Matematiikan peruskurssi
Harjoitukset 5
23.2.2017

1. Millä lukujen a ja b arvoilla lineaarisella yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} 2x_1 & & -2x_3 & = 10 \\ & 4x_2 & +4x_3 & = 8 \\ -2x_1 & +4x_2 & +ax_3 & = b \end{cases}$$

on nolla/yksi/ääretön ratkaisua?

2. Edellisissä harjoituksissa laskettiin yhtälöryhmän

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 & & + 4x_4 & = 10 \\ 2x_1 & +4x_3 + 4x_4 & & = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 & +2x_3 - 2x_4 & & = 2 \\ 9x_1 - 2x_2 & +2x_3 + x_4 & & = 2 \end{cases}$$

kerroinmatriisin E determinantti, joka oli 24. Yhtälöryhmällä on siis täsmälleen yksi ratkaisu (x_1, x_2, x_3, x_4). Selvitä x_3 käyttäen Cramerin sääntöä.

3. Hahmottele funktion $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ graafi eli kuvaaja. Määritä M_f ja A_f, ja etsi ne myös piirtämästäsi kuvasta.

4. Määritä perustellen kuvauksen $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 1$ arvojoukko A_f.

5. Määritä perustellen kuvauksen $f(x) = \frac{1}{x^2}$ määrittelyjoukko M_f ja arvojoukko A_f.

6. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x + x^2$. Määritä funktioiden $f \circ f$, $f \circ g$, ja $g \circ f$ lausekkeet.

7. Tutki ovatko seuraavat funktiot injektioita, surjektioita, tai bijektioita

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R} \to [-2, \infty), && f(x) = x^2 + 2x - 1, \\ &g : [0, \infty) \to \mathbb{R}, && g(x) = x^2 - 8, \\ &h : [-1, 1] \to [-1, 3], && h(x) = 3 - (x + 1)^2 \end{aligned}$$

8. Määritä edellisen tehtävän kuvauksille käänteiskuvaukset (niille kuvauksille joille se on mahdollista). Hahmottele lisäksi käänteiskuvauks(i)en graafi(t), ja merkitse sekä alkuperäisen funktion että käänteisfunktion määrittelyjoukot ja arvojoukot piirtämääsi kuvaan.

9. Määritä kuvauksen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 2x$ käänteiskuvaus f^{-1}, ja piirrä samaan kuvaan funktioiden f ja f^{-1} graafit.

(10*). Määritä perustellen kuvauksen $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{jos } x \leq 0, \\ x^2, & \text{jos } x > 0, \end{cases}$$

käänteiskuvaus[1].
(Vihje: koska funktio f on paloittain määritelty, on luultavasti myös f^{-1} paloittain määritelty)

(11*). Oletetaan että $f : A \to \mathbb{R}$ on aidosti kasvava, eli kaikilla $x, z \in A$ ehdosta $x < z$ seuraa $f(x) < f(z)$. Osoita että f on injektio. Tällöin $f : A \to A_f$ on bijektio, joten sillä on käänteiskuvaus $f^{-1} : A_f \to A$. Onko kuvaus f^{-1} aidosti kasvava?

(12*). (Lineaarinen regressio) Lineaarisessa regressiossa tutkitaan yhtälöryhmää $AX = B$, missä A on $m \times n$-matriisi, X on $n \times 1$-matriisi, ja B on $m \times 1$-matriisi, **ja lisäksi** $m > n$. Koska $m > n$, yleensä käy niin ettei yhtälöryhmälle ole ratkaisua. Tällöin voidaan kuitenkin löytää sellainen matriisi X, jolle AX on mahdollisimman *lähellä* matriisia B. Tämä tarkoittaa, että tehtävänä on etsiä matriisi X, jolle $\sum_{i=1}^{m} |(AX)_i - (B)_i|^2$ on mahdollisimman pieni (pienimmän neliösumman menetelmä).
Aiemmin opimme, että jos $m = n$ ja A on kääntyvä, niin yhtälöryhmän ratkaisu on $X = A^{-1}B$. Myös seuraava pätee: jos $A^T A$ on kääntyvä, niin minimointiongelman ratkaisu on $X = (A^T A)^{-1} A^T B$. Todista että näin todella on, kun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ja

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

[1] Eli päättele käänteiskuvauksen lauseke, ja osoita että tämä todella on kuvauksen f käänteiskuvaus.