät yhtäpitävyyden, on väite todistettu.

□

Kolmannen asteen yhtälöille on myös olemassa ratkaisukaava, jota emme käy läpi. Sitä korkeamman asteen yhtälöille ratkaisukaavaa ei ole mahdollista kirjoittaa, vaan yhtälöt pitää ratkaista muilla keinoilla.

Esimerkki 4.1.7. Etsimme neljännen asteen polynomin $Q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$Q(s) = -2s^4 + 6s^2 + 5, \tag{4.1.7}$$

nollakohdat.

Yhtäpitävästi ratkaisemme yhtälön

$$
\begin{aligned}
& & -2s^4+6s^2+5 &= 0 & \quad \| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) & \qquad (4.1.8) \\
&\Leftrightarrow & s^4-3s^2-\frac{5}{2} &= 0. & & \qquad (4.1.9)
\end{aligned}
$$

Määrittelemme uuden reaalimuuttujan t kaavalla $t = s^2$. Tällöin yhtälö muuttuu yhtäpitävään muotoon

$$
\begin{cases} t^2-3t-\frac{5}{2} = 0 \\ t = s^2. \end{cases} \tag{4.1.10}
$$

Ratkaisemme syntyneen yhtälöparin ylemmän yhtälön, joka on toisen asteen yhtälö:

$$
\begin{aligned}
& & t^2 - 3t - \frac{5}{2} &= 0 & & \quad (4.1.11)\\
&\Leftrightarrow & t^2 - 2\cdot\frac{3}{2}t + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - \frac{5}{2} &= 0 & & \quad (4.1.12)\\
&\Leftrightarrow & \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{19}{4} &= 0 & \| + \frac{19}{4} & \quad (4.1.13)\\
&\Leftrightarrow & \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{19}{4} & \|\sqrt{} & \quad (4.1.14)\\
&\Leftrightarrow & t - \frac{3}{2} &= \begin{cases} \frac{\sqrt{19}}{2} \text{ tai} \\ -\frac{\sqrt{19}}{2} \end{cases} & \| + \frac{3}{2} & \quad (4.1.15)\\
&\Leftrightarrow & t &= \begin{cases} \frac{3+\sqrt{19}}{2} \text{ tai} \\ \frac{3-\sqrt{19}}{2} \end{cases} & t = s^2 \geq 0 & \quad (4.1.16)\\
&\Leftrightarrow & t &= \frac{3+\sqrt{19}}{2}. & & \quad (4.1.17)
\end{aligned}
$$

Kun ratkaisun sijoittaa yhtälöparin toiseen yhtälöön, saa

$$
s = \sqrt{\frac{3+\sqrt{19}}{2}} \text{ tai } s = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{19}}{2}}. \quad (4.1.18)
$$

Seuraava lause, jota emme todista tässä luentomonisteessa, koskee polynomien tulomuotoa.

Lause 4.1.8 (Polynomin jakaminen)**.** *Olkoon $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polynomi, jolla on nollakohta x_0. Tällöin myös funktio $Q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$
Q(x) = \frac{P(x)}{x - x_0}, \quad (4.1.19)
$$

on polynomi, ja jos reaaliluvulle s pätee $Q(s) = 0$, niin myös $P(s) = 0$.

Lause 4.1.9. *Asteen n polynomilla on korkeintaan n nollakohtaa, kun $n \in \mathbb{Z}$ ja $n \geq 0$.*

Esimerkki 4.1.10. Olkoot polynomin $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määräävä sääntö

$$
f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6. \quad (4.1.20)
$$

Kokeilemalla huomaamme, että muuttujan x arvot 1, 2 ja 3 ovat polynomin nollakohtia. Koska polynomi on astetta 3, on sillä korkeintaan 3 nollakohtaa lauseen 4.1.9 mukaan. Polynomien jakamista koskevan lauseen 4.1.8 mukaan

$$
\frac{f(x)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \quad (4.1.21)
$$

on jonkin polynomin lauseke. Laskemalla

$$(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = f(x). \tag{4.1.22}$$

Edellisessä esimerkissä asteen n polynomin sai esitettyä **tulomuodossa**

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})(x-x_n), \tag{4.1.23}$$

missä x_j ovat polynomin nollakohdat. Onnistuuko tämä aina? Ei reaaliluvuilla, koska esimerkiksi polynomilla $R(x) = x^2 + 1$, $R\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ei ole nollakohtia eikä se ole halutussa muodossa. Tulomuoto on silti hyödyllinen työkalu myös reaaliluvuilla laskettaessa.

Esimerkki 4.1.11. Olkoon $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) = (y-3)(y-2)(y-1)$, funktio (ja polynomi). Määritämme funktion g nollakohdat käyttämällä tulon ominaisuutta: Lukujen tulo on nolla jos ja vain jos joku kerrotuista luvuista on nolla.

Siis $g(y) = 0$ jos ja vain jos vähintään yksi seuraavista on nolla:

- $y-3$
- $y-2$
- $y-1$.

Joku ylläolevista on nolla jos ja vain jos $y \in \{1,2,3\}$, joka on siten polynomin g nollakohtien joukko.

Jos polynomin yhden nollakohdan löytää, esimerkiksi arvaamalla ja kokeilemalla tai numeerisesti, voi polynomia yksinkertaistaa kohti tulomuotoa. Yksinkertaistaminen tapahtuu jakolaskulla.

Polynomien jakolasku onnistuu samankaltaisella algoritmilla kuin reaalilukujen jakolasku jakokulmassa:

Esimerkki 4.1.12 (Polynomien jakolasku)**.** Laskemme ensin laskun

$$\frac{x^4 + x^3 + x - 1}{x^2 + 1}. \tag{4.1.24}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & & & x^2 & +x & -1 \\ \hline
x^2+1 & x^4 & +x^3 & & +x & -1 \\
 & -x^4 & & -x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & x^3 & -x^2 & +x & \\
 & & -x^3 & & -x & \\ \cline{3-5}
 & & & -x^2 & & -1 \\
 & & & x^2 & & +1 \\ \cline{4-6}
 & & & & & 0
\end{array}$$

Polynomien jakamisesta voi jäädä myös jakojäännös. Seuraavassa laskemme, että

$$\frac{x^4 + x^3 + x - 1}{x^2 - 1} = x^2 + x + 1 + \frac{2x}{x^2 - 1}. \tag{4.1.25}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & x^2 & & +x & +1 \\ \cline{2-5}
x^2 - 1 & x^4 + x^3 & & +x & -1 \\
 & -x^4 & +x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & x^3 + x^2 & & +x & \\
 & -x^3 & & +x & \\ \cline{2-4}
 & & x^2 & +2x & -1 \\
 & & -x^2 & & +1 \\ \cline{3-5}
 & & & 2x &
\end{array}$$

Esimerkki 4.1.13 (Polynomien nollakohtien etsintä jakolaskulla)**.** Olkoot

$$Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6. \tag{4.1.26}$$

Huomaamme ensin kokeilemalla, että $Q(1) = 0$, eli lauseen 4.1.8 perusteella polynomi Q on jaollinen polynomilla $x - 1$. Laskemme jakolaskun:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & -5x & +6 & \\ \cline{2-4}
x - 1 & x^3 - 6x^2 & +11x & -6 & \\
 & -x^3 + x^2 & & & \\ \cline{2-2}
 & -5x^2 & +11x & & \\
 & 5x^2 & -5x & & \\ \cline{2-3}
 & & 6x & -6 & \\
 & & -6x & +6 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Siis

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 1} = x^2 - 5x + 6. \tag{4.1.27}$$

Kokeilemalla tai toiseen asteen yhtälön ratkaisukaavalla löydämme nollakohdan $x = 2$, eli $Q(2) = 0$. Jaamme toisen asteen polynomin ensimmäisen asteen polynomilla $x - 2$:

$$\begin{array}{r|rrr}
 & & x & -3 \\ \cline{2-4}
x - 2 & x^2 & -5x & +6 \\
 & -x^2 & +2x & \\ \cline{2-3}
 & & -3x & +6 \\
 & & 3x & -6 \\ \cline{3-4}
 & & & 0
\end{array}$$

Siis

$$\frac{x^2-5x+6}{x-2} = x-3. \tag{4.1.28}$$

Kaiken kaikkiaan

$$Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3). \tag{4.1.29}$$

Määritelmä 4.1.14 (Rationaalifunktio)**.** Olkoot P ja Q polynomeja. Funktiota

$$\frac{P}{Q}(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \tag{4.1.30}$$

sanotaan rationaalifunktioksi. Se on määritelty kaikissa pisteissä x, joissa funktion lauseke on määritelty eli $Q(x) \neq 0$, ja lisäksi kaikissa niissä pisteissä, jossa polynomien jakolaskun jälkeinen lauseke on määritelty. Symbolein

$$\frac{P}{Q}\colon \{x \in \mathbb{R}; Q(x) \neq 0\} \to \mathbb{R} \tag{4.1.31}$$

on lausekkeen määrittelyjoukko, ja osa funktion määrittelyjoukkoa. Lisäksi pitää vielä tarkastaa polynomin jakolaskulla sievennetyn lausekkeen määrittelyjoukko, joka voi olla suurempi.

Esimerkki 4.1.15. Mikä on rationaalifunktion suurin mahdollinen määrittelyjoukko, kun sen lauseke on

$$\frac{x^2+x}{3x^2-3}?$$

Lauseke on määritelty ainakin, kun $x^2 - 1 \neq 0$ eli $x \neq -1$ ja $x \neq 1$. Nimittäjästä voi ottaa luvun 3 yhteiseksi tekijäksi, jolloin nimittäjän lausekkeeksi tulee $3\left(x^2-1\right)$. Muistikaavan nojalla sen voi edelleen kirjoittaa muotoon $3(x+1)(x-1)$. Osoittajasta voi ottaa muuttujan x yhteiseksi tekijäksi, jolloin lausekkeeksi muodostuu $x(x+1)$. Siis

$$\frac{x^2+x}{3x^2-3} = \frac{x(x+1)}{3(x+1)(x-1)} = \frac{x}{3(x-1)}.$$

Tämä lauseke on määritelty, kun muuttujan x arvo on mikä tahansa reaaliluku paitsi luku -1. Rationaalifunktion suurin mahdollinen määrittelyjoukko on siis reaalilukujen joukko, josta jätetään luku -1 pois. Joukko-opin symbolein määrittelyjoukon voi kirjoittaa $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Esimerkki 4.1.16. Osoitamme, että rationaalifunktio $\frac{P}{Q}$,

$$\frac{P}{Q}(x) = \frac{-4x^4 + 11x^3 + 15x^2}{x^3 + x^2}, \tag{4.1.32}$$

on määritelty kaikilla reaaliluvuilla.

Ensin huomaamme, että

$$\frac{-4x^4+11x^3+15x^2}{x^3+x} = \frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{-4x^2+11x+15}{x+1} = \frac{-4x^2+11x+15}{x+1}. \quad (4.1.33)$$

Jatkamme jakolaskulla:

$$\begin{array}{r|l} & -4x+15 \\ \hline x+1 & -4x^2+11x+15 \\ & \underline{4x^2+4x} \\ & 15x+15 \\ & \underline{-15x-15} \\ & 0 \end{array}$$

Siis

$$\frac{P}{Q}(x) = -4x+15, \quad (4.1.34)$$

joka on polynomi ja määritelty kaikilla reaaliluvuilla.

Esimerkki 4.1.17. Mikä on suurin mahdollinen määrittelyjoukko rationaalifunktiolle, jonka lauseke on

$$\frac{3x^3-2}{6x^5-\sqrt{7}x^3-x}? \quad (4.1.35)$$

Lauseke on määritelty, kun nimittäjä $6x^5-\sqrt{7}x^3-x \neq 0$.

$$6x^5-\sqrt{7}x^3-x = 0 \quad (4.1.36)$$

$$\Leftrightarrow \quad x\left(6x^4-\sqrt{7}x^2-1\right) = 0. \quad (4.1.37)$$

Siis, joko $x = 0$ tai

$$6x^4 - \sqrt{7}x^2 - 1 = 0 \qquad \| \cdot \frac{1}{6} \tag{4.1.38}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^4 - \frac{\sqrt{7}}{6}x^2 - \frac{1}{6} = 0 \qquad \text{sijoitus } s = x^2 \geq 0 \tag{4.1.39}$$

$$\Leftrightarrow \quad s^2 - \frac{\sqrt{7}}{6}s - \frac{1}{6} = 0 \tag{4.1.40}$$

$$\Leftrightarrow \quad s^2 - 2\frac{\sqrt{7}}{12}s + \left(\frac{\sqrt{7}}{12}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{12}\right)^2 - \frac{1}{6} = 0 \tag{4.1.41}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(s - \frac{\sqrt{7}}{12}\right)^2 - \frac{31}{144} = 0 \qquad \| + \frac{31}{144} \tag{4.1.42}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(s - \frac{\sqrt{7}}{12}\right)^2 = \frac{31}{144} \qquad \|\sqrt{} \tag{4.1.43}$$

$$\Leftrightarrow \quad s - \frac{\sqrt{7}}{12} = \begin{cases} \frac{\sqrt{31}}{12} \text{ tai} \\ -\frac{\sqrt{31}}{12} \end{cases} \qquad \| + \frac{\sqrt{7}}{12} \tag{4.1.44}$$

$$\Leftrightarrow \quad s = \begin{cases} \frac{\sqrt{31}+\sqrt{7}}{12} \text{ tai} \\ \frac{\sqrt{7}-\sqrt{31}}{12} \end{cases} \qquad s \geq 0 \tag{4.1.45}$$

$$\Leftrightarrow \quad s = \frac{\sqrt{31} + \sqrt{7}}{12}. \tag{4.1.46}$$

$$\tag{4.1.47}$$

Koska $x^2 = s$, saamme

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{31} + \sqrt{7}}{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{31} + \sqrt{7}}{3}} \tag{4.1.48}$$

tai

$$x = -\sqrt{\frac{\sqrt{31} + \sqrt{7}}{12}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{31} + \sqrt{7}}{3}}. \tag{4.1.49}$$

Siis lauseke ei ole määritelty ainoastaan, kun

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{31} + \sqrt{7}}{3}}, x = 0 \text{ tai } x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{31} + \sqrt{7}}{3}}. \tag{4.1.50}$$

Suurin mahdollinen määrittelyjoukko on $x \in \mathbb{R}$ ja x ei ole mikään kolmesta yllä listatusta luvusta.

Koska mikään nimittäjän nollakohdista ei ole osoittajan nollakohta, ei rationaalifunktiota voi määritellä missään niissä.

Esimerkki 4.1.18 (Rationaalifunktioepäyhtälö)**.** Ratkaisemme epäyhtälön

$$\frac{x^2+1}{x-7} < 0. \tag{4.1.51}$$

Lauseke on määritelty, kun $x \neq 7$. Osamäärä on negatiivinen, kun osoittaja ja nimittäjä ovat erimerkkisiä. Osoittaja on aina positiivinen, joten osamäärä on negatiivinen jos ja vain jos nimittäjä on negatiivinen, eli $x - 7 < 0$. Yhtäpitävästi epäyhtälö on tosi jos ja vain jos $x < 7$.

Yksinkertaisia korkeamman asteen polynomiyhtälöitä voi ratkaista ottamalla korkeampia juuria yhtälön molemmilta puolilta:

Esimerkki 4.1.19. Ratkaisemme yhtälöt $x^3 + 17 = 0$ ja $z^4 = 12$.

$$\begin{aligned}
& & x^3 + 17 &= 0 & &\| - 17\\
&\Leftrightarrow & x^3 &= -17 & &\| \, ()^{1/3}\\
&\Leftrightarrow & x &= (-17)^{1/3} & &\\
&\Leftrightarrow & x &= -\,(17)^{1/3}. & &
\end{aligned}$$

Yhtälön $z^4 = 12$ voi ratkaista muuttujanvaihdon $s = z^2$ avulla – muuttujanvaihdon jälkeen jäljelle jää toisen asteen yhtälö. Toinen tapa on ottaa neljäs juuri yhtälön molemmilta puolilta:

$$z^4 = 12 \qquad \| \pm ()^{1/4} \tag{4.1.52}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \begin{cases} 12^{1/4} \text{ tai} \\ -12^{1/4} \end{cases} \tag{4.1.53}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \begin{cases} \sqrt[4]{12} \text{ tai} \\ -\sqrt[4]{12}. \end{cases} \tag{4.1.54}$$

Kaikki parittomat potenssit käyttäytyvät kuten kolmas potenssi – ratkaisuita on vain yksi ja kolmannen juuren saa ottaa negatiivisesta luvusta. Tämä johtuu siitä, että negatiivisen luvun pariton potenssi on edelleen negatiivinen. Toisaalta parilliset potenssit käyttäytyvät kaikki kuten toinen potenssi – vain positiivisella luvulla (ja nollalla) on parillinen juuri, koska parillinen potenssi mistä tahansa luvusta on aina positiivinen. Koska alkuperäisen luvun merkki häviää, pitää muistaa sekä positiivinen että negatiivinen ratkaisu.

