Matematiikan peruskurssi. Jyväskylän yliopisto. 2017.

Sisältö

1 Finanssimatematiikkaa

1.1 Lukujonot ja summat

Lukujono on järjestetty joukko reaalilukuja. Esimerkiksi

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13 \quad \text{ja} \quad 9,\ 3,\ 3.3,\ 2.1,\ 8\frac{1}{2},\ 5,\ 100$$

ovat lukujonoja, joissa on seitsemän jäsentä ja

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots \quad \text{ja} \quad 2,\ 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{7},\ \ldots$$

ovat päättymättömiä lukujonoja, joissa on äärettömän monta jäsentä. Lukujonossa jäsenten järjestyksellä on merkitystä.

Käytämme merkintää a_i tarkoittaessamme lukujonon i:nnettä jäsentä. (Sanotaan "a i".) Lukujonoille

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \quad \text{ja} \quad a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

voimme käyttää merkintöjä

$$(a_i)_{i=1}^{n} \quad \text{ja} \quad (a_i)_{i=1}^{\infty}$$

tai joskus vain lyhyesti (a_i). Luvut a_i ovat reaalilukuja, $a_i \in \mathbb{R}$, ja niitä voidaan kutsua jonon *jäseniksi* tai *termeiksi*. Termin a_i järjestyslukua i kutsumme myös **indeksiksi** tai **alaindeksiksi**. Lukujonot (a_i) ja (b_i) ovat samat, jos niissä on yhtä monta jäsentä ja $a_i = b_i$ jokaisella indeksillä i.

Esimerkki 1.1.1.

(a) *Vietettyään pääsiäistä, Aatu Menninkäinen ilmaantuu matemaattisen peruskurssin tenttiin (keskiviikkona, 19. huhtikuuta). Tentissä on viisi tehtävää; Aatu saa ensimmäisestä tehtävästä 3 pistettä, toisesta tehtävästä 2.5 pistettä, kolmannesta tehtävästä 5 pistettä, neljännestä tehtävästä 0 pistettä, ja viidennestä tehtävästä 1 pisteen. Tehtävistä saadut pistemäärät muodostavat siis lukujonon*

$$3,\ \frac{5}{2},\ 5,\ 0,\ 1$$

(b) *Lukujonon* $\left(\frac{i-1}{i}\right)$ *kuusi ensimmäistä termiä ovat* $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ *ja* $\frac{5}{6}$.

(c) *Määritellään* $a_1 = 3$ *ja* $a_i = \frac{1}{2}a_{i-1}$, *kun* $i = 2, 3, \ldots$, *eli jokainen termi toisesta alkaen on puolet edellisestä termistä. Näin saadaan lukujono*

$$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \frac{3}{32}, \ldots.$$

Huomataan, että $a_1 = 3 \cdot 1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0$, $a_2 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1$, $a_3 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$, $a_4 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$. *Itse asiassa jokainen termi* a_i *voidaan kirjoittaa muotoon*

$$a_i = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}.$$

Kun lasketaan yhteen päättyvän lukujonon $(a_i)_{i=1}^n$ termit, saadaan summa

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

(Sanotaan: "summa i käy yhdestä n:ään a i".)

Esimerkki 1.1.2. *(Jatkoa Esimerkille 1.1.1)*

(a) *Aatun saama kokonaispistemäärä tentistä on*

$$3 + \frac{5}{2} + 5 + 0 + 1 = 11.5.$$

Voi olla, että päästäkseen läpi kurssista Aatun pitää yrittää uudelleen toisena tenttipäivänä (keskiviikkona 3. toukokuuta).[1]

(b)

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{i-1}{i} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{0 + 30 + 40 + 45 + 48 + 50}{60}$$
$$= \frac{213}{60} = 3\frac{33}{60}$$

(c)

$$\sum_{i=1}^{5} 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} = 3 + \frac{24 + 12 + 6 + 3}{16} = 3 + \frac{45}{16} = 5\frac{13}{16}$$

[1] Huom: vappu on saman viikon maanantaina.

1.1.1 Aritmeettinen lukujono ja summa

Lukujono (a_i) on *aritmeettinen*, jos minkä tahansa kahden peräkkäisen termin erotus on aina sama luku, eli

$$a_{i+1} - a_i = a_2 - a_1 \quad \text{kaikilla indekseillä } i.$$

Tätä erotusta on tapana merkitä kirjaimella d. Siis

$$d = a_2 - a_1.$$

Esimerkki 1.1.3. *Parittomat luonnolliset luvut* $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ *muodostavat aritmeettiset jonon, jonka kahden peräkkäisen termin erotus on* 2 *(eli* $d = 2$*). Jono voidaan kirjoittaa myös muotoon* $1, 1+2, 1+2\cdot 2, 1+3\cdot 2, \ldots$

Aritmeettinen jono on hyvin yksinkertainen lukujono; jokainen termi voidaan peräti ilmoittaa ensimmäisen termin a_1 ja termien erotuksen d avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 + \underbrace{a_2 - a_1}_{d} = a_1 + d \\
a_3 &= \underbrace{a_2}_{a_1+d} + \underbrace{a_3 - a_2}_{a_2 - a_1 = d} = a_1 + d + d = a_1 + 2d \\
a_4 &= \underbrace{a_3}_{a_1+2d} + \underbrace{a_4 - a_3}_{d} = a_1 + 3d
\end{aligned}$$

jne.

Aritmeettisen jonon i:s termi on siis aina

$$\boxed{a_i = a_1 + (i-1)d}$$

Esimerkki 1.1.4. *Mikä on aritmeettisen jonon* $3, 7, 11, 15, 19, \ldots,$ *kahdestoista termi? Jonon ensimmäinen termi on* $a_1 = 3$ *ja peräkkäisten termien erotus on* $d = 4$*. Silloin kahdestoista termi on*

$$a_{12} = a_1 + (12-1)d = 3 + 11 \cdot 4 = 47.$$

Esimerkki 1.1.5. *Olkoon* (a_i) *aritmeettinen lukujono, jossa* $a_1 = 6$ *ja* $a_4 = 18$*. Mikä on peräkkäisten termien erotus? Koska*

$$18 = a_4 = a_1 + (4-1)d = 6 + 3d,$$

on $d = \frac{18-6}{3} = 4$.

