Matematiikan peruskurssi
Harjoitukset 9
23.3.2017

1. Laske funktioiden $f(x) = x$ ja $g(x) = x^2$ kuvaajien väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $[0, 1]$, ja piirrä kyseinen alue.

2. Laske funktioiden $f(x) = x^3$ ja $g(x) = -x$ kuvaajien väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $[-1, 1]$, ja piirrä kyseinen alue.

3. Yhdistä differentiaaliyhtälöt ja sanalliset kuvaukset toisiinsa:

$$\begin{array}{llllll} (a) & y' = 2y, & (b) & y' = -(y-2), & (c) & y' = \dfrac{2}{y}, \\ (d) & y' = 2x^2 + 2, & (e) & y' = 2y^2, & (f) & y' = -2xy, \end{array}$$

(1) Funktion muutosnopeus on kääntäen verrannollinen funktion arvoon

(2) Funktion muutosnopeus on suoraan verrannollinen funktion arvoon

(3) Funktion muutosnopeus on muuttujan arvon polynomi

(4) Funktion muutosnopeus on suoraan verrannollinen funktion arvon ja muuttujan arvon tuloon

(5) Funktion muutosnopeus on suoraan verrannollinen funktion arvon neliöön

(6) Funktion muutosnopeus on suoraan verrannollinen funktion arvon ja luvun 2 erotukseen

4. Mitkä ovat tehtävän 3 differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen derivaattojen arvot kun $x = 1$ ja $y = y(1) = 3$? Onko ratkaisufunktio kohdassa $x = 1$ kasvava vai vähenevä?

5. Ratkaise differentiaaliyhtälöt

$$(a)\ y'(x) = 2x - 7, \quad (b)\ y'(x) = x\ln(x), \quad (c)\ y'(x) = 3x^2e^{x^3}.$$

6. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y'(x) = \ln(x) + 1 \\ y(1) = 6 \end{cases}$$

7. Osoita että $y(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$ on differentiaaliyhtälön $y'(x) = \frac{(y(x)^2-1)}{2}$ eräs ratkaisu.

8. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'(x) = (x + x^2)(1 + 2x)e^{x+x^2}$$

9. Ratkaise separoituva differentiaaliyhtälö

$$y'(x) = \frac{1}{y(x)}.$$

10. Ratkaise separoituva differentiaaliyhtälö

$$y'(x) = 3x^2 y(x).$$

(11*). Kysy jotain (kurssiin liittyvää, ja kirjallisesti!).
(Vihje: Mikä on jäänyt kurssilla epäselväksi/ mistä haluaisit tietää lisää?)

(12*). Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{y(x)}, \\ y(0) = -2. \end{cases}$$

Mikä on tehtävän ratkaisuväli?

(13*). Yrityksellä on investointimahdollisuudet A ja B. Kohteesta A saadaan vuoden aikana kassavirta (negatiivinen luku tarkoittaa että sijoitus tuottaa tappiota) funktion[1] $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(t) = -32t^3 + 108t^2 - 20t - 10$ ja kohteesta B funktion $g : [0, 4] \to \mathbb{R}$, $g(t) = 8t^3 + 15t^2 - 30t - 100$ mukaisesti. Tässä t on aika vuosineljänneksinä.

(a) Kumpi kohde kerryttää enemmän tuottoa vuoden aikana (eli välillä $[0, 4]$)?

(b) Toimitusjohtajaa kiinnostaakin vain tienata mahdollisimman paljon ensimmäisellä vuosineljänneksellä. Kumpi kohde kerryttää enemmän tuottoa tällä aikajaksolla (eli välillä $[0, 1]$)?

(14*). Ratkaise differentiaaliyhtälöt

$$(a)\ y'(x) = \sin x + \frac{1}{x}, \quad (b)\ y'(x) = x^2 e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (c)\ y'(x) = \log(x).$$

[1] Siis hetkellä t kohteen A "tuottonopeus"on $f(t)$.

(15*). Lähdet kalastamaan. Ensimmäisen tunnin aikana matkustat järvelle, selvittelet välineitäsi, ja etsit hyvää kalastuspaikkaa. Tämän jälkeen ryhdyt toimeen: funktio

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty), \quad f(t) = \begin{cases} 0, \text{ kun } t < 1, \\ \frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}, \text{ kun } t \geq 1 \end{cases},$$

ilmaisee kalan nappaamisen todennäköisyyttä hetkellä t (tuntia).[2] Mikä on todennäköisyys, että et saa kalaa ensimmäisen 4 tunnin aikana? Entä ensimmäisen 16 tunnin aikana?

(16*). Ystäväsi on myös kalastamassa. Hän asuu järven lähellä, joten sinun vasta aloittaessasi kalastusta hän on jo ollut tunnin verran paikalla: funktio

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty), \quad f(t) = \frac{\log(2)}{4} \cdot e^{-\frac{\log(2)}{4}t},$$

ilmaisee kalan nappaamisen todennäköisyyttä hetkellä t (tuntia).[3] Mikä on todennäköisyys, että ystäväsi ei saa kalaa ensimmäisen 4 tunnin aikana? Entä ensimmäisen 16 tunnin aikana?

(17*). Funktiot $y(x) = Ce^x$ ovat differentiaaliyhtälön

$$y'(x) - y(x) = 0 \tag{1}$$

ratkaisuja kaikilla $C \in \mathbb{R}$. Osoita ettei muita ratkaisuja ole.
(Vihje: oleta, että funktio $y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y_0(x)$ on differentiaaliyhtälön (1) ratkaisu. Derivoi funktiota $y_0(x)e^{-x}$, ja katso mitä tapahtuu.)

[2] Tämä on eräs Pareto-jakauma.
[3] Tämä on eräs eksponentiaalinen jakauma.