4.2 Eksponentti ja logaritmi

Määritelmä 4.2.1 (Eksponentti)**.** Olkoot $a > 0$ reaaliluku. Tällöin funktiota $f\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$, jonka lauseke on $f(x) = a^x$, kutsutaan eksponenttifunktioksi.

Määritelmä 4.2.2 (Logaritmin määritelmä, osa 1)**.** Olkoot $a > 0$ reaaliluku, $a \neq 1$. Tällöin funktiota $\log_a\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ kutsutaan logaritmifunktioksi, jonka kantaluku on a. Jos $a = 10$, merkitään $\log_a = \log_{10} = \lg$, ja jos $a = e$ (eli Napierin tai Neperin luku), merkitään $\log_a = \log_e = \ln$. Funktiota $\log_e$ kutsutaan luonnolliseksi logaritmiksi.

Logaritmille ei anneta suoraa lauseketta, vaan sen arvot lasketaan eksponenttifunktion avulla.

Logaritmi ja eksponentti ovat käänteisfunktioita:

Määritelmä 4.2.3 (Logaritmin määritelmä, osa 2)**.** Olkoot $a \neq 1$ positiivinen reaaliluku. Jos $x \in \mathbb{R}$, niin

$$\log_a (a^x) = x. \tag{4.2.1}$$

Jos $y > 0$, niin

$$a^{\log_a y} = y. \tag{4.2.2}$$

Esimerkki 4.2.4.

- $\log_3 9 = \log_3 (3^2) = 2$ yhtälön (4.2.1) perusteella.
- $\log_{10} (1/100) = \log_{10} (10^{-2}) = -2$ yhtälön (4.2.1) perusteella.
- $49^{\log_7 10} = (7^2)^{\log_7 10} = 7^{2\log_7 10} = \left(7^{\log_7 10}\right)^2 = 10^2 = 100$ yhtälön (4.2.2) perusteella.

Muut logaritmia koskevat laskusäännöt saa johdettua käänteiskuvausominaisuudesta ja eksponenttifunktion ominaisuuksista, jotka seuraavat suoraan potenssin laskusäännöistä, jotka käsiteltiin kappaleessa 1.3.

Lause 4.2.5 (Logaritmin laskusääntöjä)**.** *Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$ positiivisia lukuja, joista kumpikaan ei ole yksi, ja olkoot $x,z,p > 0$ reaalilukuja.*

1. $\log_a a = 1$
2. $\log_a 1 = 0$
3. $\log_a (xz) = \log_a(x) + \log_a(z)$
4. $\log_a \left(\frac{x}{z}\right) = \log_a(x) - \log_a(z)$
5. $\log_a(x^p) = p \log_a x$
6. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
7. *Jos $a > 1$ ja $x > z$, niin $\log_a x > \log_a z$.*
8. *Jos $0 < a < 1$ ja $x > z$, niin $\log_a x < \log_a z$.*

Todistus. Logaritmin ominaisuudet todistetaan määritelmän ja potenssin ominaisuuksien avulla. Annamme muutaman esimerkin.

1:

$$\log_a a = \log_a \left(a^1\right) = 1.$$

Viimeinen yhtäsuuruus käytti logaritmin määritelmää.

2:

$$\log_a 1 = \log_a \left(a^0\right) = 0.$$

3:

$$\begin{aligned}
& & \log_a (xz) &= \log_a(x) + \log_a(z) && \| \text{ korota luvun } a \text{ potenssiksi} \\
&\Leftrightarrow & a^{\log_a(xz)} &= a^{\log_a(x)+\log_a(z)} && \text{logaritmin määritelmä} \\
&\Leftrightarrow & xz &= a^{\log_a(x)+\log_a(z)} && \text{potenssin laskusääntö} \\
&\Leftrightarrow & xz &= a^{\log_a(x)} a^{\log_a(z)} && \text{logaritmin määritelmä} \\
&\Leftrightarrow & xz &= x \cdot z. &&
\end{aligned}$$

Koska alkuperäinen väite on yhtäpitävää toden väitteen kanssa kaikilla sallituilla muuttujien arvoilla, on alkuperäinen väite todistettu. □

Esimerkki 4.2.6. Radioaktiivisilla aineilla on puoliintumisaika, joka kertoo, kuinka nopeasti aine menettää puolet massastaan radioaktiivisen hajoamisen kautta. Palovaroittimissa käytetyn amerikiumin isotoopin 241 puoliintumisaika on noin 432 vuotta. Paljonko amerikiumin massaa on jäljellä 10 vuoden kuluttua? Kuinka kauan kestää, että amerikiumin massasta on jäljellä enää kymmenenesosa?

Nimeämme ensin tehtävässä esiintyvät suureet. Olkoot $m_0 > 0$ alkuperäinen massa ja $t \in \mathbb{R}$ aika, siten että hetkellä $t = 0$ amerikiumin massa on m_0. Olkoot massa ajan hetkellä t täsmälleen m_t.

Muodostamme seuraavaksi yhtälön. Haluamme selvittää sellaisen ajanhetken t, jolla amerikiumin massalle pätee $m_t = m_0/10$. Koska massa puoliintuu aina 432 vuodessa ja puoliintuminen tapahtuu jatkuva-aikaisesti, noudattaa massa yhtälöä

$$m_t = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{432\ \mathrm{a}}} m_0 \tag{4.2.3}$$

missä a (latinaksi annus) on vuoden lyhenne. Tarkistamme yhtälön järkevyyden: Kun $t = 0$, niin

$$m_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{0}{432\ \mathrm{a}}} m_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 m_0 = m_0,$$

mikä on tosi. Kun $t = 432$ a, niin

$$m_{432\ \mathrm{a}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{432\ \mathrm{a}}{432\ \mathrm{a}}} m_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} m_0 = \frac{1}{2} m_0,$$

eli massa on puoliintunut 432 vuodessa, kuten pitikin. Yhtälö näyttää toimivan ainakin näissä tapauksissa.

Massa kymmenen vuoden kuluttua selviää asettamalla $t = 10$ a yhtälöön:

$$m_{10\ \mathrm{a}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10\ \mathrm{a}}{432\ \mathrm{a}}} m_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{216}} m_0 \approx 0{,}98 m_0, \tag{4.2.4}$$

eli massasta on kadonnut noin kaksi prosenttia.

Aika siihen, että vain kymmenesosa massasta on jäljellä, saadaan ratkaisemalla aika t yhtälöstä

$$\begin{aligned}
& & \frac{m_0}{10} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{432\ \mathrm{a}}} m_0 & & \| \cdot \frac{1}{m_0} \\
&\Leftrightarrow & \frac{1}{10} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{432\ \mathrm{a}}} & & \| \log_{1/2} \\
&\Leftrightarrow & \log_{1/2}\left(\frac{1}{10}\right) &= \log_{1/2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{432\ \mathrm{a}}}\right) & & \text{(logaritmin määritelmä)} \\
&\Leftrightarrow & \log_{1/2}\left(\frac{1}{10}\right) &= \frac{t}{432\ \mathrm{a}} & & \| \cdot 432\ \mathrm{a} \\
&\Leftrightarrow & \log_{1/2}\left(\frac{1}{10}\right) 432\ \mathrm{a} &= t & & \\
&\Leftrightarrow & t &= \log_{1/2}\left(\frac{1}{10}\right) 432\ \mathrm{a} & & \text{(logaritmin laskusääntö)} \\
&\Leftrightarrow & t &= \left(\log_{1/2} 1 - \log_{1/2} 10\right) 432\ \mathrm{a} & & \text{(logaritmin laskusääntö)} \\
&\Leftrightarrow & t &= -\log_{1/2}(10) \cdot 432\ \mathrm{a}. & &
\end{aligned}$$

Jos haluaa likiarvon, eikä laskin tai ohjelmisto hallitse kaikkien kantalukujen logaritmia, voi kantaa muuttaa laskusäännöllä, jolloin saa yhtälön

$$\begin{aligned}
t &= -\log_{1/2}(10) \cdot 432\ \mathrm{a} = -\frac{\log_e 10}{\log_e(1/2)} \cdot 432\ \mathrm{a} = -\frac{\log_e 10}{\log_e 1 - \log_e 2} \cdot 432\ \mathrm{a} \\
&= -\frac{\log_e 10}{-\log_e 2} \cdot 432\ \mathrm{a} = \frac{\log_e 10}{\log_e 2} \cdot 432\ \mathrm{a} \approx 1400\ \mathrm{a}.
\end{aligned}$$

Tarkistus: Sijoita 1400 vuotta alkuperäiseen yhtälöön.

(Viimeisessä laskussa 2-kantaisten logaritmien käyttö olisi johtanut vielä siistimpään laskuun.)

Seuraus 4.2.7 (Logaritmin merkki)**.** *Koska kakilla kantaluvuilla a pätee $\log_a 1 = 0$, voimme päätellä kahdesta viimeisestä laskusäännöstä logaritmin merkin muissa tapauksissa.*

Jos $0 < a < 1$ ja $x > 1$, niin

$$\log_a x < \log_a 1 = 0. \tag{4.2.5}$$

Jos $0 < a < 1$ ja $x < 1$, niin

$$\log_a x > \log_a 1 = 0. \tag{4.2.6}$$

Jos $a > 1$, niin epäyhtälöt ovat päinvastaiset: Jos $x > 1$, niin

$$\log_a x > \log_a 1 = 0. \tag{4.2.7}$$

Jos $x < 1$, niin

$$\log_a x < \log_a 1 = 0. \tag{4.2.8}$$

Esimerkki 4.2.8. Jos heittää n kappaletta noppia, niin todennäköisyys, että mikään niistä ei anna tulosta 6, on $(5/6)^n$. Tässä n on ei-negatiivinen kokonaisluku. Kuinka monta noppaa pitää heittää, jotta todennäköisyys sille, että mikään nopista ei saa arvoa 6, on pienempi tai yhtä pieni kuin 1/20?

Muodostamme ja ratkaisemme epäyhtälön, jossa muuttujana on n:

$$
\begin{array}{llll}
 & \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 1/20 & & \| \log_e \text{ (järjestys säilyy koska } e > 1) \\
\Leftrightarrow & \log_e \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq \log_e \left(\frac{1}{20}\right) & & \text{(logaritmin laskusääntö)} \\
\Leftrightarrow & n \log_e \left(\frac{5}{6}\right) \leq \log_e \left(\frac{1}{20}\right) & & \| \cdot \frac{1}{\log_e (5/6)} \text{ (negatiivinen)} \\
\Leftrightarrow & n \geq \log_e \left(\frac{1}{20}\right) / \log_e \left(\frac{5}{6}\right) & & \text{(logaritmin laskusääntö)} \\
\Leftrightarrow & n \geq \frac{\log_e 1 - \log_e 20}{\log_e (5/6)} & & \text{(logaritmin laskusääntö)} \\
\Leftrightarrow & n \geq \frac{0 - \log_e 20}{\log_e (5/6)} & & \text{(sievennys)} \\
\Leftrightarrow & n \geq -\frac{\log_e 20}{\log_e (5/6)} & & \text{(logaritmin laskusääntö)} \\
\Leftrightarrow & n \geq -\frac{\log_e 20}{\log_e 5 - \log_e 6} & & \text{(sievennys)} \\
\Leftrightarrow & n \geq \frac{\log_e 20}{\log_e 6 - \log_e 5} \approx 16{,}43 & & (n \text{ kokonaisluku}) \\
\Leftrightarrow & n \geq 17. & &
\end{array}
$$

Tarkistus: $(5/6)^{16} \approx 0{,}054 > 1/20$ ja $(5/6)^{17} \approx 0{,}045 < 1/20$.

Vastaus: Pitää heittää vähintään 17 noppaa, jotta todennäköisyys sille, että minkään tulos ei ole kuusi, on korkeintaan 1/20.

Esimerkki 4.2.9. Ratkaisemme epäyhtälön $\log_4 y \geq 5$.

$$\begin{aligned}
& \log_4 y \geq 5 && \parallel \text{ luvun 4 potenssiin; säilyttää järjestyksen koska } 4 > 1 \\
\Leftrightarrow\quad & 4^{\log_4 y} \geq 4^5 && \text{(logaritmin määritelmä)} \\
\Leftrightarrow\quad & y \geq 4^5 && \text{(sievennys)} \\
\Leftrightarrow\quad & y \geq 1024.
\end{aligned}$$

Siis alkuperäinen epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön $y \geq 1024$ kanssa.

Epäyhtälön ratkaisujoukko on $[1024,\infty[$.

4.3 Trigonometriset funktiot

Käytämme tällä kurssilla (ja yleensä matematiikassa) radiaaneja asteiden sijaan, kun haluamme kertoa kulman koon. Radiaaniyksikköä ei kirjoiteta näkyviin, vaan radiaaneissa mitattu kulman suuruus on paljas (yksikötön) luku. Asteita ja radiaaneja yhdistää yhtälö

$$360^\circ = 2\pi \text{ (radiaania).} \tag{4.3.1}$$

Täyden ympyrän tai täyden kulman suuruus radiaaneina on siis 2π. Geometrisesti radiaani tulkitaan tarkoittamaan yksikköympyrän kaaren pituutta, joka vastaa annettua kulmaa.

Kulman suuruus radiaaneissa voi olla positiivinen tai negatiivinen. Kulman merkkiä varten pitää valita yksikköympyrästä jokin nollasuunta – matematiikassa nollasuunta on yksikköympyrän keskipisteestä suoraan oikealle (kellotaulussa kello 3) lähtevä puolisuora. Nollasuunta vastaa kulmaa 0 (radiaania). Nollasuunnasta vastapäivään alkavat positiiviset kulmat ja myötäpäivään negatiiviset.

Esimerkki 4.3.1 (Asteiden ja radiaanien muuntaminen toisikseen)**.** Yksikkömuunnos tapahtuu täsmälleen samalla tavalla kuin esimerkiksi tuumien muuttaminen senttimetreiksi tai kilometrien/tunti muuttaminen metreiksi/sekunti.

Koska $360^\circ = 2\pi$, niin $1 = 2\pi/360^\circ = 360^\circ/(2\pi)$.

$$60^\circ = 60^\circ \cdot 1 = 60^\circ \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = 2\pi/6 = \pi/3.$$

Vaihtoehtoisesti voi ratkaista muuttujan s arvon ensimmäisen asteen yhtälöstä

$$\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{s}{2\pi}.$$

Lasku on täsmälleen sama kuin edellisellä menetelmällä.

Vastaavasti

$$\frac{4}{5}\pi = \frac{4}{5}\pi \cdot 1 = \frac{4}{5}\pi \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{4 \cdot 360^\circ}{5 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{\pi} = 4 \cdot 36^\circ = 144^\circ$$

tai halutessaan voi ratkaista ensimmäisen asteen yhtälön

$$\frac{a}{360^\circ} = \frac{4\pi/5}{2\pi},$$

joka johtaa samaan laskuun.

Määritelmä 4.3.2 (Sini ja kosini)**.** Funktion $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ määrää seuraava sääntö: $\sin(t)$ on sen pisteen y-koordinaatti, joka vastaa kulmaa t yksikköympyrällä.

Funktion $\cos\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ määrää seuraava sääntö: $\cos(t)$ on sen pisteen x-koordinaatti, joka vastaa kulmaa t yksikköympyrällä.

Esimerkki 4.3.3. Selvitämme seuraavien lausekkeiden arvot: $\sin(\pi/2)$, $\cos(\pi/2)$, $\sin(\pi/4)$ ja $\cos(\pi/4)$.

Kulma $\pi/2$ vastaa neljännesympyrää. Neljännesympyrä positiivisesta x-akselista vastapäivään tarkoittaa positiivista y-akselia, jolle kuuluu yksikköympyrän piste $(x,y) = (0,1)$. Siis $\sin(\pi/2) = y = 1$ ja $\cos(\pi/2) = x = 0$.

Kulma $\pi/4$ vastaa kahdeksasosaympyrää, eli pistettä jossa $x > 0$, $y > 0$ ja $x = y$. Sijoitus yksikköympyrän yhtälöön antaa yhtälön

$$x^2 + x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1/2 \Leftrightarrow x = 1/\sqrt{2},$$

missä otimme huomioon rajoitteen $x > 0$. Kyseisessä pisteessä siis $(x,y) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, joten $\sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ ja $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$.