Esimerkki 1.1.6. *[Laina tasalyhennyksin kiinteällä korolla] Korhosen perhe ottaa remonttia varten lainaa* 30000€ *kiinteällä* 4%*:n vuosikorolla ja maksaa lainaa takaisin kuukausittain viiden vuoden ajan. Joka kuukausi maksetaan lainanlyhennys sekä korko. Tasalyhennyksissä lainaa lyhennetään joka kuukausi saman verran, mutta maksetun koron määrä vähenee lainan pienentyessä. Viiden vuoden maksusuunnitelmaan kuuluu* $5 \cdot 12 = 60$ *maksuerää. Lainan kuukausittainen lyhennys on* $\frac{30000}{60} = 500$€.

Lasketaan maksettavat korot. Käytämme Suomessa käytössä olevaa pankkikorkoa, jossa kuukausikorko lasketaan lineaarisella interpolaatiolla vuosikorosta. Siis kuukausikorko on $4\% \cdot \frac{1}{12}$. *Ensimmäinen erä korkoa maksetaan* 30000 *eurosta kuukauden ajalta, toinen korkoerä maksetaan kuukauden ajalta* 29500 *eurosta, kolmas* 29000 *eurosta ja niin edelleen. Viimeisessä 60. erässä korkoa maksetaan enää* 500 *eurosta. Erissä maksettavat korot ovat siis:*

$$
\begin{aligned}
30000 \cdot \frac{4}{100} \cdot \frac{1}{12} &= 100€, \\
29500 \cdot \frac{4}{100} \cdot \frac{1}{12} &= 98.33€, \\
29000 \cdot \frac{4}{100} \cdot \frac{1}{12} &= 96.67€, \\
&\vdots \\
500 \cdot \frac{4}{100} \cdot \frac{1}{12} &= 1.67€.
\end{aligned}
$$

Huomataan, että kahden peräkkäisen korkoerän erotus on aina $-500 \cdot \frac{4}{100} \cdot \frac{1}{12} = -\frac{5}{3} = -1,67$€ *ja ensimmäinen erä on* 100€*, joten korkoerät muodostavat aritmeettisen jonon, jossa* $a_1 = 100$ *ja* $d = -\frac{5}{3}$. *Korkojen muodostama jono on*

$$
100 - 0 \cdot \frac{5}{3},\ 100 - 1 \cdot \frac{5}{3},\ 100 - 2 \cdot \frac{5}{3},\ \ldots, 100 - 59 \cdot \frac{5}{3},
$$

jonka voi merkitä myös lyhyemmin

$$
\left(100 - (i-1)\frac{5}{3}\right)_{i=1}^{60}.
$$

Koska lainaa lyhennetään 500€ *joka kuussa, muodostaa myös lainan takaisinmaksusuunnitelma aritmeettisen jonon. Tällä kertaa* $a_1 = 600$ *ja* $d = -\frac{5}{3}$, *ja jono on*

$$
\left(600 - (i-1)\frac{5}{3}\right)_{i=1}^{60}.
$$

Olkoon $(a_i)_{i=1}^n$ aritmeettinen jono, jonka peräkkäisten termien erotus on d. Tällöin summaa

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{i=1}^n a_i &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d) \end{aligned}$$

sanotaan **aritmeettiseksi summaksi**.

Johdetaan kaava aritmeettisen summan laskemiseksi. Muista, että aritmeettisen jonon i:s termi on aina $a_i = a_1 + (i-1)d$. Siis pätee

$$\begin{aligned} a_2 + a_{n-1} &= (a_1 + (2-1)d) + (a_1 + (n-1-1)d) \\ &= a_1 + (a_1 + (n-1)d) \\ &= a_1 + a_n. \end{aligned}$$

Huomataan myös, että millä tahansa $k = 0, 1, \ldots, n-1$ pätee

$$\begin{aligned} a_{1+k} + a_{n-k} &= (a_1 + (1+k-1)d) + (a_1 + (n-k-1)d) \\ &= a_1 + (a_1 + (n-1)d) \\ &= a_1 + a_n. \end{aligned}$$

Tämän avulla laskemme

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 \quad + a_3 \quad + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 \quad + a_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \\ &= \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ kpl}}. \end{aligned}$$

Siis $2S_n = n(a_1 + a_n)$, josta saadaan

$$\boxed{S_n = n\tfrac{a_1 + a_n}{2}.}$$

Esimerkki 1.1.7. *Lasketaan aritmeettisen jonon* $7, 10, 13, 16, 19, 22, \ldots$ *kahdeksankymmenen ensimmäisen termin summa* S_{80}. *Jonon ensimmäinen termi on* $a_1 = 7$ *ja kahden peräkkäisen termin erotus on* $d = 3$. *Jonon* 80. *termi on silloin* $a_{80} = a_1 + (80-1)d = 7 + 79 \cdot 3 = 244$. *Näin ollen*

$$S_{80} = 7 + 10 + 13 + \cdots + 244 = 80 \cdot \frac{7 + 244}{2} = 40 \cdot 251 = 10040.$$

Esimerkki 1.1.8. *(Jatkoa Esimerkille 1.1.6) Korhosen perheen remonttilainan korkojen maksuerät muodostavat aritmeettisen jonon*

$$\left(100 - (i-1)\frac{5}{3}\right)_{i=1}^{60}.$$

Kuinka paljon Korhoset joutuvat yhteensä maksamaan korkoja? Jonon ensimmäinen termi on $a_1 = 100$ *ja kahden peräkkäisen termin erotus on* $d = -\frac{5}{3}$*. Korkojen maksuerien summa on aritmeettinen summa*

$$S_{60} = 60 \cdot \frac{100 + (100 - 59 \cdot \frac{5}{3})}{2} = 60 \cdot \frac{100 + \frac{5}{3}}{2} = 3000 + 60 \cdot \frac{5}{6} = 3050.$$

Korhoset maksavat siis lainastaan yhteensä 3050 *euroa korkoja.*

1.1.2 Geometrinen lukujono ja summa

Lukujono (a_i) on **geometrinen**, jos peräkkäisten termien suhde, eli osamäärä a_{i+1}/a_i, on sama kaikilla peräkkäisillä termeillä. Silloin on olemassa **suhdeluku** q, jolle

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = q \qquad \text{kaikilla } i = 1, 2, 3, \ldots$$

Huomaa, että geometrisen jonon mikään termi ei voi olla nolla, koska jos $a_i = 0$, niin a_{i+1}/a_i ei ole määritelty: emme voi jakaa nollalla! Koska mikään termi ei ole nolla, niin geometrisen jonon suhdeluvun q on aina oltava erisuuri kuin nolla.

Esimerkki 1.1.9.

