

MATEMATIIKAN PERUSKURSSI

Harjoitukset 1 26.1.2017

Tehtävien ratkaisut käydään läpi torstain 26.1.2017 harjoitusryhmissä. Jos et pääse harjoitusryhmään, voit palauttaa tehtävät kirjallisena to 26.1.2017 klo 14.00 mennessä. Ks. ohjeet Kopasta <https://koppa.jyu.fi/kurssit/202884> kansiosta "Kurssitietoja".

1. Luettele jonojen $(2 \cdot i - 5)_{i=1}^{23}$ ja $((-1)^i(i^2 - 4 \cdot i + 4))_{i=1}^{\infty}$ viisi ensimmäistä termiä.

2. Ovatko seuraavat lukujonot samoja?

(a) 1, 2, 1, 2, 1, 2 ja 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...

(b) 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2 ja 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1

(c) 1, 4, $\sqrt{2}$, 0.5, 0, $\cos(\pi)$, 12 ja $2^0, 2^2, 2^{\frac{1}{2}}, 2^{-1}, \log(1), -1, 12$

3. Ovatko seuraavat lukujonot aritmeettisiä tai geometrisia? Jos jono on aritmeettinen tai geometrinen, niin mikä on sen peräkkäisten termien erotus d tai suhdeluku q ?

(a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

(b) 4, 2, 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

(c) 2, 4, 6, 8, 12, 14

4. Olkoon $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ aritmeettinen lukujono, jossa $a_1 = 8$ ja $a_{13} = 92$. Mikä on lukujonon kahden perättäisen jäsenen erotus? Entä mikä on kahdeskymmenesviides alkio a_{25} ?

5. Oletetaan että $\sum_{i=1}^{10} a_i = 161$ ja $\sum_{i=1}^{10} b_i = -5$. Paljonko on $\sum_{i=1}^{10} (a_i + 8b_{11-i} - 2 \cdot i)$?

6. Olkoot summat $\sum_{i=1}^n a_i$ ja $\sum_{i=1}^n b_i$ aritmeettisiä. Onko summa $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$ aritmeettinen? Perustele vastauksesi.

7. Otat 12000€ lainan kiinteällä 3 %:n vuosikorolla. Maksat lainan takaisin tasalyhenteisesti¹ kuukausittain 10 vuoden ajan. Paljonko maksat yhteensä korkoja lainastasi?

¹Eli laina lyhenee joka kuukausi saman verran, mutta lisäksi maksat lyhennyshetkeen mennessä kertyneet korot.

Olkoot $x, y, p > 0$. Sanomme, että y on $p\%$ suurempi kuin x jos

$$y = \left(1 + \frac{p}{100}\right)x.$$

Olkoot $x, y > 0$ ja $0 < p \leq 100$. Sanomme, että y on $p\%$ pienempi kuin x jos

$$y = \left(1 - \frac{p}{100}\right)x.$$

8. Jos y on $p\%$ suurempi kuin x , niin x on $q\%$ pienempi kuin y . Ratkaise q .

9. Pääsit ystäväsi kanssa kesätöihin pikavippifirmaan Emme-ole-roistoja!² Teidän molempien palkanne on 1000€/kk. Ensimmäisen viikon jälkeen yhtiö erehdyksessä laskee sinun palkkaasi 10%,³ ja nostaa ystäväsi palkkaa 10%. Yhtiö huomaa erheensä seuraavana päivänä, ja päättää paikata sen välittömästi nostamalla sinun palkkaasi 10% ja laskemalla ystäväsi palkkaa 10%. Paljonko sinun palkkasi on nyt? Entä ystäväsi?

10. Emme-ole-roistoja! palkkaa sinut vakituiseksi työntekijäksi. Onnistut hienosti neuvottelemaan itsellesi 4 prosentin palkankorotuksen. Yhtiö tosin haluaisi että korotus astuu voimaan vasta vuoden kuluttua, ja sinä haluaisit sen tulevan voimaan heti. Yhtiö kuitenkin hyväksyy ehdottamasi kompromissin, jossa palkkasi nousee heti 2 prosenttia, ja vuoden kuluttua taas 2 prosenttia. Kuinka monta prosenttia palkkasi on suurempi palkankorotusten jälkeen, kuin se oli ennen palkankorotuksia?

(11*). Oletetaan että $p + q = 4$. Osoita, että jos saat ensin p prosentin palkankorotuksen ja sitten q prosentin palkankorotuksen, niin palkkasi korotusten jälkeen on suurin valinnalla $p = q = 2$.

(12*). Käytät x € yhtiön Puutasunmuuta osakkeisiin. Todennäköisyydellä 0.95 osakkeiden kurssi nousee vuodessa 10%, ja todennäköisyydellä 0.05 osakkeiden kurssi laskee vuodessa 90%. Mikä on vuoden kuluttua sijoituksesi *odotusarvo*, eli paljonko sinulla on rahaa vuoden kuluttua keskimäärin?⁴ Kumpi on keskimäärin kannattavampaa, sijoitus osakkeisiin, vai x € tallettaminen pankkitilille, josta saat 2% vuosikoron?

Lisäkysymys (ei vaikuta hyvityspisteisiin): valitsisitko sijoituksen vai pankkitilin, kun:

(a) $x = 100$ €?

(b) $x = 100$ € + kaikki mitä tulet ansaitsemaan seuraavan 15 vuoden aikana?

²Tehtävässä oletetaan että te molemmat haluatte kyseiseen firmaan töihin.

³Eli uusi palkkasi on 10% pienempi kuin vanha palkkasi.

⁴Oletetaan, että yhtiö ei maksa osinkoja, ja et joudu maksamaan lähdeveroja.