Lause 4.3.4 (Sinin ja kosinin ominaisuuksia)**.** *Olkoot $t \in \mathbb{R}$.*

1. $(\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 = 1$
2. $|\sin(t)| \le 1$ *ja* $|\cos(t)| \le 1$
3. $\sin(t + k2\pi) = \sin(t)$ *ja* $\cos(t + k2\pi) = \cos(t)$ *kaikille kokonaisluvuille k; sinin ja kosinin jaksollisuus*
4. $\sin(t + \pi) = -\sin(t)$ *ja* $\cos(t + \pi) = -\cos(t)$
5. $\sin(-t) = -\sin(t)$ *ja* $\cos(-t) = \cos(t)$*; sini on pariton funktio ja kosini parillinen funktio*

6. $\sin(t) = 0$ *jos ja vain jos on olemassa kokonaisluku* k *siten, että* $t = k\pi$
7. $\cos(t) = 0$ *jos ja vain jos on olemassa kokonaisluku* k *siten, että* $t = \pi/2 + k\pi$.

Perustelu. Yksikköympyrän yhtälö on

$$x^2 + y^2 = 1.$$

1. Sijoita $x = \cos t$ ja $y = \sin t$ yksikköympyrän yhtälöön.
2. Seuraa ensimmäisestä kohdasta: Jos esimerkiksi olisi $|\sin(t)| > 1$, niin myös $(\sin(t))^2 > 1$, jolloin myös $(\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 > 1$. Tämä on ristiriidassa ensimmäisen kohdan kanssa, joten väite on tosi. Kosinia koskeva väite todistetaan samalla tavalla.
3. Kulman muuttaminen luvulla 2π tai sen moninkerralla ei muuta yksikköympyrän pistettä (eikä sen koordinaatteja), joten myös sini ja kosini säilyvät muuttumattomina.
4. Ympyrän vastakkaisessa pisteessä molempien koordinaattien merkki on päinvastainen, joten myös sinin ja kosinin merkit ovat päinvastaiset.
5. Muutos $t \mapsto -t$ vastaa pisteen peilaamista x-akselin suhteen. Tämä säilyttää pisteen x-koordinaatin ja muuttaa y-koordinaatin vastaluvuksi.
6. Kun on olemassa kokonaisluku k siten, että $x = k\pi$, niin vastaava yksikköympyrän piste on x-akselilla, eli sen y-koordinaatti on nolla.
7. Kun on olemassa kokonaisluku k siten, että $x = \pi/2 + k\pi$, niin vastaava piste on y-akselilla, eli sen x-koordinaatti on nolla.

□

Esimerkki 4.3.5. Ratkaisemme yhtälön $\cos(w - 2) = 0$.

Lauseen nojalla (tai yksikköympyrää tarkastelemalla) yhtälö on tosi jos ja vain jos on olemassa kokonaisluku k siten, että

$$\begin{aligned} && w - 2 &= \frac{\pi}{2} + k\pi && \| + 2 \\ \Leftrightarrow && w &= 2 + \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{aligned}$$

Siis yhtälön ratkaiset ne muuttujan w arvot, joille on olemassa kokonaisluku k, jolle $w = 2 + \frac{\pi}{2} + k\pi$. Joukko-opin avulla voimme kirjoittaa ratkaisujoukon muodossa

$$\left\{ 2 + \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Esimerkki 4.3.6. Ratkaisemme yhtälön $\sin(u) = 1/2$.

Yksikköympyrällä yhtälön ratkaisupisteet ovat yksikköympyrän ja suoran $y = 1/2$ leikkauspisteet, jotka saamme yhtälöparista

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 1/2. \end{cases}$$

Alemman yhtälön sijoitus ylempään antaa yhtälön

$$\begin{aligned}
& x^2+y^2=1 && y=1/2\\
\Leftrightarrow\quad & x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1 && \text{(sievennys)}\\
\Leftrightarrow\quad & x^2+\frac{1}{4}=1 && \|-\frac{1}{4}\\
\Leftrightarrow\quad & x^2=\frac{3}{4} && \|\pm\sqrt{}\\
\Leftrightarrow\quad & x=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ tai } x=\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Mitkä kulmat antavat pisteet $(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$ ja $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$?

Kokeilemalla laskimella, arvaamalla tai taulukosta saamme yhden ratkaisun $u=\pi/6$, joka vastaa pistettä jonka molemmat koordinaatit ovat positiivisia. Sinin ominaisuuksilla löydämme myös toisen ratkaisun, joka ei ole luvun 2π moninkerta ensimmäisestä:

$$\begin{aligned}
\sin(\pi/6) &= -\sin(\pi+\pi/6) = -\sin(7\pi/6) = \sin(-7\pi/6) = \sin(2\pi+(-7\pi/6))\\
&= \sin(2\pi-7\pi/6) = \sin(5\pi/6).
\end{aligned}$$

Ratkaisu $u=5\pi/6$ vastaa pistettä, jolla on negatiivinen x-koordinaatti.

Löysimme siis kahta eri pistettä vastaavat ratkaisut. Riittää löytää kaikki ne kulmat, jotka vastaavat löydettyjä pisteitä. Nämä kulmat ovat luvun 2π moninkertojen päässä löydetyistä ratkaisuista. Siis u on ratkaisu jos ja vain jos

$$u\in\{\pi/6+2\pi k; k\in\mathbb{Z}\} \text{ tai } u\in\{5\pi/6+2\pi k; k\in\mathbb{Z}\}.$$

Esimerkki 4.3.7. Ratkaisemme yhtälön $\sin(6r)\sin(-6r)=-1$.

Laskusäännön $\sin(-s)=-\sin(s)$ nojalla $\sin(-6r)=-\sin(6r)$. Täten

$$\begin{aligned}
& \sin(6r)\sin(-6r)=-1\\
\Leftrightarrow\quad & \sin(6r)\cdot(-\sin(6r))=-1 && \text{(sievennys)}\\
\Leftrightarrow\quad & -(\sin(6r))^2=-1 && \|\cdot(-1)\\
\Leftrightarrow\quad & (\sin(6r))^2=1 && \|\pm\sqrt{}\\
\Leftrightarrow\quad & \sin(6r)=1 \text{ tai } \sin(6r)=-1.
\end{aligned}$$

Yksikköympyrän pisteen (x,y) koordinaatti y on yksi jos ja vain jos on olemassa kokonaisluku k, jolle pistettä vastaava kulma $t=\pi/2+k2\pi$. Vastaavasti $\sin t=-1$ jos ja vain jos on olemassa kokonaisluku l siten, että $t=-\pi/2+l2\pi$.

Kun nämä joukot yhdistää, saa ehdon $t \in \{\pi/2 + m\pi; m \in \mathbb{Z}\}$. Kirjoittamalla $t = 6r$ saa ehdon

$$\begin{aligned} && 6r &= \frac{\pi}{2} + m\pi && \| \cdot \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow && r &= \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}m, && \end{aligned}$$

missä m on kokonaisluku. Yhtälön ratkaisujoukko on siis

$$\left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}m; m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Esimerkki 4.3.8. Sievennämme lausekkeen

$$\frac{1/2 + \sin(s)\cos(s)}{(\sin(s) + \cos(s))^2}.$$

Lauseke on määritelty, kun nimittäjä ei ole nolla, eli yhtäpitävästi kun $\sin(s) + \cos(s) \neq 0$.

Selvitämme ensin, milloin $\sin(s) + \cos(s) = 0$. Tämä tapahtuu niissä yksikköympyrän pisteissä, joissa $x = -y$. Saamme yhtälöparin

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = -y. \end{cases}$$

Kun suoran yhtälön $x = -y$ sijoittaa ympyrän yhtälöön $x^2 + y^2 = 1$, saa yhtälön

$$\begin{aligned} && (-y)^2 + y^2 &= 1 && \text{(sievennys)} \\ \Leftrightarrow && 2y^2 &= 1 && \| \cdot \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow && y^2 &= \frac{1}{2} && \| \pm \sqrt{} \\ \Leftrightarrow && y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ tai } y = -\frac{1}{\sqrt{2}}. && \end{aligned}$$

Suoran yhtälöstä selviää, että yhtälöparin ratkaisevat pisteet

$$(x,y) \in \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}.$$

Näitä pisteitä vastaavat kulmat $s = 3\pi/4 + k\pi$, missä k käy läpi kaikki kokonaisluvut. Siis lauseke ei ole määritelty, kun $s \in \{3\pi/4 + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Sievennämme seuraavaksi lauseketta.

$$
\begin{aligned}
\frac{1/2+\sin(s)\cos(s)}{(\sin(s)+\cos(s))^2} &= \frac{1/2+\sin(s)\cos(s)}{(\sin(s))^2+2\sin(s)\cos(s)+(\cos(s))^2} \\
&= \frac{1/2+\sin(s)\cos(s)}{(\sin(s))^2+(\cos(s))^2+2\sin(s)\cos(s)} \\
&= \frac{1/2+\sin(s)\cos(s)}{1+2\sin(s)\cos(s)} \\
&= \frac{1/2+\sin(s)\cos(s)}{2\cdot 1/2+2\cdot\sin(s)\cos(s)} \\
&= \frac{1/2+\sin(s)\cos(s)}{2\,(1/2+\sin(s)\cos(s))} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Seuraavan lauseen todistus onnistuu helpoiten kompleksilukujen avulla, mutta myös alkeisgeometrialla selviää. Sivuutamme todistuksen.

Lause 4.3.9 (Kulmien summa). *Kaikille reaaliluvuille s ja t pätee*

- $\cos(s+t)=\cos(s)\cos(t)-\sin(s)\sin(t)$
- $\sin(s+t)=\sin(s)\cos(t)+\sin(t)\cos(s)$.

Kulmien summalauseen avulla voi johtaa eli todistaa suuria määriä muitakin trigonometristen funktioiden yhtäsuuruuksia. Laajoja listauksia näistä löytyy esimerkiksi taulukkokirjoista ja englanninkielisestä Wikipediasta.

Esimerkki 4.3.10. Kaikille reaaliluvuille a pätee

$$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a).$$

Todistus: Valitse $s=t=a$ kulmien summalauseessa.

Määritelmä 4.3.11 (Tangentti). Funktion tan määrittelyjoukko on

$$\{x\in\mathbb{R}; \text{ei ole kokonaislukua } k\in\mathbb{Z} \text{ siten, että } x=\pi/2+k\pi\}\,, \tag{4.3.2}$$

maalijoukko on reaaliluvut ja sääntö on

$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}. \tag{4.3.3}$$

Sinin ja kosinin merkin, ja niiden avulla myös tangentin merkin, voi päätellä merkkikaavioista.

- Jos kulma $t = 0$, olemme positiivisella x-akselilla, joten x-koordinaatti on $+1$ ja y-koordinaatti nolla. Siis $\sin(t) = 0$ ja $\cos(t) = 1$.
- Jos kulma $t \in]0,\pi/2[$, olemme koordinaatiston neljänneksessä, jossa sekä x että y ovat positiivisia. Siis $\sin(t) > 0$ ja $\cos(t) > 0$.
- Jos kulma $t = \pi/2$, olemme positiivisella y-akselilla, joten x-koordinaatti on 0 ja y-koordinaatti $+1$. Siis $\sin(t) = 1$ ja $\cos(t) = 0$.
- Jos kulma $t \in]\pi/2,\pi[$, olemme koordinaatiston neljänneksessä, jossa x-koordinaatti on negatiivinen ja y-koordinaatti on positiivinen. Siis $\sin(t) > 0$ ja $\cos(t) < 0$.
- Jos kulma $t = \pi$, olemme negatiivisella x-akselilla, joten x-koordinaatti on -1 ja y-koordinaatti nolla. Siis $\sin(t) = 0$ ja $\cos(t) = -1$.
- Jos kulma $t \in]\pi,3\pi/2[$, olemme koordinaatiston neljänneksessä, jossa molemmat koordinaatit ovat negatiivisia. Siis $\sin(t) < 0$ ja $\cos(t) < 0$.
- Jos kulma $t = 3\pi/2$, olemme negatiivisella y-akselilla, joten x-koordinaatti on 0 ja y-koordinaatti -1. Siis $\sin(t) = -1$ ja $\cos(t) = 0$.
- Jos kulma $t \in]3\pi/2,2\pi[$, olemme koordinaatiston neljänneksessä, jossa x-koordinaatti on positiivinen ja y-koordinaatti on negatiivinen. Siis $\sin(t) < 0$ ja $\cos(t) > 0$.

Koska täysi kulma on suuruudeltaan 2π, trigonometristen funktioiden merkki muilla arvoilla palautuu edellämainittuihin lisäämällä tai vähentämällä sopiva luvun 2π moninkerta.

5 Raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta

Matemaattinen analyysi käsittelee funktioiden jatkuvuutta, kasvunopeutta, suurimpien ja pienempien arvojen olemassaoloa ja sijaintia, sekä yleisemmin reaalifunktion käytöstä.

Tässä ja seuraavassa luentomonisteen osiossa kaikki funktiot ovat reaalifunktioita.

5.1 Raja-arvo

Funktion raja-arvo reaaliluvun x_0 kohdalla on se arvo, jota funktion arvot $f(x)$ lähestyvät, kun x lähestyy pistettä x_0. Raja-arvon voi laskea myös pelkälle lausekkeelle. Emme anna tämän tarkempaa määritelmää raja-arvolle tällä kurssilla, vaan lähestymme asiaa esimerkkien kautta.

Funktion raja-arvoa reaaliluvun x_0 kohdalla merkitään

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a, \tag{5.1.1}$$

missä a on funktion raja-arvo pisteessä x_0, tai kirjoittamalla $f(x) \to a$ kun $x \to x_0$. Merkki " $\to$ " kannattaa lukea "lähestyy".

Funktiolla ei välttämättä ole raja-arvoa missään tietyssä, tai yhtään missään, pisteessä, mutta suurin osa yleensä vastaan tulevista funktioista ei ole näin patologisia.

Esimerkki 5.1.1 (Identtisen kuvauksen raja-arvo)**.**

$$\lim_{x \to 5} x = 5, \tag{5.1.2}$$

eli kun $x \to 5$, niin $x \to 5$. Tässä $x_0 = 5$.

Perustelu: Kun luku x on melkein viisi, niin luku x on melkein viisi. Tarkempi matemaattinen perustelu vaatisi tarkemman raja-arvon määritelmän, mutta ei olisi juuri monimutkaisempi.

Sama tulos pätee muillekin luvuille kuin luvulle viisi.

Esimerkki 5.1.2 (Patologinen funktio)**.** Reaalifunktiolla $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, jonka sääntö on

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \tag{5.1.3}$$

ei ole raja-arvoa nollassa.

Perustelu: Vaikka rajoittaisimma muuttujan x kuinka lyhyelle välille nollan lähellä, saa funktio siellä kaikki arvot väliltä $[-1, 1]$. Siis funktiolla ei ole mitään yksittäistä arvoa, johon se suppenisi, vaan sen arvot heiluvat yhä kiihtyvää tahtia lukujen -1 ja 1 välillä, kun $x \to 0$.

Emme todista seuraavaa lausetta tällä kurssilla.

Lause 5.1.3 (Raja-arvon ominaisuuksia)**.** *Olkoot f ja g reaalifunktioita, jotka on määritelty lähellä reaalilukua x_0 (mutta ei välttämättä luvulla x_0), ja joilla on raja-arvot*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \text{ ja } \lim_{x \to x_0} g(x) = b. \tag{5.1.4}$$

Olkoon lisäksi $c \in \mathbb{R}$ mikä tahansa vakio(funktio). Tällöin seuraavat las-

kusäännöt pätevät:

$$\lim_{x\to x_0} c = c \tag{5.1.5}$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0}(f(x)) + \lim_{x\to x_0}(g(x)) = a+b \tag{5.1.6}$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to x_0}(f(x)) - \lim_{x\to x_0}(g(x)) = a-b \tag{5.1.7}$$

$$\lim_{x\to x_0}(cf(x)) = c\lim_{x\to x_0} f(x) = ca \tag{5.1.8}$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to x_0}(f(x)) \cdot \lim_{x\to x_0}(g(x)) = ab \tag{5.1.9}$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{a}{b} \qquad \textit{kun } b \neq 0. \tag{5.1.10}$$

Näillä laskusäännöillä voi laskea polynomien ja rationaalifunktioiden raja-arvoja, koska polynomit ja rationaalifunktiot saadaan ylläolevilla laskutoimituksilla sekä identtisen kuvauksen raja-arvolla.

Esimerkki 5.1.4.

$$\lim_{x\to 4} x^2 = \lim_{x\to 4} x \cdot \lim_{x\to 4} x = 4 \cdot 4 = 16. \tag{5.1.11}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x+1} = \frac{\lim_{x\to 1} x^2}{\lim_{x\to 1} x+1} = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}. \tag{5.1.12}$$

$$\tag{5.1.13}$$

Raja-arvon voi laskea myös rationaalilausekkeen arvolla, jossa lauseketta ei ole määritetty.