(a) *Jono* $1, -10, 100, -1000, 10000, -100000, \ldots$ *on päättymätön geometrinen jono, jonka suhdeluku on* -10*. Jono voidaan kirjoittaa myös muodossa* $1, -10, (-10)^2, (-10)^3, (-10)^4, (-10)^5 \ldots$ *eli* $a_i = (-10)^{i-1}$ *kaikilla* $i = 1, 2, 3, \ldots$

(b) *Jonon* $162, 54, 18, 6, 2, \frac{2}{3}$ *termeille pätee* $54/162 = 18/54 = 6/18 = 2/6 = \frac{2}{3}/2 = \frac{1}{3}$*. Kyseessä on päättyvä geometrinen jono, jonka suhdeluku on* $\frac{1}{3}$*. Tälle jonolle pätee* $a_1 = 162$*,* $a_2 = 54 = 162 \cdot \frac{1}{3}$*,* $a_3 = 18 = 54 \cdot \frac{1}{3} = 162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$*,* $a_4 = 6 = 162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$ *ja niin edelleen, eli* $a_i = 162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}$ *kaikilla* $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Jos geometrisen jonon (a_i) suhdeluku on q, niin ehdosta $a_{i+1}/a_i = q$ (eli $a_{i+1} = a_i q$) saadaan

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 q \\ a_3 &= a_2 q = (a_1 q) q = a_1 q^2 \\ a_4 &= a_3 q = (a_1 q^2) q = a_1 q^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

ja niin edelleen. Geometrisen jonon termi a_i saadaan ensimmäisen termin a_1 ja suhdeluvun q avulla seuraavasti:

$$\boxed{a_i = a_1 q^{i-1}}$$

Esimerkki 1.1.10. *Geometrisen jonon ensimmäinen termi on* 4 *ja suhdeluku* 2.10419. *Mikä on jonon kuudes termi? Se on*

$$a_6 = 4 \cdot (2.10419)^5 \approx 165.$$

Esimerkki 1.1.11. *Isovanhemmat tallettavat kuuden vuoden ajan jokaisen vuoden alussa* 500€ *tilille, jonka vuotuinen nettokorko on* 0.2 % *ja korko liitetään pääomaan aina vuoden lopussa.*
Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa kuuden vuoden ajan, joten siitä kertyvä kasvava pääoma on $1.002^6 \cdot 500$€.
Toisen vuoden talletus kasvaa korkoa viiden vuoden ajan, ja kasvaa $1.002^5 \cdot 500$ *euroon.*
Kolmannen vuoden talletus on kasvamassa korkoa yhteensä neljä vuotta, joten siitä tulee $1.002^4 \cdot 500$ *euroa.*
Ja niin edelleen. Merkitään a_1*:llä viimeistä talletusta, joka kasvaa korkoa vain yhden vuoden ajan eli* $a_1 = 1.002 \cdot 500 = 501$ *ja* a_2*:lla toiseksi viimeistä talletusta, joka kasvaa korkoa kahden vuoden ajan. Ja niin edelleen. Talletukset (käänteisessä aikajärjestyksessä) muodostavat geometrisen jonon* $(a_i)_{i=1}^6$, *jossa* $a_1 = 501$ *ja suhdeluku* $q = 1.002$.

Geometrisen jonon $a_1, a_2, \ldots, a_n$ termien summa

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}$$

on **geometrinen summa**. Jos $q = 1$, niin summa on $S_n = a_1 + a_1 + \cdots + a_1 = n a_1$. Jos $q \neq 1$, niin johdetaan summalle kaava laskemalla ensin $S_n - qS_n$:

Koska

$$\begin{array}{rl} S_n = & a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \\ -qS_n = & \quad -a_1q - a_1q^2 - \cdots - a_1q^{n-2} - a_1q^{n-1} - a_1q^n \\ \hline S_n - qS_n = & a_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - a_1q^n \end{array}$$

saamme yhtälön $S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n$ eli $S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$. Koska $q \neq 1$, niin $1 - q \neq 0$ ja voimme jakaa yhtälön molemmat puolet luvulla $1 - q$. Päädymme laskukaavaan

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.}$$

Esimerkki 1.1.12. *Lasketaan geometrisen jonon* $(\frac{9}{3^i})_{i=1}^{\infty}$ *viiden ensimmäisen termin summa. Ensimmäinen termi on* $a_1 = \frac{9}{3} = 3$ *ja suhdeluku on* $q = \frac{1}{3}$, *joten summaksi* S_5 *saadaan*

$$S_5 = a_1 \frac{1-q^5}{1-q} = 3 \cdot \frac{1-(\frac{1}{3})^5}{1-\frac{1}{3}} = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{243}\right) \cdot \frac{3}{2} = 3 \cdot \frac{242}{243} \cdot \frac{3}{2} = 4\frac{13}{27} \approx 4.48.$$

Esimerkki 1.1.13. *Palataan esimerkkiin 1.1.11. Isovanhemmat tallettivat jokaisen vuoden alussa* 500€ *tilille, jonka vuotuinen nettokorko oli* 0.2 % *ja korko liitettiin pääomaan aina vuoden lopussa. Talletukset (käänteisessä aikajärjestyksessä) muodostivat geometrisen jonon, jossa* $a_i = 1.002^i \cdot 500$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. *Lasketaan, paljonko tilille kertyi rahaa kuudessa vuodessa. Kyseessä on geometrinen summa, jonka ensimmäinen termi on* $a_1 = 500 \cdot 1.002 = 501$ *ja suhdeluku* $q = 1.002$. *Summaksi saadaan siis*

$$S_6 = \sum_{i=1}^{6} 1.002^{i-1} \cdot 501 = 501 \cdot \frac{1-1.002^6}{1-1.002} = 3021.07€.$$

1.2 Korkolaskuja

1.2.1 Kasvanut ja alkuperäinen pääoma

Korko liitetään pääomaan kunkin korkojakson lopussa. Seuraavan jakson aikana myös tämä korko kasvaa korkoa. Opetellaan aluksi määrittämään kasvanut pääoma tapauksessa, jossa alkuperäinen pääoma kasvaa korkoa useita korkojaksoja.

