

## Matematiikan peruskurssi MATY020

---

### A. Yleistä tietoa tenttitilaisuudesta.

- Muista ilmoittautua tenttiin. Jos et ole avoimen yliopiston opiskelija, niin tämä onnistuu Korpissa. Jos olet avoimen yliopiston opiskelija, niin ilmoittaudu avoimen yliopiston ohjeiden mukaan; lähettämällä sähköposti osoitteeseen "Office-maths@jyu.fi".
- Tenttipäivät ovat 19.4.2017 ja 3.5.2017.
- Molemmat tentit ovat keskiviikkona, alkavat noin kello 8.00, ja päättyvät noin kello 12.00. Tenttitilaisuudesta voi poistua aikaisintaan puolen tunnin kuluttua tilaisuuden alkamisesta.
- Tenttipaikka on Mattilanniemessä, Jyväskylässä. Tenttisali on näkyvissä MaA- ja MaD-rakennusten ulko-ovessa viimeistään tenttiä edeltävänä päivänä.
- Tentissä saa olla mukana funktiolaskin tai graafinen laskin, mutta ei symbolista laskinta. Tenttisalissa on myös muutama laskin joita voi lainata.
- Laskimen lisäksi tentissä saa olla mukana vain kirjoitusvälineet ja henkilöllisyystodistus (ja mahdollisesti syömistä/juomista). Kun palautat vastauspaperisi tentin valvojalle, joudut todistamaan henkilöllisyytesi (opiskelija- tai ajokortti tai vastaava kelpaa).
- Tentissä tarvittavat kaavat löytyvät tenttipaperin toiselta puolelta.

### B. Vastausohjeita.

- (1) Kirjoita vastauspaperiisi/vastauspapereihisi koko nimesi ja syntymäaikasi asiaankuuluvaan paikkaan.
- (2) Lue annetut tehtävät huolellisesti.
- (3) Useimmiten *vastaukseen* kuuluu muutakin kuin oikea *tulos*. Kirjoita näkyviin myös tekemäsi päättely, ja laskuissa olisi hyvä näkyä riittävä määrä välivaiheita. Tällöin:
  - tentin tarkastajille näkyy vastauspaperistasi, että olet ymmärtänyt asian etkä vain arvaillut
  - jos olet tehnyt virheen jossain kohdassa, niin tarkastaja näkee missä kohdassa virhe on tapahtunut, eli *millainen* virhe on kyseessä. Jos esimerkiksi vastauksessasi toteat:  $D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$ , ja tämän jälkeen unohdat "-"merkin termin  $\frac{1}{x^2}$  edestä, niin tämä on pienempi virhe kuin ilman toteamusta  $D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$ . Huolimattomuudesta ei vähennetä pisteitä yhtä paljon kuin asian ymmärtämättömyydestä.

Kirjoita vastaukseesi kuitenkin vain *kyseiseen tehtävään liittyvät* päättelyt ja kaavat/laskut.

- (4) Huolellisuudestakin on hyötyä: kun saat tehtävän ratkaistua, niin käytä hetki tuloksen tarkisteluun. Jos huomaat ettei ratkaisusi ole järkevä (esimerkiksi funktion  $\frac{1}{x}$  derivaatan pitäisi olla negatiivinen, koska funktio on vähenevä), niin etsi laskuistasi/päättelystäsi virhettä jos aika riittää. Jos et löydä virhettä, tai et ehdi etsiä virhettä, niin kirjoita tehtäväpaperiin että tulos ei voi olla oikein ("sain tällaisen tuloksen, mutta se ei voi olla oikein koska..."). Tällä osoitat että olet ymmärtänyt asian, vaikka jokin laskuvirhe olisikin ratkaisussasi tullut.
- (5) Vaikka et osaisi ratkaista tehtävää kokonaan, niin yritä. Jos mielestäsi tiedät jotain tehtävään liittyvää, niin kirjoita se vastauspaperiin. Lisäksi voit kertoa miten tehtävä mielestäsi tulisi ratkaista, vaikka et osaisi käytännössä sitä tehdä (esimerkiksi funktion kasvavuuden/vähenevyyden näkee funktion derivaatasta, muttet osakaakaan derivoida kyseistä funktiota).
- (6) Vaikka et saisi aikaan minkäänlaista vastausta mihinkään tehtävään, niin jätä tentin valvojalle (tyhjä) paperi jossa on nimesi ja syntymäaikasi. Näin välttytään "kadonneiden" tenttipaperien etsimiseltä.