Esimerkki 5.1.5. Tutkimme lauseketta $(y^2+5y+6)\,/\,(y+3)$, missä y on muuttuja, pisteessä $y=-3$. Jos arvon $y=-3$ sijoittaa nimittäjään, saa vastaukseksi nollan, eli pelkkä sijoittaminen ei toimi. Jos saman arvon sijoittaa osoittajaan, tulee tulokseksi myös nolla. Koska osoittaja on polynomi jonka nollakohta on -3, täytyy osoittajan olla jaollinen polynomilla $y-(-3)=y+3$.

$$\begin{array}{r|r}
 & y+2 \\ \hline
y+3 & y^2+5y+6 \\
 & -\,y^2-3y \\ \cline{2-2}
 & 2y+6 \\
 & -\,2y-6 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

Jakolaskun tuloksena saamme, että $y^2+5y+6=(y+2)(y+3)$. Jakokulman sijaan jakolaskun voi suorittaa lauseketta muokkaamalla:

$$\begin{aligned} y^2+5y+6 &= y\cdot y+y\cdot 5+6 = y\cdot(y+5)+6 = y\cdot(y+3)+y\cdot 2+6 \\ &= y\cdot(y+3)+y\cdot 2+3\cdot 2 = y\cdot(y+3)+(y+3)\cdot 2 \\ &= (y+3)(y+2). \end{aligned}$$

Voimme jatkaa raja-arvon tutkimista:

$$\begin{aligned} \lim_{y\to-3}\frac{y^2+5y+6}{y+3} &= \lim_{y\to-3}\frac{(y+2)(y+3)}{y+3} = \lim_{y\to-3}(y+2) \\ &= \lim_{y\to-3}y+\lim_{y\to-3}2 = -3+2=-1. \end{aligned}$$

Raja-arvon määritelmällä on ongelmia käsitellä paloittain määriteltyjä funktioita, kuten (fyysikoiden käyttämää) Heavisiden funktiota.

Esimerkki 5.1.6 (Heavisiden funktio)**.** Funktio $H\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$H(x)=\begin{cases}0, & \text{jos } x\le 0\\ 1, & \text{jos } 0<x,\end{cases} \tag{5.1.14}$$

on nimeltään Heavisiden funktio. Tutkimme raja-arvoa $\lim_{x\to 0}H(x)$. Jos katsomme mitä tahansa pientä avointa väliä, jolle luku nolla kuuluu, niin Heavisiden funktio saa sekä arvoa nolla että arvoa 1. Täten sillä ei voi olla raja-arvoa, koska sen saamat arvot eivät suppene kohti mitään tiettyä lukuarvoa.

Kuitenkin Heavisiden funktiolla näyttää olevan raja-arvo negatiivisten lukujen puolelta eli vasemmalta ja positiivisten lukujen puolelta eli oikealta – kyseiset toispuoleiset raja-arvot vain eivät kohtaa.

Funktion raja-arvo vasemmalta eli negatiivisten lukujen suunnasta (vastaavasti oikealta eli positiivisten reaalilukujen suunnasta) reaaliluvun x_0 kohdalla on se arvo, jota funktion arvot $f(x)$ lähestyvät, kun x lähestyy pistettä x_0 negatiivisesta suunnasta (vastaavasti positiivisesta suunnasta). Funktion raja-arvoa negatiivisesta suunnasta eli vasemmalta reaaliluvun x_0 kohdalla merkitään

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x) \tag{5.1.15}$$

tai kirjoittamalla $f(x)\to f(x_0)$ kun $x\to x_0^-$. Vastaavasti raja-arvoa positiivisten lukujen suunnasta eli oikealta merkitään

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x). \tag{5.1.16}$$

Esimerkki 5.1.7. Olkoon H Heavisiden funktio. Tällöin

$$\lim_{x \to x_0^-} H(x) = 0 \text{ ja } \lim_{x \to x_0^+} H(x) = 1. \tag{5.1.17}$$

Esimerkki 5.1.8.

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} -x = -\lim_{x \to 0^-} x = 0 \text{ ja } \lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0. \tag{5.1.18}$$

Siis itseisarvofunktion molemmat toispuoleiset raja-arvot nollassa ovat nollia.

Seuraavan lauseen mukaan funktiolla on tietty raja-arvo jos ja vain jos molemmat sen toispuoleiset raja-arvot ovat olemassa ja antavat saman arvon.

Lause 5.1.9. *Olkoon f reaalifunktio ja $x_0 \in \mathbb{R}$. Tällöin*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \tag{5.1.19}$$

jos ja vain jos

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a \text{ ja } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = a. \tag{5.1.20}$$

Esimerkki 5.1.10. Olkoot funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määräävä sääntö

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{jos } x \leq 0 \\ x^2, & \text{jos } x > 0. \end{cases}$$

Laskemme ensin muutaman esimerkkiarvon funktiolle f, jonka jälkeen laskemme sen toispuoleiset raja-arvot pisteessä 0.

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^2 = 9 && \text{koska } 3 > 0 \\ f(-14) &= 2 \cdot (-14) = -28 && \text{koska } -14 \leq 0 \\ f(0) &= 2 \cdot 0 = 0 && \text{koska } 0 \leq 0. \end{aligned}$$

Määritämme nyt funktion f raja-arvot nollassa.

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (2x) = 2 \lim_{x \to 0^-} x = 2 \cdot 0 = 0 \text{ ja} \\ &\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2) = \lim_{x \to 0^+} (x \cdot x) = \lim_{x \to 0^+} x \cdot \lim_{x \to 0^+} x = 0 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Tällöin, lauseen 5.1.9 nojalla, $f(x) \to 0$ kun $x \to 0$, koska tämä on totta molemmille toispuoleisille raja-arvoille.

Esimerkki 5.1.11. Tutkimme funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ raja-arvoja pisteessä 3, kun funktion g lauseke on

$$g(y) = \begin{cases} \frac{-y^2+7}{5y-5}, \text{ jos } y \leq 3 \\ y^3, \text{ jos } y > 3. \end{cases}$$

Kun $y > 3$, niin

$$g(y) = y^3 \to 3^3 = 27, \text{ kun } y \to 3^+.$$

Toisaalta, kun $y < 3$, niin

$$g(y) = \frac{-y^2+7}{5y-5} \to \frac{-3^2+7}{5 \cdot 3 - 5} = \frac{-9+7}{15-5} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}, \text{ kun } y \to 3^-.$$

Koska toispuoleiset raja-arvot eri suunnista eriävät, ei funktiolla ole molemminpuolista raja-arvoa pisteessä 3.

Funktioiden kuvaajien piirtämistä varten on hyvä tutustua myös epäoleellisiin raja-arvoihin, eli raja-arvoihin kun $x \to \pm\infty$ (eli kasvaa tai pienenee rajatta, eli saa mielivaltaisen suuria tai pieniä arvoja) ja sellaisia raja-arvoja, joissa funktion arvot kasvavat tai vähenevät rajatta.

Kun funktio saa pisteen $x_0 \in \mathbb{R}$ ympäristössä sitä suurempi arvoja, mitä lähempänä pistettä x_0 ollaan, eikä arvoilla ole ylärajaa, kirjoitamme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty. \tag{5.1.21}$$

Vastaavasti, kun funktio saa pisteen x_0 ympäristöissä aina pienempiä ja pienempiä arvoja[6] ilman alarajaa, kirjoitamme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty. \tag{5.1.22}$$

Samat kirjoitustavat ja määritelmät pätevät myös toispuoleisille raja-arvoille.

Huomautus 5.1.12. Funktio ei tässä saa arvoa ääretön, vaan sen saamat arvot kasvavat ilman rajaa. Ääretön ei ole luku.

Esimerkki 5.1.13.

$$\frac{1}{x} \to \infty \text{ kun } x \to 0^+,$$

sillä kun x on aina vain pienempi (mutta positiivinen), niin sen käänteisluku jatkuvasti kasvaa ja pysyy positiivisena. Toisaalta

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

sillä lähellä nollaa olevien negatiivisten lukujen käänteisluvut ovat itseisarvoltaan suuria negatiivisia lukuja.

[6] Tässä 'pienempiä' tarkoittaa 'enemmän ja enemmän negatiivisia' eli 'negatiivisia ja itseisarvoltaan kasvavia', kuten lukujono $-1, -10, -100, -1000$, jne.

Esimerkki 5.1.14. Funktio $h\colon \mathbb{R} \setminus \sqrt{7} \to \mathbb{R}$, $h(b) = \left(b + \sqrt{7}\right) / \left(b - \sqrt{7}\right)$, on määritelty kaikilla reaaliluvuilla paitsi luvulla $\sqrt{7}$.

Kun $b > \sqrt{7}$, niin $b + \sqrt{7} > 0$ ja $b - \sqrt{7} > 0$, joten $h(b) > 0$. Koska lisäksi $b - \sqrt{7} \to 0$ kun $b \to \sqrt{7}^{+}$, saamme

$$\lim_{b \to \sqrt{7}^{+}} \frac{b + \sqrt{7}}{b - \sqrt{7}} = \infty.$$

Toisaalta, kun $b < \sqrt{7}$ mutta ei liian paljon pienempää (esimerkiksi $b > 2$), niin $b + \sqrt{7} > 0$ ja $b - \sqrt{7} < 0$, joten $h(b) < 0$. Koska lisäksi $b - \sqrt{7} \to 0$ kun $b \to \sqrt{7}^{-}$, saamme

$$\lim_{b \to \sqrt{7}^{-}} \frac{b + \sqrt{7}}{b - \sqrt{7}} = -\infty.$$

Raja-arvot äärettömässä ja miinus äärettömässä kertovat, mitä lukua (jos mitään) funktion $f(x)$ arvo lähestyy, kun $x \to \infty$ eli x kasvaa rajatta tai $x \to -\infty$ eli x vähenee ilman alarajaa. Funktio voi luvun x kasvaessa tai pienentyessä saada äärellisen raja-arvon, voi heilua äärettömän paljon (ja välttää saamasta raja-arvoa) tai se voi kasvaa tai pienentyä rajatta, jolloin raja-arvoksi merkitään ∞ tai $-\infty$.

Huomautus 5.1.15. Tässä ei lasketa funktion arvoa äärettömässä, vaan selvitetään funktion käytöstä kun muuttuja joka funktiolle syötetään kasvaa rajatta. Reaalifunktion arvoa äärettömässä ei ole määritelty, koska ääretön ei ole reaaliluku.

Esimerkki 5.1.16.

$$\begin{aligned}
\lim_{b \to \infty} \frac{b + \sqrt{7}}{b - \sqrt{7}} &= \lim_{b \to \infty} \frac{b\left(1 + \sqrt{7}/b\right)}{b\left(1 - \sqrt{7}/b\right)} = \lim_{b \to \infty} \left(\frac{b}{b} \cdot \frac{1 + \sqrt{7}/b}{1 - \sqrt{7}/b}\right) = \lim_{b \to \infty} \frac{1 + \sqrt{7}/b}{1 - \sqrt{7}/b} \\
&= \frac{\lim_{b \to \infty}\left(1 + \sqrt{7}/b\right)}{\lim_{b \to \infty}\left(1 - \sqrt{7}/b\right)} = \frac{\lim_{b \to \infty} 1 + \lim_{b \to \infty}\left(\sqrt{7}/b\right)}{\lim_{b \to \infty} 1 - \lim_{b \to \infty}\left(\sqrt{7}/b\right)} \\
&= \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1
\end{aligned}$$

Esimerkki 5.1.17. Kun $z < 0$, niin myös $z^3 < 0$. Kun $z \to -\infty$ (eli z vähenee rajatta), niin tekee myös z^3. Siis

$$\lim_{z \to -\infty} z^3 = -\infty.$$

Esimerkki 5.1.18 (Tohvelieläimen paluu)**.** Harjoituksissa selvitimme, että hyvissä olosuhteissa tohvelieläinten lukumäärä noudattaa yhtälöä

$$n_t = n_0 2^t,$$

missä t on aika päivinä ja n_t on tohvelieläinten lukumäärä kun aikaa on kulunut t päivää.

Kuinka suureksi tohvelieläinten populaatio voi kasvaa, jos niiden lukumäärä noudattaa ylläolevaa kaavaa? Laskemme tätä varten raja-arvon

$$\lim_{t\to\infty} n_t = \lim_{t\to\infty} \left(n_0 2^t\right) = n_0 \lim_{t\to\infty} \left(2^t\right) = \infty,$$

kunhan $n_0 > 0$. Tässä käytimme tulosta $\lim_{t\to\infty} 2^t = \infty$, jonka perustelussa tyydymme kokeelliseen lähestymistapaan: kokeilemalla esimerkiksi $t = 10$, $t = 100$, $t = 1000$ ja niin edelleen näyttää siltä, että mitään äärellistä rajaa ei ole.

Siis tohvelieläinten populaatio kasvaisi rajatta. Erityisesti, jos aikaa kuluisi tarpeeksi, niin tohvelieläinpopulaation massa ylittäisi maapallon, aurinkokunnan ja lopulta universumin massan. Tässä vaiheessa lienee ilmeistä, että kaavamme ei toimi kovin hyvin, kun aika t kasvaa kovin suureksi.

Esimerkki 5.1.19.

$$\begin{aligned}
\lim_{w\to\infty} \frac{w^3 - 11w + 6}{-19w^4 - 2w^2 + 5} &= \lim_{w\to\infty} \frac{w^3\left(1 - 11w^{-2} + 6w^{-3}\right)}{w^4\left(-19 - 2w^{-2} + 5w^{-4}\right)} \\
&= \lim_{w\to\infty} \left(\frac{w^3}{w^4} \cdot \frac{1 - 11w^{-2} + 6w^{-3}}{-19 - 2w^{-2} + 5w^{-4}}\right) \\
&= \lim_{w\to\infty} \frac{w^3}{w^4} \cdot \lim_{w\to\infty} \frac{1 - 11w^{-2} + 6w^{-3}}{-19 - 2w^{-2} + 5w^{-4}} \\
&= \lim_{w\to\infty} \frac{1}{w} \cdot \frac{\lim_{w\to\infty}\left(1 - 11w^{-2} + 6w^{-3}\right)}{\lim_{w\to\infty}\left(-19 - 2w^{-2} + 5w^{-4}\right)} \\
&= 0 \cdot \frac{1}{-19} = 0.
\end{aligned}$$

Funktioiden graafien piirtäminen toimii samoin kuin ennenkin – laske funktion arvoja eri muuttujien arvoilla ja piirrä vastaaviin tason pisteisiin merkki. Piirrä sitten käyrä, joka kulkee kaikkien merkkien läpi. Raja-arvojen tuntemus auttaa piirtämään parempia kuvaajia. Jokaiselta funktiolta kannattaa aina kysyä, miten se käyttäytyy äärettömässä ja miinus äärettömässä, eli mitkä kyseiset raja-arvot ovat. Samoin kannattaa selvittää funktion käytös kaikkien määrittelemättömyyspisteiden kohdalla ja paloittaisten määrittelyiden muutoskohdissa tutkimalla toispuoleisia raja-arvoja kyseisissä pisteissä.

Lausekkeen sieventäminen ei vaikuta funktion arvoon, joten kannattaa sieventää lauseke niin sieväksi kuin osaa ennen kuvaajan piirtämistä.

Lista asioita, jotka kannattaa selvittää kun tutkii funktion käytöstä:

1. Määrittelyjoukko.
2. Nollakohdat.
3. Raja-arvo äärettömässä.
4. Raja-arvo miinus äärettömässä.
5. Toispuoleiset raja-arvot pisteissä, joissa funktioita ei ole määritelty.
6. Järkevä toispuoleinen raja-arvo sellaisen välin reunalla, jossa funktioita ei ole määritelty.
7. Jos funktio on paloittain määritelty, niin funktion arvo ja toispuoliset raja-arvot niissä pisteissä, joissa funktion lauseke muuttuu.

Huomautus 5.1.20. Jos lausekkeen raja-arvoksi meinaa tulla ∞/∞, $\infty - \infty$, $0/0$, 0^∞, ∞^0, $\infty^{-\infty}$, 0^0 tai jokin muu huonosti määritelty lauseke, tarkoittaa se, että lauseketta pitää sieventää, muuttaa eri muotoon tai arvioida ennen rajankäyntiä.

Määritelmä 5.1.21. Olkoot f ja g reaalifunktioita. Tällöin sanomme, että niiden käytös on asymptoottisesti sama äärettömässä, jos ja vain jos

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0. \tag{5.1.23}$$

Vastaavasti funktioiden f ja g käytös miinus äärettömässä on asymptoottisesti sama jos ja vain jos

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - g(x)) = 0. \tag{5.1.24}$$

5.2 Jatkuvuus

Intuitiivisesti, jatkuva funktio on sellainen, jonka kuvaajan voi piirtää jatkuvana käyränä nostamatta kynää paperista. Tällä intuitiivisella määritelmällä on hankala laskea mitään tai todistaa mitään, joten emme käytä sitä sen enempää.