Käytetään merkintöjä

- K_0 = alkuperäinen pääoma

- p = korkokanta eli prosenttiosuus, jonka pääoma kasvaa korkojakson aikana
- K_n = kasvanut pääoma n:n korkojakson kuluttua ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Ensimmäisen korkojakson lopussa pääomaan lisätään korko, jolloin uusi, kasvanut pääoma on

$$K_1 = K_0 + \frac{p}{100}K_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)K_0.$$

Toisen korkojakson jälkeen pääoma on

$$K_2 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)K_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right)K_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 K_0$$

ja niin edelleen. Kasvanut pääoma n:n korkojakson kuluttua on

$$\boxed{K_n = \left(1 + \tfrac{p}{100}\right)^n K_0.}$$

Esimerkki 1.2.1. *Olkoon korkokanta 4.5 % ja alkupääoma* $K_0 = 1000$€*. Sijoitus kasvaa kolmen korkojakson aikana seuraavasti:*

$$K_3 = \left(1 + \frac{4.5}{100}\right)^3 \cdot 1000 = 1.141166\ldots \cdot 1000 \approx 1141.17€.$$

Esimerkki 1.2.2. *Isovanhemmat tallettivat* 5000 *euroa tilille, jonka korkokanta on* 0.2 *%. Korko liitetään pääomaan aina korkojakson lopussa ja korkotulosta peritään* 30 *% lähdeveroa. Kuinka paljon tilillä on säästössä kuuden vuoden kuluttua, kun isovanhemmat eivät tee muita talletuksia tai nostoja ja korko sekä lähdevero pysyvät samoina ja korkojakso on*

(a) *yksi vuosi?*

(b) *yksi kuukausi?*

Koska korkotuotosta menee lähdevero, on nettokorko $(1 - 0.30) \cdot 0.2 = 0.7 \cdot 0.2 = 0.14$ *%.*

(a) *Pääomaan lisätään vuoden kuluttua* $0.0014 \cdot 5000 = 7$ € *ja tilillä on sen jälkeen* 5007 *euroa. Joka vuosi pääoma kasvaa* 1.0014*-kertaiseksi. Kuuden vuoden kuluttua rahaa on* $K_6 = 1.0014^6 \cdot 5000 \approx 5042.15$ *euroa.*

(b) *Korkojaksoja kertyy nyt yhteensä* $12 \cdot 6 = 72$*kpl ja pääoma kasvaa* 1.0014*-kertaiseksi joka kuukausi. Kuuden vuoden jälkeen tallessa on* $K_{72} = 1.0014^{72} \cdot 5000 \approx 5529.89$ €*.*

Kasvanut pääoma n:n korkojakson kuluttua oli $K_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n K_0$, missä K_0 on alkupääoma ja p on korkokanta. Silloin alkupääoma voidaan laskea K_n:n avulla seuraavasti:

$$\boxed{K_0 = \frac{K_n}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}.}$$

Esimerkki 1.2.3. *Isovanhemmat haluavat perustaa vastasyntyneelle lapsenlapselleen tilin, jolla olisi kiinteä korkokanta ja lapsen täytettyä 18 vuotta tilillä olisi* 2000 €*. Pankki ilmoittaa että vuoden korkojaksolla (veroton) korkokanta olisi* 1%*. Paljonko isovanhempien on laitettava tilille, kun täysiä korkojaksoja ehtii tulla* 18 *kpl ennen lapsenlapsen 18-vuotissyntymäpäivää? Vastaus on*

$$K_0 = \frac{K_{18}}{(1+\frac{p}{100})^{18}} = \frac{2000}{\left(1+\frac{1}{100}\right)^{18}} = \frac{2000}{1.01^{18}} \approx 1672.04€.$$

Yllä olevan esimerkin laskun voi tulkita myös näin: Oletetaan, että korkokanta on koko ajan 1 % vuodessa. Tällöin se, mikä on 18 vuoden kuluttua 2000 euron arvoinen, on tämän päivän rahassa vain 1672.04 euron arvoinen. Toisin sanoen, sen *nykyarvo* on 1672.04 euroa.

Esimerkki 1.2.4 (Maksuvaihtoehtojen vertailu)**.** *Yritys on saanut uuden kiinteistön hankintaan kaksi maksuvaihtoehtoa:*

(a) *580 000 euroa kaupantekohetkellä tai*

(b) *230 000 euroa kaupantekohetkellä, 150 000 euroa vuoden kuluttua ja 210 000 euroa kahden vuoden kuluttua.*

Kumpi vaihtoehto on edullisempi, kun vertailussa käytetään 8.5%*:n vuotuista korkokantaa?*

Lasketaan, paljonko yrityksen riittäisi sijoittaa rahaa 8.5% *tuottavalle tilille kaupantekohetkellä, jotta vuoden päästä olisi käytössä 150 000 euroa ja kahden vuoden päästä 210 000 euroa.*

$$K_0 = \frac{150000}{1.085} \approx 138248.85 \quad \textit{plus} \quad K_0 = \frac{210000}{1.085^2} \approx 178385.61.$$

Vaihtoehdon (*b*) *arvo kaupantekohetkellä on*

$$230000 + \frac{150000}{1.085} + \frac{210000}{1.085^2} \approx 546634.46.$$

Vaihtoehto (*b*) *on siis edullisempi.*

1.2.2 Jaksolliset suoritukset

Keskenään yhtä suuria ja tasaisin väliajoin tapahtuvia maksuja sanotaan *jaksollisiksi suorituksiksi.*

Jaksollisten suoritusten *yhteinen loppuarvo* tarkoittaa suoritusten yhteisarvoa korkoineen viimeisen suorituksen tapahtumahetkellä. Yhteisen loppuarvon laskemista sanotaan *korkouttamiseksi.*

Esimerkki 1.2.5. *Esimerkeissä 1.1.11 ja 1.1.13 isovanhemmat tallettavat kuuden vuoden ajan jokaisen vuoden alussa 500 € tilille, jonka korkokanta on* 0.2 *% vuodessa. Suoritusten yhteinen loppuarvo laskettiin esimerkissä 1.1.13 ja se oli*

$$\sum_{i=1}^{6} 1.002^{i-1} \cdot 501 = 501 \cdot \frac{1 - 1.002^6}{1 - 1.002} = 3021.07€.$$

Entä jos isovanhemmat olisivat tehneet talletukset aina vuoden lopussa? Silloin ensimmäinen talletus olisi kasvanut korkoa vain viiden vuoden ajan, toinen neljän vuoden ajan ja niin edelleen. Viimeinen, kuudes talletus ei olisi ehtinyt kasvaa korkoa lainkaan. Suoritukset (käänteisessä aikajärjestyksessä) muodostaisivat geometrisen jonon

$$500,\ 500 \cdot 1.002,\ 500 \cdot 1.002^2,\ 500 \cdot 1.002^3,\ 500 \cdot 1.002^4,\ 500 \cdot 1.002^5,$$

jonka summa on

$$\sum_{i=1}^{6} 1.002^{i-1} \cdot 500 = 500 \cdot \frac{1 - 1.002^6}{1 - 1.002} = 3015.04€.$$

Jaksollisia suorituksia voi tehdä myös korkojakson aikana, esimerkiksi kuukausittain vaikka korkojakso olisikin vuosi. Tällöin korkojakson aikana tehty suoritus kasvaa korkoa kyseisen korkojakson loppuun *yksinkertaisen korkolaskun* mukaan.