### C. Kurssin sisältö

Kurssin kannalta olennainen sisältö, joka kurssin aikana on ollut tarkoitus oppia<sup>1</sup>:

- (1) Jonot ja korkolaskenta
  - Aritmeettisen ja geometrisen lukujonon ja summan tunnistaminen, jonon yleisen termin kaavan käyttäminen, ja summa-kaavan käyttäminen.
  - Kasvaneen ja alkuperäisen pääoman laskeminen, eli diskonttaaminen ja korkouttaminen.
  - Jaksollisten suoritusten yhteisen loppuarvon ja alkuarvon laskeminen.
  - Tasaerälaina: ymmärtäminen ja tasaerän laskeminen.
- (2) Matriisilaskenta
  - Peruslaskutoimitukset (yhteen- ja kertolasku, sekä kertomisen reaalityyppillä).
  - Transpoosin laskeminen.
  - Determinantin laskeminen, ja determinantin yhteys käänteismatriisiin.
  - Käänteismatriisi, ja sen selvittäminen (Gauss-Jordan).
  - Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen (Gauss-Jordan/käänteismatriisin avulla).

---

<sup>1</sup>Eli tenttiin lukiessasi ainakin vilkaise näitä asioita.

(3) Analyysin alkeita

- Funktion määrittelyjoukko ja arvojoukko.
- Yhdistetty funktio ja lausekkeen muodostaminen.
- Käänteisfunktio: milloin funktiolla on käänteisfunktio, ja miten sen lauseke muodostetaan. Mitkä ovat käänteisfunktion määrittelyjoukko ja arvojoukko.
- Derivaattafunktion laskeminen derivoimissääntöjen avulla.
- Derivaatan yhteys funktion kuvaajalle piirrettyihin tangenttisuoriin.
- Derivaatan yhteys funktion monotonisuuteen.
- Derivaatan käyttäminen ääriarvojen löytämiseen ja niiden laadun määrittämiseen (lokaali/globaali minimi/maksimi).
- Implisiittinen derivointi.
- Funktion arvojen arvioiminen annetun pisteen lähellä derivaatan/tangenttisuoran avulla.
- Integraalifunktion määrääminen integroimissääntöjen avulla.
- Määrätty integraali, laskeminen integraalifunktion avulla.
- Osittaisintegrointi.
- Integrointi sijoituksen avulla.
- Funktion kuvaajien rajoittaman alueen pinta-ala.
- Kertymäfunktio.
- Epäoleelliset integraalit.

(4) Differentiaaliyhtälöt

- Differentiaaliyhtälön tyypin tunnistaminen (integroimalla ratkeava/separoituva/lineaarinen).
- Differentiaaliyhtälön ratkaiseminen soveltuvan ratkaisukaavan avulla.
- Alkuarvotehtävän ratkaiseminen, eli sen yksittäisratkaisun etsiminen joka toteuttaa annetun lisäehdon.

**D. Esimerkkejä tuloksen tarkistuksesta.**

- (a) Jaksolliset suoritukset: jos talletat pankkiin 100 euroa vuoden välein, niin 10 vuoden kuluessa teet 10 talletusta. Koska saat myös jonkin verran korkotuloja, niin 10 vuoden kuluttua tililläsi on oltava **enemmän kuin**  $100 * 10 = 1000$  euroa.
- (b) Jaksolliset suoritukset: otat 10 vuoden mittaisen tasaerälainan, jossa lainan määrä on 1000 euroa, ja maksat lainan takaisin vuosittain. Koska maksat lisäksi korkoja, niin yhteensä maksat takaisin enemmän kuin 1000 euroa. Takaisinmaksueriä on 10, joten tasaerän suuruus on oltava **suurempi kuin**  $\frac{1000}{10} = 100$  euroa. Jos maksat lainan takaisin puolen vuoden välein, niin takaisinmaksueriä on 20 kpl, joten tasaerän suuruus on oltava suurempi kuin  $\frac{1000}{20} = 50$  euroa.

- (c) Käänteismatriisi: Kun saat ratkaistua matriisin  $A$  käänteismatriisiksi  $A^{-1}$ , niin tarkista vielä että todella on  $AA^{-1} = I$  (tai  $A^{-1}A = I$ ).
- (d) Lineaarinen yhtälöryhmä: Kun saat ratkaistua Gauss-Jordanin menetelmällä laajennetun matriisin yksinkertaiseen muotoon, niin anna vielä ratkaisu muodossa " $x_1 = a, x_2 = b, \dots$ " Tarkista että ratkaisusi toteuttaa annetun yhtälöryhmän.
- (e) Käänteisfunktio: Hahmottele alkuperäisen funktion kuvaaja. Käänteisfunktion kuvaajan tulisi olla tämä kuvaaja "käännettynä": Vertaile funktioiden  $h$  ja  $h^{-1}$  kuvaajia tehtävissä H5/T7 ja H5/T8 (funktion  $h^{-1}$  kuvaaja löytyy Kopasta).
- (f) Käänteisfunktio: Jos ratkaisit muokkaamalla yhtälön  $y = f(x)$  sellaiseen muotoon, jossa  $x$  on toisella puolella ja muuttujan  $y$  lauseke toisella puolella, niin tämä muuttujan  $y$  lauseke on  $f^{-1}(y)$ . Tarkistus: onko  $f(f^{-1}(x)) = x$  ja  $f^{-1}(f(x)) = x$  kaikilla sopivilla  $x$ .
- (g) Derivointi: Jos saat kasvavan funktion derivaataksi jotain negatiivista, niin jossain on vikaa.
- (h) Ääriarvoja etsiessä: Tee kulkukaavio, ja hahmottele funktion kuvaajaa tämän perusteella (vastaavasti kuin tehtävässä H7/T1). Mieti, vastaako kuva funktion lauseketta, eli onko kuvaaja sellainen kuin funktion lausekkeen mukaan luulisitkin olevan.
- (i) Integraalifunktion määräminen: Tuloksen voi aina tarkistaa derivoimalla.
- (j) Määrätty integraali: Jos osaat hahmotella funktion kuvaajan, niin tee se. Kuvasta voit arvioida määrättyä integraalia vastaavan pinta-alan suuruutta. Jos sait määrätyn integraalin arvoksi 1, ja kuvasta katsomalla arvioit vastaavan pinta-alan suuruudeksi osapuulleen 4, niin kannattaa tarkistaa vielä laskut.
- (k) Määrätty integraali: Jos integroitava funktio on koko integroimisvälillä positiivinen (vastaavasti negatiivinen), niin määrätyn integraalin tuloskin on positiivinen (vastaavasti negatiivinen).
- (l) Differentiaaliyhtälön ratkaisu: Tuloksen voi aina tarkistaa derivoimalla. Jos esimerkiksi saat differentiaaliyhtälön