Määritelmä 5.2.1 (Jatkuvuus)**.** Funktio f on jatkuva pisteessä x_0 jos ja vain jos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{5.2.1}$$

Funktio on jatkuva joukossa, jos ja vain jos se on jatkuva kaikissa kyseisen joukon pisteissä. Funktio on jatkuva jos ja vain jos se on jatkuva koko määrittelyjoukossaan, eli sen jokaisessa pisteessä.

Lause 5.2.2 (Alkeisfunktiot ovat jatkuvia)**.** *Kaikki seuraavat funktiot ovat jatkuvia* ***määrittelyjoukossaan****.*

- *Vakiofunktiot*
- *Polynomit*
- *Rationaalifunktiot*
- *Potenssifunktiot (ja siten juurifunktiot)*
- *Eksponentit*
- *Logaritmit*
- *Trigonometriset funktiot*
- *Itseisarvofunktio.*

Lauseen todistus sivuutetaan.

Voidaan todistaa, että raja-arvon voi "siirtää jatkuvan funktion sisälle" ja ulos sieltä; matemaattisesti tätä kutsutaan yhdistettyjen funktioiden jatkuvuudeksi. Käsittelemme asiaa esimerkkien kautta.

Esimerkki 5.2.3. Koska logaritmi ja kahdella kertominen säilyttävät jatkuvuuden, voimme laskea

$$\lim_{s \to e} \log_e (2s) = \log_e \left(\lim_{s \to e} (2s) \right) = \log_e (2e) = \log_e e + \log_e 2 = 1 + \log_e 2.$$

Siis lähes kaikki nimetyt funktiot ovat jatkuvia. Paloittain määritellyt funktiot eivät välttämättä ole jatkuvia; esimerkiksi Heavisiden funktio on epäjatkuva pisteessä 0.

On olemassa funktioita, jotka ovat epäjatkuvia kaikissa pisteissä, mutta emme käsittele niitä tällä kurssilla. Sen sijaan käymme läpi muutaman esimerkin epäjatkuvista funktioista.

Esimerkki 5.2.4 (Poistuva epäjatkuvuus)**.** Funktiolla on poistuva epäjatkuvuus eli piste-epäjatkuvuus pisteessä x_0 jos ja vain jos funktiolla on raja-arvo kyseisessä pisteessä (eli toispuoleiset raja-arvot ovat olemassa ja saavat saman arvon), mutta funktion arvo siinä pisteessä on erisuuri kuin raja-arvo.

Esimerkiksi seuraavilla lausekkeilla määritellyillä reaalifunktiolla on kaikilla poistuva epäjatkuvuus pisteessä 5.

$$g(h) = \begin{cases} h, \text{ kun } h \neq 5 \\ 722, \text{ kun } h = 5, \end{cases} \qquad f(v) = \begin{cases} 3, \text{ kun } v \neq 5 \\ -\pi, \text{ kun } v = 5 \end{cases}$$

$$\text{ja } A(x) = \begin{cases} 14x^2 - 4, \text{ kun } x \neq 5 \\ 0, \text{ kun } x = 5. \end{cases}$$

Todistukset epäjatkuvuuksille:

$$\lim_{h \to 5} g(h) = \lim_{h \to 5} h = 5 \neq 722 = h(5)$$

$$\lim_{v \to 5} f(v) = \lim_{v \to 5} 3 = 3 \neq -\pi = f(5)$$

$$\lim_{x \to 5} A(x) = \lim_{x \to 5} \left(14x^2 - 4 \right) = 14 \cdot 5^2 - 4 = 14 \cdot 25 - 4346 \neq 0 = A(5).$$

Esimerkki 5.2.5 (Hyppyepäjatkuvuus)**.** Jos funktiolla on jossain pisteessä molemmat toispuoleiset raja-arvot, mutta niiden arvot ovat erisuuret, niin funktiolla on kyseisessä pisteessä hyppyepäjatkuvuus (riippumatta funktion arvosta kyseisessä pisteessä).

Esimerkiksi Heavisiden funktiolla on hyppyepäjatkuvuus nollassa. Seuraavilla lausekkeilla määritellyillä funktioilla on myös hyppyepäjatkuvuus:

$$f(a) = \begin{cases} a, \text{ kun } a \geq 4 \\ -a, \text{ kun } a < 4, \end{cases} \qquad g(b) = \begin{cases} \log_2 b, \text{ jos } b > 1 \\ \sin(b), \text{ jos } b \leq 1 \end{cases}$$
$$\text{ja } h(c) = \begin{cases} e^c, \text{ kun } c < -1 \\ \sqrt{|c|}, \text{ kun } c \geq -1. \end{cases}$$

Tarkistamme epäjatkuvuuden laskemalla toispuoleiset raja-arvot:

$$\lim_{a \to 4^+} f(a) = \lim_{a \to 4^+} a = 4 \text{ ja } \lim_{a \to 4^-} f(a) = \lim_{a \to 4^-} -a = -4,$$

eli toispuoleiset raja-arvot ovat erisuuret pisteessä 4, jossa on hyppyepäjatkuvuus.

$$\begin{aligned} \lim_{b \to 1^+} g(b) &= \lim_{b \to 1^+} \log_2 b = \log_2 1 = 0 \text{ ja} \\ \lim_{b \to 1^-} g(b) &= \lim_{b \to 1^-} \sin(b) = \sin(1) \neq 0, \end{aligned}$$

koska 1 ei ole muotoa $k\pi$ millekään kokonaisluvulle k. Koska sin on jatkuva funktio, niin raja-arvo on olemassa. Siis toispuoleiset raja-arvot ovat erisuuret pisteessä 4, jossa on hyppyepäjatkuvuus.

$$\begin{aligned} &\lim_{c \to -1^+} h(c) = \lim_{c \to -1^+} \sqrt{|c|} = \sqrt{\lim_{c \to -1^+} |c|} = \sqrt{\left| \lim_{c \to -1^+} c \right|} = \sqrt{|-1|} = \sqrt{1} = 1 \text{ ja} \\ &\lim_{c \to -1^-} h(c) = \lim_{c \to -1^-} e^c = e^{-1}, \end{aligned}$$

eli toispuoleiset raja-arvot eivät ole yhtä suuret vaikka molemmat niistä ovat olemassa ja äärellisiä, joten pisteessä -1 on hyppyepäjatkuvuus.

Epäjatkuvuus seuraa myös, jos toinen tai molemmat funktion toispuoleisista raja-arvoista ei ole määritelty tai ei ole äärellinen luku.

Esimerkki 5.2.6 (Epäjatkuvuus ja äärettömyys)**.** Esimerkiksi reaalifunktio v, joka on määritelty kaikilla luvuilla paitsi nollassa lausekkeella $v(t) = \log_e(|t|)$, ja miten tahansa nollassa, on epäjatkuva, koska

$$\lim_{t \to 0^+} v(t) = \lim_{t \to 0^+} \log_e |t| = \lim_{t \to 0^+} \log_e t = -\infty$$

(tarkista kokeilemalla esim. $t = 1/e, 1/e^2, 1/e^{1000}$ jne.). Riippumatta funktion arvosta nollassa se ei ole jatkuva. Vaikka

$$\lim_{t \to 0^-} v(t) = \lim_{t \to 0^-} \log_e |t| = \lim_{t \to 0^-} \log_e -t = -\infty$$

eli toispuoleiset raja-arvot saavat saman arvon; koska tämä arvo ei ole äärellinen, ei funktio voi mitenkään olla jatkuva kyseisessä pisteessä.

Lause 5.2.7 (Jatkuvien funktioiden yhdistäminen)**.** *Jos funktiot f ja g ovat jatkuvia pisteessä x_0, niin niiden summa, erotus, tulo, osamäärä (kunhan ei jaeta nollalla) ja toinen korotettuna toisen potenssiksi (kunhan syntyvä potenssilauseke on hyvin määritelty) ovat kaikki jatkuvia.*

Jos funktio g on jatkuva kaikkialla ja f on jatkuva ja määritelty kaikilla niillä luvuilla, jotka g voi saada arvoina, niin yhdistetty funktio $f(g(x))$ on myös jatkuva.

Esimerkki 5.2.8. Seuraavien lausekkeiden avulla määritellyt funktiot ovat jatkuvia ja määritelty kaikilla reaaliluvuilla. Kirjain x on reaalimuuttuja.

$$\sin(e^x), 15^{|x|}, \tan(\cos x), x^5 - 5^x, \log_6\left(x^2 + e^{-x}\right), e^{(e^x)} \cdot |x|$$

Jatkuvien funktioiden nollakohtia on helpompi löytää kuin epäjatkuvien: Bolzanon lause sanoo, että jatkuva funktio joka saa positiivisen ja negatiivisen arvon saa myös arvon nolla niiden välissä.

Lause 5.2.9 (Bolzanon lause (Bolzano, 1817))**.** *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio, jolla $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkisiä (toinen on positiivinen ja toinen negatiivinen luku). Tällöin on olemassa luku $x_0 \in\,]a,b[$, jolle pätee $f(x_0) = 0$.*

Esimerkki 5.2.10. Tutkimme yhtälöä $e^x = -x$. Yhtälön ratkaisu tässä vaiheessa tunnettujen funktioiden avulla ei onnistu. Lisäämällä x yhtälön molemmille puolille saamme yhtälön $e^x + x = 0$. Tutkimme funktiota $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x + x$ ja yritämme todistaa, että sillä on nollakohta.

Funktio g on jatkuva, koska se on eksponenttikuvauksen ja identtisen kuvauksen summa ja sekä eksponenttikuvaus että identtinen kuvaus ovat jatkuvia. Lisäksi $g(0) = e^0+0 = 1$ ja $g(-1) = e^{-1}-1 < 0$, koska $e^{-1} = 1/e < 1$. (Yksi jaettuna yhtä suuremalla luvulla on alle yksi.) Koska funktio g on jatkuva (erityisesti välillä $[-1, 0]$) ja saa jonkin välin toisessa päätepisteessä positiivisen arvon ja toisessa negatiivisen arvon, niin Bolzanon lauseen nojalla välillä $]-1, 0[$ on vähintään yksi funktion nollakohta. Funktion nollakohta on alkuperäisen yhtälön ratkaisu; siis tiedämme, että yhtälöllä on vähintään yksi ratkaisu ja lisäksi tiedämme sen sijaitsevan välillä $]-1, 0[$.

Bolzanon lause ei kerro, miten yhtälön ratkaisun tai sen likiarvon voi löytää. Jos haluamme etsiä likiarvon, voimme käyttää esimerkiksi puolitushakua (tai joten edistyneempää menetelmää, kuten Newtonin menetelmää tai sen muunnelmia).

Tiedämme, että välillä $]-1,0[$ on funktion g nollakohta. Koitamme puoliväliä eli laskemme luvulle $g(-1/2) = e^{-1/2} - 1/2$ likiarvon vaikkapa laskimella tai arvioimme muuten, että se on positiivinen. Nyt tiedämme, että $g(-1) < 0$ ja $g(-1/2) > 0$ ja g on jatkuva funktio välillä $[-1,-1/2]$, joten Bolzanon lauseen nojalla sillä on nollakohta välillä $]-1,-1/2[$. Voimme jatkaa puolitushakua tutkimalla seuraavaksi pistettä $-3/4$ ja huomaamalla että $g(-3/4) < 0$, jolloin ratkaisun on oltava välillä $]-3/4,-1/2[$ ja valitsemalla edelleen sen puolivälin.

Esimerkki 5.2.11. Tutkimme funktiota h, jonka lauseke on $1/z$, missä z on reaalimuuttuja. Onko funktiolla nollakohtaa? Yritämme käyttää Bolzanon lausetta: $h(-1) = -1 < 0$ ja $h(1) = 1 > 0$, joten voimmeko Bolzanon lauseesta päätellä, että välillä $]-1,1[$ on funktion nollakohta? Emme voi, koska funktiota ei ole määritelty kun $z = 0$ ja $0 \in [-1,1]$. Koska funktiota ei ole määritelty tietyssä pisteessä, ei se myöskään ole jatkuva kyseisessä pisteessä.

Seuraus 5.2.12. *Okoot $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio, jolle pätee toinen seuraavista:*

1. *$f(x) \to \infty$ kun $x \to \infty$ ja lisäksi $f(x) \to -\infty$ kun $x \to -\infty$.*
2. *$f(x) \to -\infty$ kun $x \to \infty$ ja lisäksi $f(x) \to \infty$ kun $x \to -\infty$.*

Siis funktio saa sekä raja-arvon ääretön että raja-arvon miinus ääretön, kun x kasvaa tai vähenee rajatta.

Tällöin funktiolla on vähintään yksi nollakohta, eli on olemassa piste $x_0 \in \mathbb{R}$, jolle pätee $f(x_0) = 0$.

Todistus. Todistamme lauseen ensimmäisen tilanteen mukaisessa tapauksessa. Koska $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ eli funktio saa rajoittamattoman suuria arvoja kun x kasvaa rajatta, niin jossain vaiheessa funktio saa positiivisia arvoja. Olkoot $b \in \mathbb{R}$ sellainen luku, että $f(b) > 0$.

Vastaavasti, koska $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, niin funktio saa jossain vaiheessa negatiivisia arvoja. Se saa niitä myös joillakin lukua b pienemmillä (enemmän negatiivisilla) luvuilla. Siis on olemassa sellainen luku $a \in \mathbb{R}$, jolle pätee $a < b$ ja $f(a) < 0$.

Nyt funktio täyttää Bolzanon lauseen ehdot välillä $[a,b]$, joten lukujen a ja b väliltä täytyy löytyä vähintään yksi funktion nollakohta. □

Seuraus 5.2.13. *Parittoman asteen polynomeilla on aina vähintään yksi nollakohta.*

Perustelu. Jos parittoman asteen polynomin korkeimman kertaluvun termin kerroin on positiivinen, täyttää se ylläolevan seurauksen ensimmäisen ehdon, ja jos negatiivinen, niin toisen ehdon. □

Esimerkki 5.2.14. Lausekkeilla x^7-11x, $-57y^{101}+216y^4+y^2-6$ ja $\pi z^{55}+z^{32}$ määritellyt polynomifunktiot ovat parittoman asteisia polynomeja, joten niillä kullakin on vähintään yksi nollakohta.

5.3 Derivaatta

Reaalifunktion f derivaatta pisteessä x_0 määritellään erotusosamäärän eli seuraavan raja-arvon avulla:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Jos raja-arvo on olemassa, niin funktiolla on pisteessä derivaatta. Jos raja-arvoa ei ole olemassa tai se on ääretön, ei funktiolla ole kyseisessä pisteessä derivaattaa.

Derivaatalle on useita erilaisia merkintöjä. Tässä muutamia tapoja ilmaista funktion f derivaatta muuttujan x suhteen:

$$f'(x), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x), \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, D_x f(x).$$

Vastaavasti derivointi muuttujan a suhteen kirjoitettaisiin esimerkiksi $D_a f$.

Funktion derivaatta tarkoittaa sen hetkellistä kasvunopeutta tai yleistettyä kulmakerrointa (kulmakerroin on mielekäs vain suoralle; derivaatta yleistää sen eli toimii useille sellaisille funktioille, joiden kuvaaja ei ole suora).

Esimerkki 5.3.1. Jos funktio $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kertoo kappaleen paikan, eli $x(t)$ on kappaleen paikka ajan hetkellä t, niin sen derivaatta kertoo kappaleen nopeuden. Nopeuden derivaatta kertoo kappaleen kiihtyvyyden. Fyysikot merkitevät aikaderivaattaa laittamalla derivoitavan funktion ylle pisteen: $\dot{x}(t)$ on nopeus hetkellä t ja $\ddot{x}(t)$ on kiihtyvyys.

Esimerkki 5.3.2. Olkoot $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) = 4y - 7$, funktio. Tällöin

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}(5) &= \lim_{y \to 5} \frac{g(y) - g(5)}{y - 5} = \lim_{y \to 5} \frac{4y - 7 - (4 \cdot 5 - 7)}{y - 5} = \lim_{y \to 5} \frac{4y - 7 - 20 + 7)}{y - 5} \\
&= \lim_{y \to 5} \frac{4y - 20}{y - 5} = \lim_{y \to 5} \frac{4 \cdot y - 4 \cdot 5}{y - 5} = \lim_{y \to 5} \frac{4 \cdot (y - 5)}{y - 5} = \lim_{y \to 5} 4 = 4.
\end{aligned}$$

Lause 5.3.3. *Jos funktiolla on derivaatta, on se jatkuva.*

Huomautus 5.3.4. Kaikkia jatkuvia funktioita ei voi derivoida; jos funktion kuvaajassa on terävä nurkka, kuten itseisarvolla nollassa, ei funktio ole siinä pisteessä derivoituva.

Käytännössä funktioiden derivaattoja ei lasketa määritelmän avulla, vaan derivoimissäännöillä. Kaikki derivoimissäännöt voi johtaa määritelmästä. Emme tee sitä tällä kurssilla.