Jos korkokanta on p% korkojaksossa ja A€ suoritus tehdään kun korkojaksoa on jäljellä $\frac{1}{a} \cdot$ (korkojakson pituus), missä $a \geq 1$, niin korkojakson loppuun korkoa kertyy

$$A \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{p}{100}.$$

Esimerkki 1.2.6. *Jos aloitat säästämisen tänä vuonna, ja talletat jokaisen kuukauden lopussa* 100€ *tilille jonka korkokanta on* 5% *vuodessa, niin vuoden loppuun mennessä ensimmäinen talletus on kasvanut korkoa* $100 \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{5}{100}$€*,* *toinen talletus* $100 \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{5}{100}$€*, ja niin edelleen. Yhteensä korkoa kertyy siis*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{12} 100 \cdot \frac{i-1}{12} \cdot \frac{5}{100} &= 100 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{12}(i-1)}{12} \cdot \frac{5}{100} \\ &= 100 \cdot \frac{12 \cdot \frac{0+11}{2}}{12} \cdot \frac{5}{100} \\ &= 100 \cdot \frac{66}{12} \cdot \frac{5}{100} \\ &= 27.5\text{€}.\end{aligned}$$

Tällöin talletuksiesi yhteinen loppuarvo, tässä tapauksessa arvo vuoden 2017 lopussa, on $12 \cdot 100 + 27.5 = 1227.5$€.

Esimerkki 1.2.7. *Autosäästäjä talletti maalis-, kesä-, syys- ja joulukuun lopussa* 600 € *tilille, jonka korkokanta oli* 1.1 % *ja korkojakso yksi vuosi. Korko liitettiin pääomaan aina vuoden lopussa ja samalla siitä perittiin lähdeveroa 30 %. Lasketaan, paljonko rahaa oli säästössä kuudennen vuoden lopussa.*

Tilin nettokorkokanta oli $\left(1 - \frac{30}{100}\right) \cdot 1.1 = 0.77$ *% / vuosi ja korko laskettiin kalenterikuukauden alimman saldon mukaan.*

Tarkastellaan ensin yhden vuoden talletuksia. Ensimmäinen erä kasvaa korkoa 9 kk, toinen erä 6kk, kolmas 3kk ja viimeinen 0 kk. Korkokuukausia kertyy yhteensä $9 + 6 + 3 = 18$ *kk, joten vuoden talletuksille tulee korkoa yksinkertaisella korkolaskulla yhteensä*

$$18 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{0.77}{100} \cdot 600 = 6.93\text{€}.$$

Vuoden aikana tehdyistä talletuksista kertyy korkoineen siis $4 \cdot 600 + 6.93 = 2406.93$€.

Ensimmäisen vuoden talletukset kasvavat lisäksi korkoa viiden vuoden ajan, eli siitä kertyy

$$\left(1 + \frac{0.77}{100}\right)^5 \cdot 2406.93\text{€}.$$

Toisen vuoden talletukset kasvavat korkoa lisäksi neljän vuoden ajan, joten saadaan

$$\left(1 + \frac{0.77}{100}\right)^4 \cdot 2406.93\text{€}.$$

Ja niin edelleen $\vdots$

$$\left(1 + \frac{0.77}{100}\right)^0 \cdot 2406.93\text{€}.$$

Vuosittaiset kasvaneet pääomat (käänteisessä järjestyksessä) muodostavat geometrisen jonon, jonka ensimmäinen termi on $a_1 = 2406.93$, suhdeluku $q = \left(1 + \frac{0.77}{100}\right) = 1.0077$ ja $n = 6$. Suoritusten yhteinen loppuarvo saadaan geometrisena summana

$$\sum_{i=1}^{6} 2406.93 \left(1 + \frac{0.77}{100}\right)^{i-1} = 2406.93 \cdot \frac{1 - 1.0077^6}{1 - 1.0077} \approx 14722.45€.$$

Jaksollisten suoritusten *yhteinen alkuarvo* tarkoittaa summaa, jonka tallettaminen alkuhetkellä olisi samanarvoinen jaksollisten suoritusten loppuarvon kanssa. Eli kuinka suuri kertatalletus olisi tehtävä alkuhetkellä, jotta siitä kertyisi korkoineen yhtä paljon kuin mitä kyseisistä jaksollisista suorituksista saadaan.

Yhteinen alkuarvo lasketaan *diskonttaamalla* jaksollisten suoritusten yhteinen loppuarvo. Diskonttaaminen tarkoittaa, että lasketaan kuinka paljon täytyy sijoittaa alkuhetkellä, jotta päädytään kyseiseen loppuarvoon. Tässä voidaan käyttää alkuperäisen pääoman K_0 laskentakaavaa.

Esimerkki 1.2.8. *(Jatkoa Esimerkkeihin 1.2.6 ja 1.2.7)*

- *Talletuksiesi yhteinen loppuarvo oli* 1227.5€*. Yhteinen alkuarvo vastaa seuraavaan kysymykseen: Paljonko tulisi tallettaa vuoden 2017 alussa tilille, jonka korkokanta on* 5% *vuodessa, jotta sinulla olisi vuoden lopussa* 1227.5€*? Siis yhteinen alkuarvo on*

$$\frac{1227.5}{1 + \frac{5}{100}} \approx 1169.05€.$$

- *Autosäästäjän jaksollisten suoritusten yhteinen loppuarvo oli* $2406.93 \cdot \frac{1-1.0077^6}{1-1.0077}$*. Käytettäessä vertailukorkona* 0.77% *vuodessa, on jaksollisten suoritusten yhteinen alkuarvo*

$$2406.93 \cdot \frac{1 - 1.0077^6}{1 - 1.0077} \cdot \frac{1}{1.0077^6} \approx 14060.23€$$

Huomautus 1.1. *Esimerkissä 1.2.7 autosäästäjä tekee* 600€*:n suorituksen neljästi vuodessa kuuden vuoden ajan, eli suoritusten summa on* $600 \cdot 4 \cdot 6 = 14400$€*. Huomataan, että*

$$14060.23 \leq 14400 \leq 14722.45.$$

Tällä kurssilla emme käytä negatiivista korkoa. Tällöin jaksollisille suorituksille pätee aina

$$\textit{yhteinen alkuarvo} \leq \textit{suoritusten summa} \leq \textit{yhteinen loppuarvo}.$$

