

Matematiikan peruskurssi

Harjoitukset 6

2.3.2017

1. Määää funktion

(a) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 125$

(b) $g(x) = 2\sqrt{x}$

derivaattafunktio ja derivaatan arvo pisteessä $x = 1$.

2. Määää funktioiden derivaattafunktiot

(a) $x^5 - 6x$, (b) $2 \cos x + \log(x)$, (c) $x\sqrt{x}$

3. Määää funktioiden derivaattafunktiot

(a) $2x^2e^x$, (b) $\frac{x^2 + 2x}{x + 2}$, (c) $x \log(x) - x$

4. Määää funktioiden derivaattafunktiot

(a) e^{-x^2} , (b) $\log(x^8 + 1)$, (c) $\sqrt{\cos(x - 8)}$

5. Määää funktioiden derivaattafunktiot

(a) $\log(x^2 + 1) + x$, (b) $\frac{x^4 - 2x^2}{x^3 + 18x}$, (c) $\frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + 1}$

6. Olkoon $f(x) = x^4 - 3x - 1$. Mikä on funktion f kuvaajalle piirretyn tangenttisuoran kulmakerroin pisteessä $(1, f(1))$?

7. Määritä derivaatan määritelmää käyttäen (eli erotusosamäärän avulla) funktiolle $f(x) = (3x + 2)^2$ derivaatta pisteessä -1 , eli $f'(-1)$. Saatko saman tuloksen kuin derivointisääntöjä käyttäen?

8. Derivoi $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kun

(a) $f(x) = x^5$

(b) $f(x) = 1 - 2x$

(Lisäkysymys: laske molemmissa kohdissa $f'(x) \cdot (f^{-1})'(f(x))$.)

9. Määää $y'(1)$, kun $y = y(x)$ toteuttaa yhtälön:

$$y^2 - x^2 = 4.$$

10. Koirasi karkaa keskellä niittyä, eli tason pisteessä $(0, 0)$. Muistat jakson "avarasta luonnosta", jossa todettiin että vapaana oleva koira juoksee (ympärillään olevasta välittämättä) seuraavan yhtälön mukaan:

$$(x^2 + y^2)^2 - 5x^2 + y^2 = 0.$$

(a) Ratkaise mitä y on, kun $x = 1$.

(Vihje: Saat 4.asteen yhtälön, jonka voi kuitenkin ratkaista toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla. Sinun tulisi saada kaksi ratkaisua)

(b) Päättelät että koiran saa mukavimmin kiinni liikkumalla sen juoksureitin tangenttisuoran suuntaisesti. Selvitä tangenttisuorien kulmakertoimet kun $x = 1$.

(Vihje: Implisiittinen derivointi; (a)-kohdassa laskit arvot $y_1(1)$ ja $y_2(1)$).

(11*). Määää sellainen funktio f , jonka derivaattafunktio on $f'(x) = xe^x$.

(Vihje: kokeile ensin mitä saat kun derivoit lausekkeen xe^x)

(12*). Määää sellainen funktio f , jonka derivaattafunktio on $f'(x) = \frac{4x^3+8x}{x^4+4x^2+6}$.

(Vihje: osoittajassa on nimittäjän derivaattafunktio, olisiko tästä hyötyä?)

(13*). Osoita että funktiolla $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ on olemassa käänteiskuvaus $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(Vihje: Älä yritä keksiä käänteiskuvaukselle lauseketta.)

(14*). Oletetaan että funktiolla $f : A \rightarrow B$ on olemassa käänteisfunktio $f^{-1} : B \rightarrow A$. Johda ketjusääntöä käyttäen seuraava kaava funktion f^{-1} derivaattafunktiolle:

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}, \quad \text{kun } x \in A.$$

(Vihje: Kun derivoit lausekkeen $f^{-1}(f(x))$ käyttäen ketjusääntöä, tai käyttäen tietoa $f^{-1}(f(x)) = x$, sinun tulisi saada sama tulos.)

(15*). Laske tehtävän (13*) kuvaukselle $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ derivaatta pisteessä $\frac{1}{2} = \sin(\frac{\pi}{3})$, eli laske $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$.