$$y'(x) + y(x) = 0 \tag{1}$$

ratkaisuksi  $y(x) = Ce^x$ , missä  $C \in \mathbb{R}$ , niin tarkista toteuttaako funktio  $Ce^x$  todella yhtälön (1). Tarkista siis, toteutuuko

$$D(Ce^x) + Ce^x = 0.$$

(Vihje: ei toteudu)

## MATEMATIIKAN PERUSKURSSI: KAAVOJA TENTTIIN

---

Kaavoja lukujono- ja korkolaskuista

Aritmeettinen lukujono  $a_i = a_1 + (i - 1)d$  ja summa  $S_n = n \frac{a_1 + a_n}{2}$ .

Geometrisen lukujono  $a_i = a_1 q^{i-1}$  ja summa  $S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$ .

Kasvanut pääoma  $n$ :n korkojakson kuluttua on  $K_n = (1 + \frac{p}{100})^n K_0$  ja alkuperäisen pääoma  $K_0 = \frac{K_n}{(1 + \frac{p}{100})^n}$ .

$$\text{Tasaerälaina: tasaerä} = A = N \cdot \frac{(1 + \frac{p}{100 \cdot m})^n \cdot \frac{p}{100 \cdot m}}{(1 + \frac{p}{100 \cdot m})^n - 1},$$

missä  $N$  = lainan määrä,  $p$  = korkokanta,  $n$  = takaisinmaksuerien lukumäärä ja  $m$  = takaisinmaksuerien lukumäärä korkojakson aikana.

---

Lineaarialgebraan liittyviä laskusääntöjä

$$\begin{aligned} (A^T)^T &= A & (rA)^T &= rA^T & (A + B)^T &= A^T + B^T & (AC)^T &= C^T A^T \\ AA^{-1} &= A^{-1}A = I & \det A^{-1} &= \frac{1}{\det A} & (A^{-1})^{-1} &= A & (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \end{aligned}$$

Derivoimissääntöjä

$$\begin{aligned} Dx^r &= rx^{r-1} & De^x &= e^x & D \ln x &= \frac{1}{x} \\ D \sin(x) &= \cos(x) & D \cos(x) &= -\sin(x) & D \tan(x) &= 1 + \tan^2(x) \end{aligned}$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$Dg(f(x)) = (g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x)f'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

Integroimissääntöjä

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C \text{ kun } r \neq -1, \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \int e^x dx = e^x + C, \\ \int \sin(x) dx = -\cos(x) + C, \int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$\text{Osittaisintegrointi: } \int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Integrointi sijoituksen avulla:

$$\int \underbrace{g(f(x))}_{=t} \underbrace{f'(x) dx}_{=dt} = \int g(t) dt = G(f(x)) \text{ tai } \int f(\underbrace{x}_{g(t)}) \underbrace{dx}_{g'(t) dt} = \int f(g(t))g'(t) dt.$$

$$\text{Määrätty integraali: } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b F(x) = F(b) - F(a)$$

$$\text{-osittaisintegroinnilla } \int_a^b f'(x)g(x) dx = \int_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

$$\text{-sijoituksella } \int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t) dt.$$

Differentiaaliyhtälöiden ratkaisuun

$$y'(x) = f(x) \rightarrow y(x) = F(x) + C$$

$$y'(x) = \frac{g(x)}{h(y(x))} \rightarrow H(y(x)) = G(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x) \rightarrow y(x) = \left( \int e^{F(x)} g(x) dx + C \right) e^{-F(x)}, \quad C \in \mathbb{R}$$