Esimerkki 1.2.9. *Yritys on sopinut maksavansa ICT-palvelusta* 2000 €*vuodessa neljän vuoden sopimuskauden ajan. Ensimmäinen maksu suoritetaan kaupantekohetkellä ja seuraavat aina vuoden välein. Lasketaan ostetun palvelun tämänhetkinen käteisarvo, kun vertailukorkona käytetään* 4.5 %*:ia vuodessa.*

Näiden neljän jaksollisen suorituksen yhteinen loppuarvo on viimeisen suorituksen tekohetkellä

$$1.045^3 \cdot 2000 + 1.045^2 \cdot 2000 + 1.045^1 \cdot 2000 + 2000 = 2000 \cdot \frac{1 - 1.045^4}{1 - 1.045} \approx 8556.38.$$

Diskontataan tämä summa kaupantekohetkeen. Viimeinen suoritus tehdään kolmen vuoden päästä kaupantekohetkestä, joten lasketaan, paljonko olisi sijoitettava tänään, jotta kolmessa vuodessa päästään 8556.38 *euroon koron ollessa* 4.5 %*/vuosi.*

$$K_0 = \frac{8556.38}{1.045^3} \approx 7497.93€.$$

Sopimuksen hinta kaupantekohetkellä on siis 7497.93 €*.*

(Yhteisen alkuarvon voi laskea myös selvittämällä jokaisen suorituksen nykyhinnan erikseen ja laskemalla nämä yhteen kuten esimerkissä 1.2.4.)

1.2.3 Tasaerälaina

Tasaerälainassa kaikki takaisinmaksuerät ovat yhtä suuria. Kukin tasaerä sisältää koron jäljellä olevasta lainasta ja loppu erästä on lainan lyhennystä. Lainapääoman vähenemisen myötä koron osuus tasaerässä pienenee ja lyhennyksen osuus kasvaa.

Käytetään seuraavia merkintöjä:

- N = lainan määrä
- p = korkokanta
- n = takaisinmaksuerien lukumäärä
- m = takaisinmaksuerien lukumäärä korkojakson aikana
- A = tasaerä, yksittäisen takaisinmaksuerän suuruus

Kun $m = 1$ ja korkojakso on yksi vuosi, niin tasaerää kutsutaan *annuiteetiksi* ja tasaerälainaa *annuiteettilainaksi*. Tarkastellaan ensin tätä yksinkertaisempaa tapausta ja selvitetään paljonko on A, kun muut arvot ovat tiedossa.

Ensimmäinen erä maksetaan ensimmäisen vuoden lopussa, ja ensimmäisen vuoden korko on jo liitetty pääomaan. Ensimmäisen erän jälkeen lainaa on siis jäljellä $N \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - A$. Tämä summa jää nyt kasvamaan korkoa vuodeksi ja toisen erän jälkeen lainaa on jäljellä

$$\left[N \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - A\right] \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - A = N \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 - A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - A.$$

Kolmannen erän maksun jälkeen lainaa on jäljellä

$$\begin{aligned}&\left[N \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 - A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - A\right] \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - A \\ &= N \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 - A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 - A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - A,\end{aligned}$$

ja niin edelleen, kunnes viimeisen, n:nnen, erän jälkeen on jäljellä

$$\begin{aligned}&N \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1} - A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-2} - \\ &\qquad \cdots - A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 - A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - A \\ &= N \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - \sum_{i=1}^{n} A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{i-1} \\ &= N \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - A \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}{1 - \left(1 + \frac{p}{100}\right)},\end{aligned}$$

missä käytimme geometrisen summan laskukaavaa viimeisen yhtäsuuruuden saamiseksi. Toisaalta tiedämme, että viimeisen erän jälkeen maksettavaa on oltava jäljellä nolla euroa, joten voimme asettaa

$$N \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - A \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}{1 - \left(1 + \frac{p}{100}\right)} = 0$$

ja ratkaista yhtälöstä A:n. Saamme yhtälön

$$\begin{aligned}A &= \frac{N \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}{\frac{1 - \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}{1 - \left(1 + \frac{p}{100}\right)}} = \frac{N \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \left(1 - \left(1 + \frac{p}{100}\right)\right)}{1 - \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n} = \frac{N \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \left(-\frac{p}{100}\right)}{1 - \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n} \\ &= N \cdot \frac{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \cdot \frac{p}{100}}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1}.\end{aligned}$$

Siis

$$\boxed{A = N \cdot \frac{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \cdot \frac{p}{100}}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1}}$$

Esimerkki 1.2.10. *Isovanhemmat ottivat nuoruudessaan 300 000 markan annuiteettilainan asuntoaan varten kiinteällä 6 %:n vuotuisella korolla laina-ajan ollessa 15 vuotta. Lasketaan kuinka suuret vuotuiset maksuerät olivat. Nythän* $N = 300000$, $p = 6$, $n = 15$, *jolloin*

$$
\begin{aligned}
A &= N \cdot \frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n \cdot \frac{p}{100}}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1} = 300000 \cdot \frac{\left(1+\frac{6}{100}\right)^{15} \cdot \frac{6}{100}}{\left(1+\frac{6}{100}\right)^{15} - 1} \\
&= 300000 \cdot \frac{1.06^{15} \cdot 0.06}{1.06^{15} - 1} \approx 30888.83 \textit{ mk.}
\end{aligned}
$$

Kun lainaa halutaan maksaa m kertaa korkojakson aikana, tulee (yksinkertaisen korkolaskun mukaan) maksujakson korkokannaksi p/m. Silloin tasaerät voidaan laskea kaavasta

$$
\boxed{A = N \cdot \frac{\left(1+\frac{p}{100\cdot m}\right)^n \cdot \frac{p}{100\cdot m}}{\left(1+\frac{p}{100\cdot m}\right)^n - 1}}
$$

Esimerkki 1.2.11. *Lasketaan, kuinka suuret maksuerät isovanhempien asuntolainalla olisi ollut, jos he olisivat lyhentäneet tasaerälainaansa*

(a) *neljännesvuosittain*

(b) *kuukausittain.*

Tapauksessa (a) on $m = 4$ *ja* $n = 4 \cdot 15 = 60$. *Silloin*

$$
\begin{aligned}
A &= N \cdot \frac{\left(1+\frac{p}{100\cdot m}\right)^n \cdot \frac{p}{100\cdot m}}{\left(1+\frac{p}{100\cdot m}\right)^n - 1} = 300000 \cdot \frac{\left(1+\frac{6}{100\cdot 4}\right)^{60} \cdot \frac{6}{100\cdot 4}}{\left(1+\frac{6}{100\cdot 4}\right)^{60} - 1} \\
&= 300000 \cdot \frac{1.015^{60} \cdot 0.015}{1.015^{60} - 1} \approx 7618.03 \textit{ mk.}
\end{aligned}
$$