Lause 5.3.5. *Olkoot $c \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$ ja $a > 0$, $a \neq 1$.*

1. $Dc = 0$.
2. $D(x^r) = rx^{r-1}$ *kun lopputulos on määritelty eli siinä ei esiinny nollalla jakamista.*
3. $De^x = e^x$.
4. $Da^x = a^x \cdot \log_e a$.
5. $D(\log_e x) = 1/x$ *kun* $x > 0$.
6. $D(\log_a x) = 1/(x \log_e a)$ *kun* $x > 0$.
7. $D(\sin(x)) = \cos(x)$.
8. $D(\cos(x)) = -\sin(x)$.

Esimerkki 5.3.6.

$$
\begin{aligned}
D(x) &= D(x^1) = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1 \cdot 1 = 1. \\
D(x^3) &= 3x^{3-1} = 3x^2. \\
D\left(\frac{1}{x}\right) &= D\left(x^{-1}\right) = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \text{ kun } x \neq 0. \\
D\left(\sqrt{x}\right) &= D\left(x^{1/2}\right) = \frac{1}{2}x^{(1/2)-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ kun } x > 0. \\
D(2^x) &= 2^x \cdot \log_e 2. \\
D(\log_{10} x) &= \frac{1}{x \log_e 10} \text{ kun } x > 0.
\end{aligned}
$$

Lause 5.3.7 (Derivoimissääntöjä)**.** *Olkoot f ja g reaalifunktioita, joilla on derivaatta tutkitussa pisteessä ja olkoot c reaaliluku. Tällöin*

1. $D(cf(x)) = cDf(x) = cf'(x)$
2. $D(f(x) + g(x)) = D(f(x)) + D(g(x)) = f'(x) + g'(x)$
3. $D(f(x)g(x)) = f(x)D(g(x)) + g(x)D(f(x)) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$
4. $D(f(x)/g(x)) = (g(x)D(f(x)) - f(x)D(g(x)))\,/\,(g(x))^2$
   $= (f'(x)g(x) - f(x)g'(x))\,/\,(g(x))^2$
5. $D\left(f\left(g(x)\right)\right) = (Df)\left(g(x)\right) \cdot Dg(x) = f'(g(x))g'(x)$

Kannattaa huomata, että derivaatta on funktion ominaisuus, eli funktion lauseketta saa sieventää ennen derivaatan laskemista, eikä sievennys vaikuta derivaattaan itseensä.

Seuraavassa esimerkissä käytämme kaikkia derivointisääntöjä paitsi yhdistetyn kuvauksen derivoimista, joka löytyy sitä seuraavasta esimerkistä.

Esimerkki 5.3.8.

$$
\begin{aligned}
D(15x^3) &= 15D(x^3) = 15 \cdot 3x^{3-1} = 45x^2. \\
D\left(e^x - \frac{1}{3}x^5 + 4x + 2\right) &= D\left(e^x\right) - D\left(\frac{1}{3}x^5\right) + D\left(4x\right) + D\left(2\right) \\
&= e^x - \frac{1}{3}D(x^5) + 4D(x) + 0 = e^x - \frac{5}{3}x^{5-1} + 4 \cdot 1x^{1-1} \\
&= e^x - \frac{5}{3}x^4 + 4. \\
D(x\sin(x)) &= xD(\sin(x)) + \sin(x)D(x) = x\cos(x) + \sin(x) \cdot 1 \\
&= x\cos(x) + \sin(x). \\
D\left(\frac{x^4+2x}{x+1}\right) &= \frac{(x+1)\,D\left(x^4+2x\right) - \left(x^4+2x\right)D\left(x+1\right)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{(x+1)\left(D(x^4)+D(2x)\right) - \left(x^4+2x\right)\left(D(x)+D(1)\right)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{(x+1)\left(4x^{4-1}+2D(x)\right) - \left(x^4+2x\right)\left(1x^{1-1}+0\right)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{(x+1)\left(4x^3+2\cdot 1x^{1-1}\right) - \left(x^4+2x\right)(1+0)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{(x+1)\left(4x^3+2\right) - \left(x^4+2x\right)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{4x^4+2x+4x^3+2-x^4-2x}{(x+1)^2} \\
&= \frac{3x^4+4x^3+2}{(x+1)^2}.
\end{aligned}
$$

Kuvausten yhdistäminen, $f(g(x))$, tarkoittaa että ensin lukuun x sovelletaan kuvausta g, jolloin tulokseksi tulee $g(x)$, johon sovelletaan kuvausta f, jolloin tuloksena on $f(g(x))$.

Esimerkki 5.3.9 (Yhdistettyjen funktioiden derivointi)**.** Ensimmäiseksi tutkimme funktiota, jonka lauseke on $(3x-2)^7$. Tässä sisäfunktiona on $g(x) = 3x - 2$ ja ulkofunktiona on $f(y) = y^7$. Tällöin $f(g(x)) = (g(x))^7 = (3x-2)^7$, kuten pitikin. Derivoimme ensin sisä- ja ulkofunktion:

$$f'(y) = 7y^6 \text{ ja } g'(x) = 3.$$

Sitten derivoimme yhdistetyn funktion:

$$\begin{aligned} D\left((3x-2)^7\right) &= f'(g(x))g'(x) = 7\,(g(x))^6 \cdot g'(x) = 7\,(g(x))^6 \cdot 3 = 21\,(g(x))^6 \\ &= 21\,(3x-2)^6\,. \end{aligned}$$

Lausekkeen sieventäminen laskemalla potenssi auki ei johda kauniiseen tai havainnolliseen tulokseen, joten emme tee sitä.

Seuraavaksi derivoimme funktion, jonka lausekke on $\sin\left(15y^2\right)$, muuttujan y suhteen. Tässä sisäfunktio on $g(y) = 15y^2$ ja ulkofunktio on $f(z) = \sin(z)$. Niiden derivaatat ovat $g'(y) = 30y$ ja $f'(z) = \cos(z)$. Yhdistetyn kuvauksen derivaatta on

$$\begin{aligned} D\left(\sin\left(15y^2\right)\right) &= f'(g(y))g'(y) = \cos g(y) \cdot g'(y) = \cos\left(15y^2\right) \cdot 30y \\ &= 30y\cos\left(15y^2\right). \end{aligned}$$

Esimerkki 5.3.10 (Polynomin derivaatta)**.** Olkoot

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

asteen n polynomi. Tällöin

$$\begin{aligned} P'(x) &= D\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{n} D\left(a_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k D\left(x^k\right) \\ &= a_0 D\left(x^0\right) + \sum_{k=1}^{n} a_k D\left(x^k\right) = a_0 D\,(1) + \sum_{k=1}^{n} a_k D\left(x^k\right) \\ &= a_0 \cdot 0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}. \end{aligned}$$

Derivaatta kertoo funktion kasvunopeuden.

- Jos funktion derivaatta on nolla jollain välillä, ei funktion arvo muutu lainkaan sillä välillä eli funktio on sillä välillä vakio.
- Jos funktion derivaatta on positiivinen jollain välillä, niin funktion arvot kasvavat kun kyseisellä välillä siirrytään oikealle päin; sanotaan, että funktio on kasvava.
- Jos funktion derivaatta on negatiivinen jollain välillä, niin funktion arvot pienevät kun kyseisellä välillä siirrytään oikealle päin; sanotaan, että funktio on vähenevä.

Esimerkki 5.3.11. Funktion $f(x) = x^2$ derivaatta on $2x$. Kun $x < 0$, niin derivaatta on negatiivinen ja funktio vähenevä; joukossa $]0, \infty[$ derivaatta on positiivinen ja funktio kasvava.

Pisteet, joissa funktion vaihtuu kasvavasta väheneväksi tai vähenevästä kasvavaksi ovat funktion mahdollisia ääriarvopisteitä, eli niissä funktio voi saada suurimman tai pienimmän arvonsa. Jos funktiolla on derivaatta ääriarvopisteessä, on derivaatan arvon oltava nolla. Kuitenkaan kaikki pisteet, joissa funktion derivaatta on nolla, eivät ole ääriarvopisteitä, eikä funktion välttämättä tarvitse olla derivoituva ääriarvopisteessä.

Lause 5.3.12 (Ääriarvojen löytäminen)**.** *Olkoot $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva reaalifunktio. Se saavuttaa suurimman (vastaavasti pienimmän) arvonsa jossain seuraavista pisteistä:*

- *Välin päätepisteet a ja b.*
- *Pisteet, joissa funktiolle ei ole derivaattaa.*
- *Pisteet, joissa derivaatta on nolla.*

Esimerkki 5.3.13. Tutkimme funktiota $g\colon [-2, 10] \to \mathbb{R}$, $g(t) = t^2$. Tällöin $g'(t) = 2t = 0$ jos ja vain jos $t = 0$. Derivaatta on aina olemassa. Siis funktion suurimmat ja pienimmät arvot voivat löytyä välin pääte pisteistä $t = -2$ tai $t = 10$ tai derivaatan nollakohdasta $t = 0$.

Laskemme funktion arvot näissä pisteissä: $g(-2) = (-2)^2 = 4$, $g(0) = 0^2 = 0$ ja $g(10) = 10^2 = 100$.

Vertailemalla huomaamme, että 0 on pienin näistä arvosta ja se saavutetaan kun $t = 0$ ja 100 on suurin näistä arvoista ja se saavutetaan kun $t = 10$. Vaikka -2 oli yksi ehdokaspisteistä, ei $g(-2) = 4$ ole suurin eikä pienen funktion saavuttamista arvoista.

Esimerkki 5.3.14. Tutkimme funktiota $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(z) = 2 - |z - 3|$ ja etsimme sen suurimman ja pienimmän arvon välillä $[-10, 10]$.

Ensin etsimme pisteet, joissa funktio voi saavuttaa suurimman tai pienimmän arvonsa. Välin päätepisteet -10 ja 10 ovat tällaisia. Onko muita?

Funktiolla ei ole derivaattaa pisteessä $z = 3$ (kuvaajassa on terävä kulma, aivan kuin itseisarvon kuvaajassa; tarkista piirtämällä kuvaaja). Laskemme funktion derivaatan muissa pisteissä. Itseisarvon takia jaamme tilanteen kahteen tapaukseen: $z \geq 3$ tai $z < 3$. Laskemme ensin funktion arvon ja sitten sen derivaatan arvon näissä tapauksissa ja katsomme onko derivaatta ikinä nolla.

$$
\begin{aligned}
& & z &> 3 && \| -3 \\
\Leftrightarrow & & z-3 &> 0 && \text{(itseisarvon määritelmä)} \\
\Rightarrow & & |z-3| &= z-3 && \\
\Leftrightarrow & & 2-|z-3| &= 2-(z-3) && \\
\Leftrightarrow & & h(z) &= 2-(z-3) && \\
\Leftrightarrow & & h(z) &= 2-z+3 && \\
\Leftrightarrow & & h(z) &= 5-z && \| D() \\
\Leftrightarrow & & h'(z) &= D(5-z) && \\
\Leftrightarrow & & h'(z) &= D(5)-D(z) && \\
\Leftrightarrow & & h'(z) &= 0-1=-1. &&
\end{aligned}
$$

Siis funktion h derivaatalla ei ole nollakohtia, kun $z > 3$.

Vastaavasti:

$$
\begin{aligned}
& & z &< 3 && \| -3 \\
\Leftrightarrow & & z-3 &< 0 && \text{(itseisarvon määritelmä)} \\
\Rightarrow & & |z-3| &= -(z-3) && \\
\Leftrightarrow & & 2-|z-3| &= 2-(-(z-3)) && \\
\Leftrightarrow & & 2-|z-3| &= 2+(z-3) && \\
\Leftrightarrow & & h(z) &= 2+(z-3) && \\
\Leftrightarrow & & h(z) &= z-1 && \| D() \\
\Leftrightarrow & & h'(z) &= D(z-1) && \\
\Leftrightarrow & & h'(z) &= D(z)-D(1) && \\
\Leftrightarrow & & h'(z) &= 1-0=1. &&
\end{aligned}
$$

Siis $h'(z) \neq 0$ kun $z < 3$.

Funktiolla ei ole derivaatan nollakohtia, joten ääriarvot voivat olla ainoastaan pisteissä -10, 3 ja 10. Laskemme funktion arvot näissä pisteissä:

$$
\begin{aligned}
h(-10) &= 2-|-10-3| = 2-|-13| = 2-13 = -11 \\
h(3) &= 2-|3-3| = 2-|0| = 2-0 = 2 \text{ ja} \\
h(10) &= 2-|10-3| = 2-|7| = 2-7 = -5.
\end{aligned}
$$

Funktion saamista arvoista -11 on pienin ja 2 on suurin.

Esimerkki 5.3.15 (Pesäpallosyöttö)**.** Pesäpallo syötetään (heitetään suoraan ylöspäin) ajan hetkellä t, jolloin pallon korkeus h noudattaa esimerkiksi yhtälöä

$$h(t) = 1{,}5\ \mathrm{m} + 6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{5.3.1}$$

niin kauan että pallo osuu johonkin. Yhtälössä korkeus $h = 0$ vastaa maanpintaa ja $g \approx 9{,}81$ m/s^2 on normaaliputoamiskiihtyvyys. Jätämme ilmanvastuksen huomiotta.

Kuinka korkealla pallo annetun yhtälön mukaan käy? Koska funktiolla on derivaatta kaikissa pisteissä (se on polynomi), niin mahdollisia ääriarvopisteitä ovat derivaatan nollakohdat ja välin päätepisteet; meillä ei ole tässä mitään tiettyä väliä, mutta fysikaalisesta tilanteesta voimme päätellä, että pallo lopulta osuu maahan ja sitä ennen käy korkealla, eli jos valitsemme väliksi $[0, T]$ tarpeeksi suurelle luvulle T sekuntia, niin derivaatan nollakohdan pitäisi olla ääriarvopiste. (Tässä voi myös todeta, että $h(t) \to -\infty$ kun $t \to \infty$ tai $t \to -\infty$.)

Heittohetkellä pallo on korkeudella $h(0) = 1{,}5$ metriä. Laskemme derivaatan nollakohdan, eli ensin derivoimme funktion:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(1{,}5\ \mathrm{m}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot t\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}gt^2\right)\\ &= 0 + 6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(t) - \frac{1}{2}g\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^2\right)\\ &= 6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 1 - \frac{1}{2}g\cdot 2t\\ &= 6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - gt.\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

Merkitsemme syntyneen derivaatan eli pallon nopeuden nollaksi ja laskemme ajan hetken, jolla näin käy. Toivomme, että tulos on positiivinen, tai että saamme ainakin yhden positiivisen tuloksen.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t) = 0 \tag{5.3.3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - gt = 0 \qquad \| + gt \tag{5.3.4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = gt \qquad \| \cdot \frac{1}{g} \tag{5.3.5}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{6}{g}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = t, \tag{5.3.6}$$

eli $t \approx 0{,}6$ sekuntia. Tällä ajan hetkellä pallon korkeus on

$$\begin{aligned} h\left(\frac{6}{g}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) &= 1{,}5\ \mathrm{m} + 6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{6}{g}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - \frac{1}{2}g\left(\frac{6}{g}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \\ &= 1{,}5\ \mathrm{m} + \frac{6\cdot 6}{g}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{6^2 g}{g^2}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \\ &= 1{,}5\ \mathrm{m} + \frac{6^2}{g}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{6^2}{g}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \\ &= 1{,}5\ \mathrm{m} + \frac{1}{2}\cdot\frac{6^2}{g}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \\ &= 1{,}5\ \mathrm{m} + \frac{1}{2}\cdot\frac{36}{g}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \\ &= 1{,}5\ \mathrm{m} + \frac{18}{g}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \\ &\approx 3{,}3\ \mathrm{m}. \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

Pallokäy vähintään metrin syöttäjän päätä korkeammalla, joten syöttö on korkeutensa puolesta laillinen. Käytetyt luvut voivat siis olla totuutta lähellä.

6 Integraali

Funktion integraali vastaa kysymykseen: kuinka suuri pinta-ala jää funktion kuvaajan ja vaaka-akselin väliin? Pinta-ala tulkitaan positiiviseksi kun kuvaaja on akselin päällä ja negatiiviseksi kun kuvaaja on akselin alla.

Integraali määritellään pinta-alan avulla (sivuutamme yksityiskohdat) ja integraalin ominaisuudet johdetaan siitä, mutta käytännössä funktioita integroidaan käyttämällä tulosta nimeltä analyysin peruslause, joka kytkee derivaatan ja integraalin yhteen.

