Matematiikan peruskurssi
Harjoitukset 10
30.3.2017

(1*). Täytä kurssiin liittyvä Webropol-kysely.
(HUOM: Kysely avautuu vasta 30.3.2017, mutta sinun ei tarvitse täyttää kyselyä ennen harjoitustilaisuutta. Täytä se kuitenkin ennen kuin kysely sulkeutuu, eli ennen 20.4.2017 kello 01.00)

2. Ratkaise separoituva differentiaaliyhtälö

$$y'(x) = 2xy(x) - y(x).$$

3. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'(x) = \frac{2x}{y(x)^2}.$$

4. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y'(x) = xe^{x^2 - \ln(y(x)^2)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

5. Osoita, että lineaarisen differentiaaliyhtälön $y'(x) + y(x) = 2x + 1$ eräs ratkaisu on $y_1(x) = 2x - 1$. Selvitä yleinen ratkaisu ratkaisemalla ensin yhtälöä vastaava homogeeninen differentiaaliyhtälö.

6. Lineaarisen differentiaaliyhtälön $y'(x) + 2xy(x) = e^{-x^2}$ eräs ratkaisu on $y_1(x) = xe^{-x^2}$. Selvitä yleinen ratkaisu ratkaisemalla ensin yhtälöä vastaava homogeeninen differentiaaliyhtälö.

7. Ratkaise lineaarinen differentiaaliyhtälö $y'(x) + \sin(x)y(x) = 2\sin(x)$ soveltamalla ratkaisukaavaa $y(x) = \left(\int e^{F(x)}g(x)\mathrm{d}x + C\right)e^{-F(x)}$.

8. Ratkaise lineaarinen diff.yhtälö $y'(x) + (1 + 2x)y(x) = (1 + 2x)(x + x^2)$ soveltamalla ratkaisukaavaa $y(x) = \left(\int e^{F(x)}g(x)\mathrm{d}x + C\right)e^{-F(x)}$.

9. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'(x) - 5y(x) = 4e^{3x}.$$

(Vihje: Yhtälöllä on muotoa $y(x) = Ke^{3x}$ oleva ratkaisu, missä $K \in \mathbb{R}$. Ratkaise K, ja ratkaise homogeeninen yhtälö. Vaihtoehtoisesti voit käyttää ratkaisukaavaa)

10. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y'(x) = 6 - y(x), \\ y(\log(2)) = 3 \end{cases}$$

(11*). Ratkaise alkuarvotehtävät

$$(a) \begin{cases} y'(x) = \frac{x}{y(x)} \\ y(2) = -4 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} y'(x) = \frac{x}{y(x)} \\ y(2) = 1 \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} y'(x) = \frac{x}{y(x)} \\ y(2) = 2 \end{cases}$$

(12*). Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{(y(x)^2 - 1)}{2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

(Vihje: Harjoitusten 7 tehtävästä (11*) on apua)

(13*). Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'(x) - 2y(x) = 4x^2 - 2x - 3.$$

(Vihje: Yhtälöllä on muotoa $y(x) = Ax^2 + Bx + C$ oleva ratkaisu. Ratkaise A, B, C, ja lisäksi ratkaise homogeeninen yhtälö. Vaihtoehtoisesti voit käyttää ratkaisukaavaa)

(14*). Ratkaise alkuarvotehtävä:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{2x^3 e^{x^4}}{y(x) e^{y(x)^2}} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

(15*). Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y'(x) - y(x) = x \\ y(\log(3)) = 5 - \log(3) \end{cases}$$

(Vihje: Differentiaaliyhtälö on lineaarinen. Selvitä ensin yleinen ratkaisu, käytä sitten lisäehtoa.)

(16*). Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x \log(x)} = |\log(x)| \\ y(e) = 2e \end{cases}$$

(Vihje: Lineaarinen tämäkin differentiaaliyhtälö on.)

(17*). Oletetaan että funktiot $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ ovat differentiaaliyhtälön

$$y'(x) + f(x)y(x) = 0 \tag{1}$$

ratkaisuja, missä f on jokin funktio. Osoita että funktiot $y_1(x) + y_2(x)$ ja $ay_1(x)$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$ ovat myös differentiaaliyhtälön (1) ratkaisuja.[1]

(18*). Olkoot $y_0(x)$ ja $y_1(x)$ differentiaaliyhtälön (1) ratkaisuja, ja oletetaan että $y_0(x) \neq 0$ ja $y_1(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Osoita että on olemassa $C \in \mathbb{R}$ siten että $y_0(x) = Cy_1(x)$.[2]
(Vihje: Derivoi funktiota $\frac{y_0(x)}{y_1(x)}$)

[1]Tämä tarkoittaa, että differentiaaliyhtälön (1) ratkaisut muodostavat vektoriavaruuden, eli lineaariavaruuden.

[2]Tämä oleellisesti osoittaa, että differentiaaliyhtälön (1) ratkaisut muodostavat **yksiulotteisen** lineaariavaruuden.