(b): Kun lainaa lyhennetään kuukausittain, on $m = 12$ *ja* $n = 12 \cdot 15 = 180$. *Kuukausieräksi saadaan*

$$
\begin{aligned}
A &= 300000 \cdot \frac{\left(1+\frac{6}{100\cdot 12}\right)^{180} \cdot \frac{6}{100\cdot 12}}{\left(1+\frac{6}{100\cdot 12}\right)^{180} - 1} \\
&= 300000 \cdot \frac{1.005^{180} \cdot 0.005}{1.005^{180} - 1} \approx 2531.57 \textit{ mk.}
\end{aligned}
$$

1.3 Lineaarinen optimointi

Talouselämässä pyritään usein maksimoimaan tuottoa, hyötyä tai voittoa sekä minimoimaan kustannuksia ja haittoja käytettävissä olevien resurssien puitteissa. Lineaarinen optimointi on matemaattinen menetelmä, jonka avulla etsitään lineaarisen tavoitefunktion suurinta tai pienintä arvoa tiettyjen rajoitteiden ollessa voimassa. Lineaarisen optimointiongelman tavoitefunktio voi esittää esimerkiksi minimoitavia tuotantokustannuksia tai maksimoitavaa myyntivoittoa.

Tarkastelemme esimerkkejä.

1.3.1 Lineaarisen optimointiongelman matemaattinen malli

Esimerkki 1.3.1. *Pikkutehdas valmistaa tuotteita A ja B. Tuotteen A valmistuskustannukset ovat 100€ ja tuotteen B 300€ ja molemmat tuotteet menevät kaupaksi 500 euron hinnalla. Tuotteiden valmistukseen kuluu aikaa 5 ja 4 tuntia. Tehtaassa on yksi linjasto, jossa voidaan valmistaa tuotteita A ja B, mutta tuotteen A valmistamiseen voi saada materiaalia vain 4 tuotteen valmistamiseen. Kuinka paljon mitäkin tuotetta kannattaa viikon aikana valmistaa, kun tehdas pyörii viikossa 40 tuntia?*

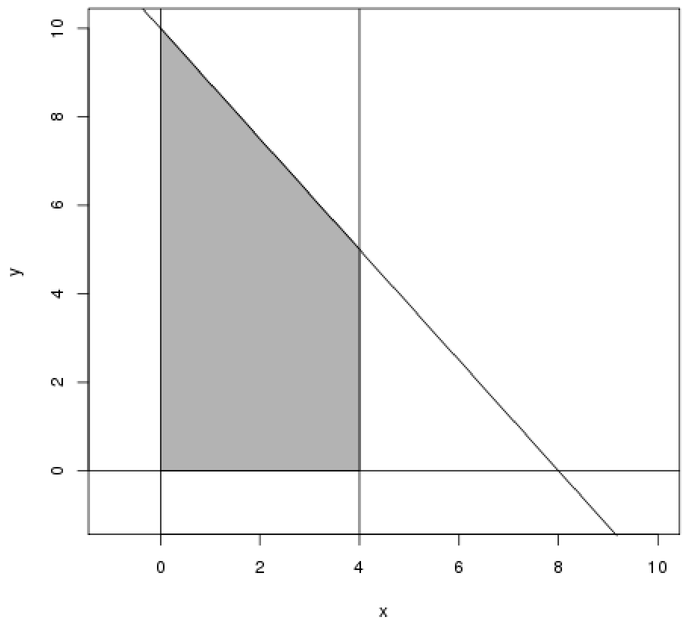
Merkitään x = tuotteen A lkm ja y = tuotteen B lkm.
Halutaan maksimoida tuotto, joka on: $(500-100)\cdot x+(500-300)\cdot y = 400x+200y$.
Aikarajoitus: $5x+4y\leq 40$
Materiaalirajoitus: $x\leq 4$
Lisäksi $x\geq 0$ ja $y\geq 0$, koska lukumäärä ei voi olla negatiivinen luku. Aikarajoitus voidaan muokata seuraavasti:

$$5x+4y\leq 40 \Leftrightarrow 4y\leq 40-5x \Leftrightarrow y\leq 10-\frac{5}{4}x.$$

Rajoittavat ehdot

$$\begin{cases} y\leq 10-\frac{5}{4}x \\ 0\leq x\leq 4 \\ y\geq 0. \end{cases}$$

rajaavat xy-tasosta alueen, jolta optimaaliset määrät x ja y on löydettävä.



1.3.2 Lineaarisen optimointiongelman ratkaisu

Kun rajoitealue on monikulmio, ratkaisu on monikulmion kärkipisteessä tai kaksi kärkeä yhdistävällä janalla.

Kun kaikki rajoitemonikulmion kärjet on ratkaistu, lasketaan tavoitefunktion arvo kussakin niistä. Arvoista etsitään suurin tai pienin ongelmasta riippuen.

Esimerkki 1.3.2. *Halutaan selvittää, mikä on suurin arvo, jonka tavoitefunktio* $400x + 200y$ *voi saada, kun rajoituksina on ehdot*

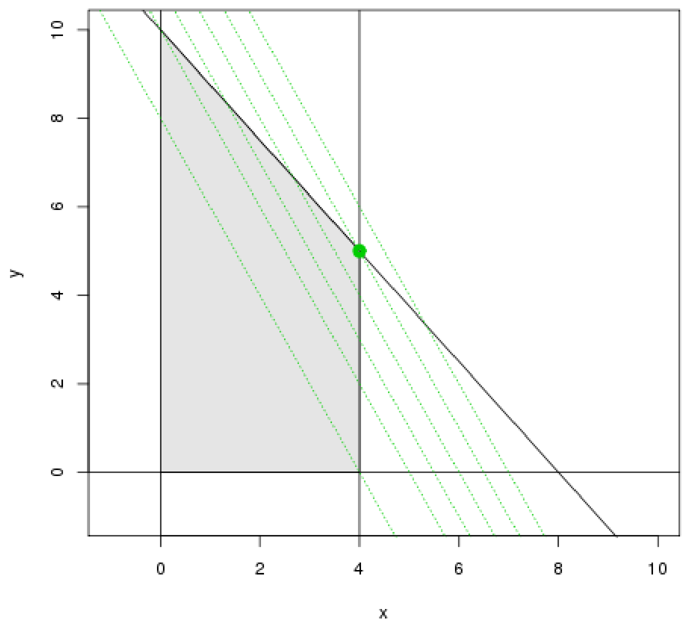
$$\begin{cases} y \leq 10 - \frac{5}{4}x \\ 0 \leq x \leq 4 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Merkitään $z = 400x + 200y$. *Silloin*

$$z = 400x + 200y \Leftrightarrow 200y = z - 400x \Leftrightarrow y = \frac{z}{200} - 2x.$$