Analyysin peruslause perustuu seuraavaan havaintoon: Jos laskemme funktion kuvaajan alle jäävää pinta-alaa tiettyyn lukuun b asti ja kasvatamme hiukan lukua b, niin kuvaajan alle jäävän pinta-alan muutos on verrannollinen funktion arvoon pisteessä b ja luvun b muutokseen. Toisin sanoin, integraalin derivaatta on funktion arvo, eli integraali ja derivaatta ovat karkeasti ottaen käänteisoperaatioita, kuten yhteen- ja vähennyslasku tai logaritmi ja eksponentti.

6.1 Määräämätön integraali

Määritelmä 6.1.1 (Primitiivi eli määräämätön integraali eli antiderivaatta)**.** Reaalifunktion f primitiivi on mikä tahansa sellainen reaalifunktio F, jolle pätee $F'(x) = f(x)$.

Esimerkki 6.1.2. Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x$, eräs antiderivaatta on $F(x) = 2x^2$, koska tällöin $F'(x) = 4x = f(x)$, kuten pitikin.

Toisaalta myös $F_1(x) = 2x^2 - 13$ on eräs funktion f antiderivaatoista, koska vakiotermin -13 derivaatta on nolla, joten $F_1'(x) = 4x$.

Kuten edellinen esimerkki näyttää, niin jos funktiolla on yksi primitiivi, on sillä niitä äärettömän monta – primitiiviin voi aina lisätä minkä tahansa vakion niin, että derivaatta ei muutu.

Merkintä funktion f integroinnille muuttujan x suhteen:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C, \text{ missä } C \in \mathbb{R}. \tag{6.1.1}$$

Merkinnässä vakio C (englanniksi constant) tarkoittaa, että funktiolla on monta antiderivaattaa, jotka voidaan luetella käymällä läpi kaikki reaaliluvut. Oikeastaan funktion määräämätön integrointi antaa tulokseksi funktiojoukon:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \left\{F(x) + C; C \in \mathbb{R} \text{ ja } F'(x) = f(x)\right\}. \tag{6.1.2}$$

Esimerkki 6.1.3 (Integraalin etsiminen valistuneilla arvauksilla)**.** Haluamme laskea integraalin

$$\int 4s^7 \mathrm{d}s.$$

Muistamme, että potenssifunktion derivoiminen pienentää potenssia yhdellä, joten ensimmäinen arvauksemme on s^8, jolloin

$$D\left(s^8\right) = 8s^7.$$

Potenssin edessä olevan kertoimen piti kuitenkin olla 4 eikä 8. Koska $4 = 8/2$, niin koitamme puolittaa derivoitavan lausekkeen, jolloin tulos on $s^8/2$. Tarkistus:

$$D\left(\frac{1}{2}s^8\right) = \frac{1}{2}D\left(s^8\right) = \frac{1}{2} \cdot 8s^7 = \frac{8}{2}s^7 = 4s^7.$$

Siis $s^8/2$ on eräs funktion $4s^7$ primitiivi. Tällöin kaikki primitiivit ovat muotoa $s^8/2 + C$, missä C on reaaliluku, ja kaikki tuota muotoa olevat lausekkeet ovat primitiivejä.

Esimerkki 6.1.4 (Integroimisvakion merkitys)**.** Tutkimme kappaletta (vaikkapa pesäpalloa) maapallon pinnan lähellä ja vapaassa pudotuksessa. Jätämme ilmanvastuksen huomiotta.

Ainoa kappaleeseen vaikuttava voima on painovoima, joten kappaleen kiihtyvyys $a = -g \approx -9{,}81\ \mathrm{m/s}^2$.

Nopeus on kiihtyvyyden integraali, eli

$$v(t) = \int a\mathrm{d}t = \int -g\mathrm{d}t = -\int g\mathrm{d}t = -gt + C. \tag{6.1.3}$$

Vakion C fysikaalinen tulkinta on, että se kertoo nopeuden ajan hetkellä $t = 0$: Jos esimerkiksi tiedämme, että pesäpallon lähtönopeus on $v(0) = 6\ \mathrm{m/s}$, niin saamme

$$6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = v(0) = -g \cdot 0 + C = C, \tag{6.1.4}$$

eli $C = 6\ \mathrm{m/s}$.

Pesäpallon tapauksessa korkeus on nopeuden integraali, eli

$$h(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = \int \left(-gt + 6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}gt^2 + t6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + C_1, \tag{6.1.5}$$

missä C_1 on vakio. (Eri vakio kuin edellisessä yhtälössä, joten sille kannattaa antaa eri nimi.) Tälläkin vakiolla on fysikaalinen tulkinta:

$$h(0) = -\frac{1}{2}g \cdot 0^2 + 0 \cdot 6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + C_1 = C_1, \tag{6.1.6}$$

eli $C_1 = h(0)$ joka on pallon korkeus hetkellä $t = 0$.

Koska integrointi on derivaatan käänteistoiminto, niin integroimissäännöt tulevat suoraan derivoimissäännöistä.

Lause 6.1.5 (Alkeisfunktioiden integrointi)**.** *Kirjain C tarkoittaa kaikissa integroimiskaavoissa integroimisvakiota, jonka paikalle voi asettaa minkä tahansa reaaliluvun. Kaikki integraalit on laskettu muuttujan x suhteen.*

Olkoot $a \in \mathbb{R}$ ja $p \neq -1$. Tällöin seuraavat yhtälöt ovat tosia kun ne on *määritelty:*

$$\int 0\mathrm{d}x = C \tag{6.1.7}$$

$$\int a\mathrm{d}x = ax + C \tag{6.1.8}$$

$$\int x^p\mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C \tag{6.1.9}$$

$$\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x) + C \tag{6.1.10}$$

$$\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + C \tag{6.1.11}$$

$$\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C \tag{6.1.12}$$

$$\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\log_e(a)} + C \tag{6.1.13}$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \log_e(x) + C \tag{6.1.14}$$

$$\int \log_e(x)\mathrm{d}x = x\log_e(x) - x + C. \tag{6.1.15}$$

Todistus. Kaikki integroimiskaavat todistetaan derivoimalla oikeaa puolta ja huomaamalla, että tuloksena on vasemmalla puolella integroitava funktio (riippumatta vakion C saamasta arvosta; se häviää derivoitaessa).

Esimerkiksi

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{p+1}x^{p+1} + C\right) &= D\left(\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right) + D\left(C\right) \\ &= \frac{1}{p+1}D\left(x^{p+1}\right) + 0 \\ &= \frac{1}{p+1}\cdot\left(p+1\right)x^{p+1-1} \\ &= \frac{p+1}{p+1}x^p \\ &= x^p \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
D\left(x\log_e(x) - x + C\right) &= D\left(x\log_e(x)\right) - D\left(x\right) + D\left(C\right)\\
&= xD\left(\log_e(x)\right) + \log_e(x)D(x) - 1 + 0\\
&= x\cdot\frac{1}{x} + \log_e(x)\cdot 1 - 1\\
&= \frac{x}{x} + \log_e(x) - 1\\
&= 1 + \log_e(x) - 1\\
&= \log_e(x).
\end{aligned}$$

□

Esimerkki 6.1.6.

$$\begin{aligned}
\int x^5 \mathrm{d}x &= \frac{1}{5+1}x^{5+1} + C = \frac{1}{6}x^6 + C.\\
\int \sqrt{x}\mathrm{d}x &= \int x^{1/2}\mathrm{d}x = \frac{1}{1/2+1}x^{1/2+1} + C = \frac{1}{3/2}x^{3/2} + C\\
&= 1\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + C.
\end{aligned}$$

Monimutkaisempien funktioiden integrointi tapahtuu integroimissääntöjen avulla. Jokaista derivoimissääntöä vastaa jokin integroimissääntö; jätämme näistä osittaisintegroinnin (joka vastaa tulon derivaattaa) käsittelemättä ja jakolaskun derivointia vastaavaa integroimissääntöä ei yleensä edes esitetä.

Lause 6.1.7 (Integraalin lineaarisuus)**.** *Olkoot c reaaliluku. Tällöin*

$$\int \left(f(x) + g(x)\right)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x \tag{6.1.16}$$

$$\int \left(cf(x)\right)\mathrm{d}x = c\int f(x)\mathrm{d}x. \tag{6.1.17}$$

Integraalin lineaarisuus sallii esimerkiksi kaikkien polynomien integroimisen.

Esimerkki 6.1.8.

$$\begin{aligned}
&\int \left(\frac{1}{3}x^5 - 4x^4 - 12x^2 + 7\right) \mathrm{d}x \\
&\quad = \int \left(\frac{1}{3}x^5\right) \mathrm{d}x - \int 4x^4 \mathrm{d}x - \int 12x^2 \mathrm{d}x + \int 7\mathrm{d}x \\
&\quad = \frac{1}{3}\int \left(x^5\right) \mathrm{d}x - 4\int x^4 \mathrm{d}x - 12\int x^2 \mathrm{d}x + 7x + C_1 \\
&\quad = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5+1}x^{5+1} + C_4 - 4\cdot\frac{1}{4+1}x^{4+1} + C_3 - 12\cdot\frac{1}{2+1}x^{2+1} + C_2 + 7x + C_1 \\
&\quad = \frac{1\cdot 1}{3\cdot 6}x^6 - \frac{4}{5}x^5 - \frac{12}{3}x^3 + 7x + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \\
&\quad = \frac{1}{18}x^6 - \frac{4}{5}x^5 - 4x^3 + 7x + C.
\end{aligned}$$

Koska kaikki luvut $C_1, \ldots, C_4$ voivat olla mitä tahansa reaalilukuja, myös niiden summa voi olla mikä tahansa reaaliluku, jonka voimme kirjoittaa yksittäisenä integroimisvakiona C.

Lause 6.1.9 (Yhdistetyn funktion integroiminen)**.**

$$\int f'(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = f(g(x)) + C. \tag{6.1.18}$$

tai, vaihtoehtoisesti jos valitsemme että F on funktion f primitiivi, eli $F' = f$, niin saamme saman integroimissäännön eri merkinnöillä:

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = F(g(x)) + C. \tag{6.1.19}$$

Esimerkki 6.1.10. Haluamme laskea integraalin

$$\int 3\cos(3y)\mathrm{d}y.$$

Kyseessä on yhdistetyn funktion integraali, joten tunnistamme ensin sisä- ja ulkofunktiot. Merkitsemme $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) = 3y$ (sisäfunktio) ja haluaisimme sellaisen ulkofunktion, jonka derivaatta on kosini. Koska $\int \cos(z)\mathrm{d}z = \sin(z) + C$, valitsemme $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(z) = \sin(z)$ (ulkofunktio). Tällöin $f'(z) = \cos(z)$ ja $g'(y) = 3$, joten

$$\int 3\cos(3y)\mathrm{d}y = \int g'(y)f'(g(y))\mathrm{d}y = f(g(x)) + C = \sin(3x) + C.$$

Haluamme laskea integraalin

$$\int (5x+1)^9 \,\mathrm{d}x.$$

Sisäfunktio on $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 5x + 1$, ja ulkofunktion derivaatta on $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(y) = y^9$. Tällöin sisäfunktion derivaatta on $g'(x) = 5$ ja ulkofunktioksi voimme valita esimerkiksi funktion $f(y) = y^{10}/10$.

$$\int (5x+1)^9 \, \mathrm{d}x = \int f'(g(x))\mathrm{d}x,$$

mutta sisäfunktion derivaatta 5 puuttuu, joten se pitää pakottaa näkyviin.

$$\begin{aligned}
\int (5x+1)^9 \, \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{5} \cdot 5 \, (5x+1)^9 \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{5} \int 5 \, (5x+1)^9 \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{5} \int g'(x) f'(g(x)) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{5} \left(f(g(x)) + C \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{10} (5x+1)^{10} + C \right) \\
&= \frac{1}{50} (5x+1)^{10} + C/5 \\
&= \frac{1}{50} (5x+1)^{10} + C_0,
\end{aligned}$$

missä mikä tahansa luku jaettuna viidellä voi edelleen ole mikä tahansa luku, jolle annamme uuden nimen C_0.

Käytännössä yhdistettyä funktiota integroidessa tunnista ensin ulko- ja sisäfunktio. Jos sisäfunktion derivaatta on jo näkyvissä, voit käyttää yhdistetyn funktion integroimisen kaavaa heti. Jos sisäfunktion derivaattaa ei ole valmiiksi näkyvissä, pakota se näkyviin kertomalla ja jakamalla integroitava funktio sopivalla luvulla ja siirtämällä ylimääräiset termit integraalin ulkopuolelle. Tämä ei aina onnistu! Vaikka jokaisella jatkuvalla funktiolla onkin integraalifunktio, ei niitä kaikkia voi kirjoittaa alkeisfunktioiden (polynomit, rationaalifunktiot, potenssifunktiot, logaritmit, eksponentit, trigonometriset funktiot) avulla.

Esimerkiksi funktion e^{-x^2} integraalifunktioita ei saa kirjoitettua alkeisfunktioiden avulla, minkä takia esimerkiksi MAOL-taulukkokirjassa normaalijakauman integraaleja on taulukoitu.

6.2 Määrätty integraali

Integraalin ja nimenomaan määrätyn integraalin tulkinta on jonkin käyrän ja vaaka-akselin (usein x-akseli) väliin jäävä pinta-ala. Toinen tulkinta on, että integrointi kertoo kuinka paljon integroitavaa suuretta kertyy esimerkiksi aikavälillä. Jos funktion kuvaaja on vaaka-akselin päällä (eli funktio on positiivinen, niin myös integraali on positiivinen. Vastaavasti, jos funktion kuvaaja on vaaka-akselin alla (eli funktio negatiivinen), niin myös integraali on negatiivinen.

Negatiivinen integraali, eli negatiivinen pinta-ala tai negatiivinen kertyvä suure, on järkevä esimerkiksi mekaniikassa – nopeus voi suuntautua takaperin ja se on kiihtyvyyden integraali.

Merkintä funktion f määrätylle integraalille luvusta a lukuun b muuttujan x suhteen on

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{6.2.1}$$

Lause 6.2.1 (Analyysin peruslause)**.** *Olkoot $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio ja F mikä tahansa sen primitiivi. Tällöin*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{6.2.2}$$

Analyysin peruslauseessa käytetään funktion mitä tahansa primitiiviä, mutta tärkeää on, että primitiivi on sama sekä lausekkeessa $F(b)$ että lausekkeessa $F(a)$. Primitiivissä esiintyvä mielivaltainen vakio kumoaa itsensä. Määrätyn integraalin kanssa käytetään Suomessa sijoitusmerkintää

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Big/_{\!a}^{\,b} F(x) = F(b) - F(a), \tag{6.2.3}$$

missä sijoitusviiva $\Big/_{\!a}^{\,b}$ luetaan ‘sijoitus a:sta b:hen’ tai vastaavalla tavalla. Englanninkielisessä maailmassa käytetään samasta asiasta merkintää

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a). \tag{6.2.4}$$

Esimerkki 6.2.2. Integroimme paraabelia x^2 luvusta 3 lukuun 10. Ensin muistamme, että $\int x^2 \mathrm{d}x = x^3/3 + C$, joten

$$\begin{aligned}
\int_3^{10} x^2 \mathrm{d}x &= \mathop{\Big/}_{3}^{10} \left(\frac{1}{3}x^3 + C\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot 10^3 + C - \left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 + C\right) \\
&= \frac{1000}{3} + C - \frac{27}{3} - C \\
&= \frac{1000 - 27}{3} + C - C \\
&= \frac{973}{3}.
\end{aligned}$$

Määrättyjä integraaleja lasketaan samoin kuin antiderivaattoja, mutta integroimisvälin tuo muutaman ylimääräisen mausteen.

Lause 6.2.3 (Määrätyn integraalin laskusääntöjä)**.** *Olkoot a, b ja c reaalilukuja ja f reaalifunktio. Tällöin*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x \tag{6.2.5}$$

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{6.2.6}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x. \tag{6.2.7}$$

Huomautus 6.2.4. Kaavassa

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

integroimisrajojen järjestys muuttui. Jos integroimme "suuremmasta luvusta pienempään" (integraalin yläraja on pienempi kuin alaraja), niin tuloksen merkki muuttuu. Tämä vastaa klassisen mekaniikan riippumattomuutta ajan suunnasta, eli sitä, että klassisen mekaniikan mukaan voimme lähtöolosuhteista laskea tilanteen kehitystä yhtä hyvin eteenpäin kuin taaksepäin. Jos aika kulkee väärään suuntaan, niin pesäpallo putoaa ylöspäin vaikka kiihtyvyyden eli painovoiman suunta pysyykin samana.

