Matematiikan peruskurssi
Harjoitukset 8
16.3.2017

1. Määrää osittaisintegroimalla (kahdesti) $\int x^2 e^x \mathrm{d}x$

2. Määrää $\int \frac{4x^3+8x}{x^4+4x^2+6}\mathrm{d}x$ ja $\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$.
(Vihje: voit käyttää sijoituksia $t = x^4 + 4x^2 + 6$ ja $t = x^2 + 1$)

3. Määrää $\int 2x^3 e^{x^2} \mathrm{d}x$.
(Vihje: osittaisintegroi valinnalla $f'(x) = 2xe^{x^2}$ ja $g(x) = x^2$)

4. Määrää $\int 3x^2 \log(x^3)\mathrm{d}x$ sijoituksen $t = x^3$ avulla.

5. Määrää $\int e^{x^{\frac{1}{3}}} \mathrm{d}x$ käyttämällä sijoitusta $x = g(t) = t^3$.

6. Laske $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ kun

$$(a)\ f(x) = 3x^2 + 2x - 2, \quad (b)\ f(x) = e^{-x}, \quad (c)\ f(x) = \sin(1-x).$$

7. Laske $\int_1^2 x \log(x)\mathrm{d}x$.

8. Laske $\int_3^8 \frac{\cos(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$ sijoituksen $t = \sqrt{x+1}$ avulla.

9. Laske $\int_1^4 \sqrt{\sqrt{x} - 1}\mathrm{d}x$.
(Vihje: tee vaikkapa sijoitus $x = (t^2 + 1)^2$ tai $x = (t + 1)^2$)

10. Laske epäoleelliset integraalit

$$(a) \int_1^\infty \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x, \quad (b) \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x.$$

(11*). Määrää $\int \log(x)^2 \mathrm{d}x$.
(Vihje: katso luennoilta miten määrätään $\int \log(x)dx$)

(12*). Laske

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos^3(x)\mathrm{d}x, \quad (b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\cos^3(x)\mathrm{d}x.$$

(Vihje: Pythagoraan lauseesta voi olla apua (b)-kohdassa)

(13*). Määrää $\int \frac{1}{x\log(x)}\mathrm{d}x$.
(Vihje: Käytä sijoitusta $t = \log(x)$)

(14*) Laske

(a) $\frac{d}{dx}\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$.
(Vihje: ÄLÄ yritä integroida, vaan käytä analyysin peruslausetta. Tässä siis derivoidaan funktio $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ muuttujan x suhteen)

(b) $\frac{d}{dx}\int_0^{-2x} e^{t^2}\mathrm{d}t$.
(Vihje: Ketjusääntö ja (a)-kohta)

(15*). Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva, ja olkoon M funktion f suurin arvo välillä $[a, b]$, ja m funktion f pienin arvo välillä $[a, b]$. Osoita, että

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

(Vihje: Integraalin monotonisuus)

(16*). Todista **integraalilaskennan väliarvolause**: Oletetaan että $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Osoita että tällöin on olemassa $c \in [a, b]$, jolle pätee

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(Vihje: Merkitse $k = \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}$, ja päättele Bolzanon lauseen ja tehtävän (15*) avulla, että funktio f saavuttaa arvon k jossain välin $[a, b]$ pisteessä)

(17*). Oletetaan että $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Osoita että kaikissa pisteissä $x \in (a, b)$ pätee

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)dt = f(x).$$

(Vihje: Käytä integraalilaskennan väliarvolausetta, ja funktion f jatkuvuutta)