

Matematiikan peruskurssi
Harjoitukset 7
9.3.2017

Alla olevissa tehtävissä lauseke "selvitä lokaalit ääriarvot" tarkoittaa, että etsitään missä ovat lokaalit minimi- ja maksimit, ja mitkä ovat funktion arvot näissä pisteissä.

1. Piirrä sellaisen funktion $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ graafi, joka toteuttaa kaikki alla olevat ehdot:

- f on jatkuva,
- $f'(x) < 0$ kun $x \in (-2, 0)$,
- $f(0) = 1$,
- $f'(x) > 0$ kun $x \in (0, 1)$,
- $f(1) = 2$,
- $f'(x) = 0$, kun $x \in (1, 2)$.

(Vihje: Funktiolle ei tarvitse keksiä lauseketta, hahmottele vain sopiva graafi)

2. Selvitä funktion $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$ lokaalit ääriarvot. Ovatko jotkin näistä globaaleja ääriarvoja?

3. Selvitä funktion $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$ lokaalit ääriarvot. Ovatko jotkin näistä globaaleja ääriarvoja?

4. Selvitä funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2$ lokaalit ääriarvot.

5. Selvitä funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2+1}$ lokaalit ääriarvot.

6. Arvioi lukua $\sqrt[3]{997} = 997^{\frac{1}{3}}$ funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ kuvaajalla kohdassa $(1000, f(1000))$ olevan tangenttisuoran avulla

7. Määrää

$$(a) \int x^3 + 2dx, \quad (b) \int -3\sqrt{x}dx, \quad (c) \int \frac{x+1}{x^2}dx.$$

8. Määrää

$$(a) \int e^{2x} - e^{-x} dx, \quad (b) \int 3xe^{x^2} dx, \quad (c) \int \frac{2x+1}{x^2+x+5} dx.$$

9. Määritä se funktion $f(x) = \sin(x) - e^{-\frac{x}{2}}$ integraalifunktio joka saa arvon -1 kun $x = 0$.

10. Määrää $\int \frac{2}{x^2-1} dx$.

(Vihje: aloita etsimällä luvut $c, d \in \mathbb{R}$ joille pätee $\frac{2}{x^2-1} = \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x+1}$)

(11*). Eräällä alueella (ei Jyväskylässä) puhkeaa Ebola-epidemia. Ebolaa sairastavien lukumäärä ajanhetkellä x noudattaa suunnilleen funktiota: $E : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, $E(x) = 9481.5 \cdot (x^3 - x^4)$. Milloin sairastavia on eniten, ja paljonko heitä silloin on?

(12*). Arvioi lukua $\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}})$ funktion $f(x) = \cos(x)$ kuvaajalla kohdassa $(\frac{\pi}{3}, f(\frac{\pi}{3}))$ olevan tangenttisuoran avulla.

(13*). Oletetaan, että funktio f on derivoituva pisteessä x_0 , ja oletetaan lisäksi että funktiolla f on lokaali minimi (tai lokaali maksimi) pisteessä x_0 . Osoita että $f'(x_0) = 0$.

(Vihje: Tutki erotusosamäärän $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ merkkiä kun $h > 0$ ja kun $h < 0$)

(14*). Todista **Rollen lause**: Oletetaan että funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$, ja derivoituva avoimella välillä (a, b) , ja lisäksi $f(a) = 0 = f(b)$. Osoita että on olemassa $c \in (a, b)$ jolle pätee $f'(c) = 0$.

(Vihje: Jatkuva funktio suljetulla välillä saavuttaa miniminsä ja maksiminsa. Yritä hyödyntää tehtävää (13*))

(15*). Todista **Differentiaalilaskennan väliarvolause**: Oletetaan että funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$, ja derivoituva avoimella välillä (a, b) . Osoita että on olemassa $c \in (a, b)$ jolle pätee $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Vihje: Sovella Rollen lausetta funktioon

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right]$$

(16*). Olkoon $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva, ja $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ja $G : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funktion f integraalifunktioita. Tutki funktion $F - G$ monotonisuutta, ja päätele millainen (alkeis)funktio se on.

(17*). Selvitä funktion $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2 \cos x$ lokaalit ääriarvot.

(18*). Selvitä funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 1|$ lokaalit ääriarvot.

(19*). Selvitä funktion $f(x) = -\frac{3}{2} \log(x^2 + 2) + x$ määrittelyjoukko ja lokaalit ääriarvot.