Esimerkki 6.2.5 (Itseisarvon integraali)**.** Haluamme laskea itseisarvofunktion alle jäävän pinta-alan. Ensin kertaamme itseisarvon määritelmän:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ kun } x \geq 0 \\ -x, \text{ kun } x < 0. \end{cases}$$

Laskemme sitten integraalin

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{1} |x| \, \mathrm{d}x &= \int_{-3}^{0} |x| \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} |x| \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-3}^{0} (-x) \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x \mathrm{d}x \\
&= -\int_{-3}^{0} x \mathrm{d}x + \Big/_{0}^{1} \frac{1}{2}x^2 \\
&= -\Big/_{-3}^{0} \left(\frac{1}{2}x^2\right) + \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 \\
&= -\left(\frac{1}{2} \cdot 0^2 - \frac{1}{2} \cdot (-3)^2\right) + \frac{1}{2} - 0 \\
&= -\left(0 - \frac{1}{2} \cdot 9\right) + \frac{1}{2} \\
&= -\left(-\frac{9}{2}\right) + \frac{1}{2} \\
&= \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{10}{2} \\
&= 5.
\end{aligned}$$

Esimerkki 6.2.6 (Paloittain määritellyn funktion integrointi)**.** Olkoot $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(r) = \begin{cases} 3\sqrt{r}, \text{ kun } r \geq 5 \\ 2re^{r^2}, \text{ kun } r < 5. \end{cases}$$

Haluamme laskea funktion h integraalin luvusta 3 lukuun 6 asti.

$$\begin{aligned}
\int_{3}^{6} h(r) \mathrm{d}r &= \int_{3}^{5} h(r) \mathrm{d}r + \int_{5}^{6} h(r) \mathrm{d}r \\
&= \int_{3}^{5} 2re^{(r^2)} \mathrm{d}r + \int_{5}^{6} 3\sqrt{r} \mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

Integraalit voi laskea erikseen ja lopuksi laskea niiden tulokset yhteen.

Ensimmäinen integraali on yhdistetyn funktion integraali. Siinä ulkofunktio on $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(s) = e^s$ jonka derivaatta $f'(s) = e^s$ on valmiina lausekkeessa, ja sisäfunktio on $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(r) = r^2$. Myös sisäfunktion derivaatta

$g'(r) = 2r$ on jo valmiiksi näkyvissä. Siis

$$\begin{aligned}
\int_3^5 2re^{\left(r^2\right)}\mathrm{d}r &= \int_3^5 g'(r)f'(g(r))\mathrm{d}r \\
&= \Bigg/_{\!\!3}^{\,5} f(g(r)) \\
&= f(g(5)) - f(g(3)) \\
&= e^{\left(5^2\right)} - e^{\left(3^2\right)} \\
&= e^{25} - e^{9}.
\end{aligned}$$

Toinen integraali on potenssifunktion integraali. Potenssifunktion integroimissäännön nojalla $\int r^{1/2}\mathrm{d}r = 2r^{3/2}/3 + C$:

$$\begin{aligned}
\int_5^6 3\sqrt{r}\mathrm{d}r &= 3\int_5^6 \sqrt{r}\mathrm{d}r \\
&= 3\int_5^6 r^{1/2}\mathrm{d}r \\
&= 3 \Bigg/_{\!\!5}^{\,6} \frac{2}{3}r^{3/2} \\
&= 2 \Bigg/_{\!\!5}^{\,6} r^{3/2} \\
&= 2\left(6^{3/2} - 5^{3/2}\right).
\end{aligned}$$

Lauseketta voi, kuten yleensä, sieventää niin pitkälle kuin kokee hyödylliseksi ja tarpeelliseksi.

$$\begin{aligned}
2\left(6^{3/2} - 5^{3/2}\right) &= 2\left(6\sqrt{6} - 5\sqrt{5}\right) \\
&= 12\sqrt{6} - 10\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Lopuksi laskemme vielä tulokset yhteen:

$$\begin{aligned}
\int_3^6 h(r)\mathrm{d}r &= \int_3^5 2re^{\left(r^2\right)}\mathrm{d}r + \int_5^6 3\sqrt{r}\mathrm{d}r \\
&= e^{25} - e^{9} + 12\sqrt{6} - 10\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Kahden kuvaajan välinen pinta-ala Myös kahden kuvaajan välisen pinta-alan voi laskea integroimalla. Olkoot $f(x) \geq g(x)$ jollain välillä $[a, b]$. Tällöin niiden kuvaajien välinen pinta-ala on

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Jos f ja g eivät ole missään tietyssä suuruusjärjestyksessä, tai jos järjestys vaihtuu kesken kaiken niin kuvaajien väliin jäävän positiiviseksi muutetun pinta-alan voi ilmaista integraalilla

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Kyseisen integraalin laskeminen tapahtuu hajoittamalla alue osiin sen mukaan, onko $f(x) \geq g(x)$ vai toisin päin, kuten paloittain määritellyn funktion tapauksessa yleensä.

A Kirjallisuutta ja muuta hyödyllistä

- Luentomuistiinpanot perustuvat Kaija Häkkisen kurssikirjaan [1].
- Aiempien propedeuttisten kurssien sisältöjä löytyy jonkin verran Kopasta: `https://koppa.jyu.fi/kurssit/167897`, `https://koppa.jyu.fi/kurssit/133982`
- Huone MaD 246 on opiskelutila, josta löytyy myös liitutaulu ja jonkin verran kirjallisuutta. Liitutauluja ja istumapaikkoja löytyy myös rakennuksen MaD kolmannen kerroksen aulasta.
- Matematiikan ja tilastotieteen laitoksen käytäviltä löytyy opiskelijoita ja henkilökunnan jäseniä, joilta voi kysyä apua. Erityisesti tiistaisin ja torstaisin kello 14-18 on toisen kerroksen aulassa Ratkomo, jossa henkilökunta nimenomaan auttaa kaikkien matematiikan kurssien tehtävien ratkaisussa. Ratkomo on ikävästi osittain luentojen kanssa päällekkäin.

Häkkisen kirjan [1] lisäksi pitkän matematiikan oppi- ja kertauskirjat sekä teknisen matematiikan oppikirjat sisältävät kurssille soveltuvaa materiaalia toimivalla abstraktion asteella.

Jos englanti ei säikytä, niin apua voi hakea myös kansainvälisiltä sivustoilta, joista mainittakoon `http://math.stackexchange.com`.

A.1 Miten ratkaista matematiikan tehtäviä

- Lue tehtävä kokonaan ja huolellisesti. Mitä kysytään tai pitää tehdä?

- Varmista, että ymmärrät kaikki käsitteet ja symbolit. Jos et ymmärrä jotain, etsi kyseisen käsitteen tai symbolin **määritelmä**.
- Jos kyseessä on sanallinen tehtävä tai todistustehtävä, niin kirjoita kaikki tehtävässä annetut tiedot tai oletukset.
- Anna nimi suureille, muuttujille ja funktioille.
- Kirjoita laskettava suure tai todistettava väite auki.
- Käytä laskusääntöjä ja tunnettuja tuloksia päästäksesi annetuista tiedoista tai oletuksista pyydettyyn tietoon tai väitteeseen.

A.2 Todistus ja sen lukeminen

Matematiikassa väitteen todistus antaa periaatteessa täysin vedenpitävän perustelun kyseiselle väitteelle, annetuilla oletuksilla. Perustelu voi olla tunnettu laskusääntö, käsitteen määritelmä, tai aiemmin tai muualla todistettu lause, jonka todistuksessa ei ole käytetty nyt todistettavaa tulosta (muuten päädytään kehäpäätelmään). Käytännössä todistuksesta jätetään yksityiskohtia pois, jotta ne pysyvät lyhyempinä. Ihmisten on helpompi lukea todistuksia, joissa on sopiva määrä yksityiskohtia – jos niitä on liikaa, kokonaiskuvaa on vaikea saada, ja jos niitä on liian vähän, puuttuvia palasia on vaikea täydentää.

Todistuksen lukeminen vastaa jonkun toisen kirjoittamaan koodin lukemista. Todistettavan tuloksen ymmärtäminen helpottaa todistuksen lukemista samalla tavalla kuin ohjelman tarkoituksen ymmärtäminen auttaa koodin tulkintaa.

1. Varmista, että ymmärrät kaikki todistuksen oletuksissa ja väitteessä esiintyvät käsitteet ja merkinnät.
2. Todistuksessa joko kerrotaan väitteitä perusteluineen tai ilman perusteluita, tai määritetään uusia asioita.
   - Kun todistuksessa väitetään jotain, selvitä miksi väite on tosi. Mistä laskusäännöstä, lauseesta tai määritelmästä se seuraa?
   - Kun todistuksessa määritellään uusi asia, varmista että sellainen asia voidaan määritellä, eli sellaisia on olemassa.
3. Käy läpi koko todistus ja yritä oikeuttaa jokainen vaihe edeltävän kohdan avulla.
4. Käytyäsi läpi koko todistuksen, lue oletukset ja väite uudestaan. Yritä perustella itsellesi, miksi väite seuraa oletuksista. Tämä on usein vaikeampaa kuin yksityiskohtien ymmärtäminen perustelussa, mutta alkaa sujumaan kokemuksen kanssa.

A.3 Tehtävän tarkistaminen

Kokeellisessa tieteessä muodostetaan valistunut arvaus teorian tai havaintojen pohjalta ja arvauksen pätevyys tarkistetaan tekemällä kokeita, jotka saattaisivat näyttää arvauksen vääräksi jos se oikeasti oli väärä.

Matematiikassa tehtävän ratkaisua tai laskun laskemista kannattaa aina ajatella valistuneena arvauksena. Kun on saanut valistuneen arvauksen, kannattaa tehdä kokeita, joissa katsotaan onko tuloksessa mitään järkeä. Tuloksen testaaminen tällä tavalla ei ole yhtä tarkka todistus kuin hyvin ja pätevästi tehty lasku, mutta auttaa löytämään ajatusvirheitä ja laskuvirheitä.

Sanallinen tehtävä Vastaako yhtälön ratkaisu kysyttyyn kysymykseen? Onko vastaus järkevä tai realistinen?

Varsinkin luonnontieteellisissä tai mittauksiin liittyvissä kysymyksissä kannattaa pitää kirjaa yksiköistä, ja katsoa että ne täsmäävät lopuksi ja vastaavat kysyttyyn kysymykseen.

Talon pisimmän seinän pituuden ei pitäisi olla 3 mm eikä 14 kg, eikä edes 17 m^2.

Yhtälö ja yhtälöryhmä Kun olet ratkaissut yhtälön, sijoita ratkaisu (tai jokin ratkaisujoukon alkio) alkuperäiseen yhtälöön. Alkuperäisen yhtälön yhtäsuuruuden pitäisi toteutua, eli yhtäsuuruusmerkin vasemman ja oikean puolen pitäisi todella olla yhtäsuuria sieventämisen jälkeen.

Varsinkin jos yhtälöllä on suuri ratkaisujoukko, mutta muutenkin, voit valita jonkin luvun joka ei ole yhtälön ratkaisu eli ei kuulu ratkaisujoukkoon. Kun epäratkaisun sijoittaa alkuperäiseen yhtälöön, niin sen ei pitäisi olla tosi, eli yhtälön vasemman ja oikean puolen pitäisi olla erisuuret.

Esimerkki A.3.1. Ratkaisimme yhtälöä $3s - 7 = 2$ ja saimme ratkaisuksi $s = 3$.

Tarkistus: Sijoitamme luvun $s = 3$ alkuperäiseen yhtälöön, jolloin sen vasen puoli on $3 \cdot 3 - 7 = 9 - 7 = 2$ ja oikea puoli on 2, eli yhtälö on tosi, koska sen molemmat puolet ovat yhtäsuuret. Näin pitikin olla.

Sijoitamme jonkin muun luvun, esimerkiksi luvun $s = 2$, yhtälöön. Tällöin yhtälön vasen puoli on $3 \cdot 2 - 7 = 6 - 7 = -1$ ja oikea puoli on 2, eli eri puolet ovat erisuuret, jolloin yhtälö on epätosi. Koska $s = 2$ ei ollut ratkaisu ja yhtälö on kyseisellä sijoituksella epätosi, niin kaikki on kunnossa.

Voit myös piirtää kuvaajia. Ajattele yhtälön oikeaa puolta funktiona ja piirrä sen kuvaaja. Ajattele sitten vasenta puolta funktiona ja piirrä myös sen kuvaaja. Näiden kuvaajien leikkauspisteet ovat yhtälön ratkaisut.

Epäyhtälö ja epäyhtälöryhmä Kuin yhtälö(ryhmä). Kannattaa valita useita testilukuja: todella suuri luku, todella pieni luku, lukuja juuri ja juuri ratkaisujoukon sisältä ja hitusen ulkoa.

Jos piirrät kuvaajia, niin jos oikean puolen lausekkeen kuvaaja on vasemman puolen lausekkeen kuvaajan päällä, niin oikean puolen lausekkeen lukuarvot ovat suurempia kuin vasemman puolen lausekkeen.

Määräämätön integraali Derivoi tulos ja alkuperäisen integroitavan funktion pitäisi tulla esiin.

Määrätty integraali Kuten yllä, mutta derivoi tulos ennen sijoittamista.

Piirrä integroitavan funktion kuvaaja ja arvioi karkeasti kuvaajan alle jäävää pinta-alaa. Sen pitäisi olla samaa kokoluokkaa ja saman merkkinen kuin integroinnin tulos.

B Kurssin yleisiä asioita

- Kurssin Korppi-sivu: `https://korppi.jyu.fi/kotka/r.jsp?course=199834`
- Kurssin Koppa-sivu: `https://koppa.jyu.fi/kurssit/199834`
- Kurssin luennoitsijan Tommi Branderin huone on MaD 244, sähköpostiosoite on `tommi.o.brander@jyu.fi` ja puhelinnumero on `+358408054743`.
- Etäopiskelijat voivat soittaa erityisesti tiistaisin kello 12-14.

B.1 Tentti

Tentissä saa olla mukana muistiinpanovälineet (ja piirrustusvälineitä, jos haluaa), laskin joka ei osaa piirtää funktioiden kuvaajia eikä ratkaista yhtälöitä ja ruokaa ja juomaa. Opiskelijakortti tai muu henkilökortti, jossa on ainakin kuva ja nimi. Tenttiin tulee jonkinlainen kaavakokoelma. Laskin saa kyetä laskemaan esimerkiksi logaritmeja ja trigonometrisia funktioita.

Tentissä ei saa olla mukana graafista laskinta, laskinta joka osaa ratkaista yhtälöitä, muistiinpanoja, penaalia, kirjoja, lemmikkiä, puhelinta, tietokonetta, jne.

Tenttiin tulee 5 tehtävää, joista kustakin saa korkeintaan 6 pistettä. Pisteet jakautuvat seuraavasti:

Selkeä esitystapa antaa korkeintaan yhden pisteen. Käsittää selkeästi erikseen kirjoitetun vastauksen ja sanalliset kommentit laskujen välissä ja joukossa. Kommenttien tulee selittää, mitä laskussa tehdään ja miten laskettu lasku ratkaisee annetun tehtävän. Puuttuva vastaus, vaikka onkin selkeä, ei oikeuta pisteisiin selkeästä esitystavasta.

Tehtävän tarkistaminen antaa korkeintaan yhden pisteen. Yhden pisteen saa, jos tarkistukset ovat kattavia ja löytävät tai löytäisivät useat mahdolliset virheet. Puoli pistettä saa, jos tarkistukset löytävät tai löytäisivät edes jonkin virheen. Pisteitä virheen tarkistamisesta saa, vaikka tehtävä muuten olisikin väärin tai puutteellisesti ratkaistu.

Tehtävän ratkaiseminen antaa korkeintaan neljä pistettä. Ratkaiseminen sisältää ongelman muotoilun (sanallisen tai todistustehtävän tapauksessa), laskun ja laskun lopputuloksen muuttamisen vastaukseksi. Perustelut ovat tärkeämpiä kuin oikea vastaus. Laskuvirheestä ei menetä paljonkaan pisteitä, ellei se muuta tehtävää helpommaksi.

Viitteet

[1] Kaija Häkkinen. *Matematiikan propedeuttinen kurssi*, sarjan *Julkaisuja* osa 112. Jyväskylän yliopisto, Taloustieteiden tiedekunta, Jyväskylä, 1998. Verkossa `http://www.math.jyu.fi/matyl/propedeuttinen/kirja/`.

[2] Petri Juutinen. Johdatus matematiikkaan. Saatavilla `https://www.jyu.fi/maths/opiskelun-tueksi/monisteet/luentomonisteet`., toukokuu 2014.

[3] Leslie Lamport. How to write a 21st century proof. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 11(1):43–63, maaliskuu 2012.

[4] Juha Lehrbäck ja Jouni Parkkonen. Lukualueet. Saatavilla `https://www.jyu.fi/maths/opiskelun-tueksi/monisteet/luentomonisteet`., 2009.

[5] Ludwig Wittgenstein. *Tractatus logico-philosophicus eli Loogis-filosofinen tutkielma*, sarjan *Taskutieto* osa 70. WSOY, kolmas laitos, 1971. Alkuperäisteos Logisch-philosophische Abhandlung, 1921.