Yritetään löytää mahdollisimman suuri arvo z*, jolle suora* $y = \frac{z}{200} - 2x$ *leikkaa rajoitusaluetta. Kokeilemalla erilaisia* z*:n arvoja voimme ratkaista tehtävän graafisesti. Kokeillaan* $z = 1600$, $z = 2000$, $z = 2200$, $z = 2400$,

$z = 2600$ ja $z = 2800$ eli suorat $y = 8 - 2x$, $y = 10 - 2x$, $y = 11 - 2x$, $y = 12 - 2x$, $y = 13 - 2x$ ja $y = 14 - 2x$.



Kuvan avulla nähdään, että $z = 2600$ on suurin arvo, jolla suora vielä leikkaa rajoitusaluetta.

Ongelman voi ratkaista myös laskemalla. Suurin arvo saadaan joillakin sellaisilla x:n ja y:n arvoilla, jotka ovat rajoittavien ehtojen reunasuorien leikkauspisteissä, eli suorien $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$ ja $y = 10 - \frac{5}{4}x$ leikkauspisteissä (tai joskus viereisten leikkauspisteiden välisellä janalla). Suorien leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla lineaariset yhtälöryhmät

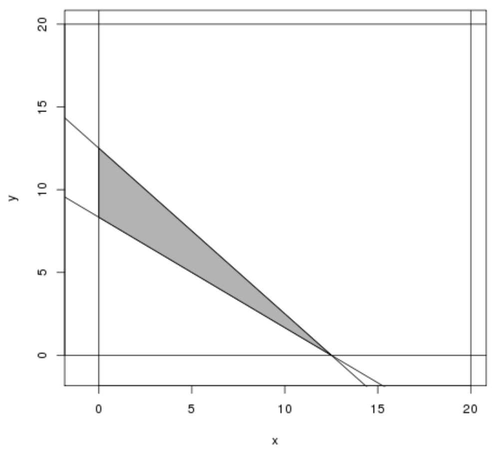
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 10 - \dfrac{5}{4}x \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \quad \textit{ja} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 10 - \dfrac{5}{4}x \end{cases}.$$

Leikkauspisteet ovat $(0,0), (0,10), (4,0)$ ja $(4,5)$. Lasketaan tuotto noilla arvoilla:
$(0,0):\ 400 \cdot 0 + 200 \cdot 0 = 0$
$(0,10):\ 400 \cdot 0 + 200 \cdot 10 = 2000$
$(4,0):\ 400 \cdot 4 + 200 \cdot 0 = 1600$
$(4,5):\ 400 \cdot 4 + 200 \cdot 5 = 2600$
Suurin tuotto saadaan arvoilla $x = 4$ ja $y = 5$, ja silloin $z = 400x + 200y = 2600$.

Esimerkki 1.3.3. *Yritys haluaa minimoida ICT-palveluista koituvat kustannukset. Jos palvelut ostetaan ICT-palveluita tarjoavalta yritykseltä, niin palveluneuvontaan tarvitaan* 20 *työtuntia viikossa ja se maksaa* 70 *€/ tunti, kun taas järjestelmien ylläpitoon ja kehittämiseen kuluu* 20 *työtuntia viikossa ja se maksaa* 105 *€/ tunti. Yrityksen oma ICT-työntekijä työskentelee 37,5 tuntia viikossa ja häneltä menee järjestelmätehtävien hoitamiseen* 1, 5 *kertaa niin paljon aikaa kuin ulkoiselta palveluntarjoajalta. Kuinka paljon yrityksen kannattaa ostaa järjestelmätehtäviä ulkopuoliselta palveluntarjoajalta?*

Merkitään x = *ostettu palveluneuvonta tunteina ja* y = *ostetut järjestelmätehtävät tunteina. Halutaan minimoida ostopalvelun kustannukset eli löytää pari* (x, y)*, joka toteuttaa reunaehdot ja joille* $70x + 105y$ *olisi mahdollisimman pieni. Oma työntekijä joutuu käyttämään järjestelmätehtäviin vähintään* $(20 - y) \cdot 1,5 = 30 - 1,5y$ *tuntia, jolloin hänellä jää palveluneuvontaan korkeintaan* $37,5 - (30 - 1,5y) = 7,5 + 1,5y$ *tuntia. Paveluneuvontaa joudutaan siis ostamaan vähintään* $20 - (7,5 + 1,5y) = 12,5 - 1,5y$ *tuntia. Yhteensä ICT-palveluluja ei tarvitse ostaa enempää kuin mitä omalta työntekijältä enimmillään jää jäljelle, eli* $x + y \leq 20 + 30 - 37,5 = 12,5$*. Reunaehdot ovat*

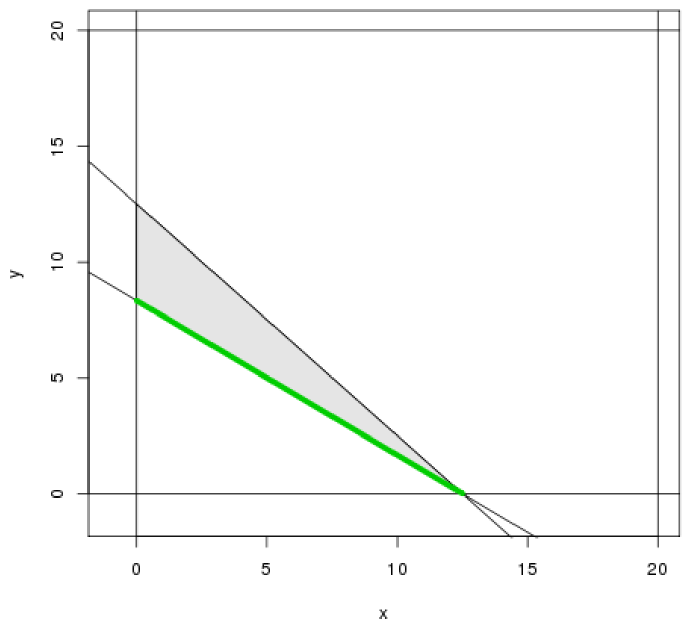
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 20 \\ x \geq 12,5 - 1,5y \\ x + y \leq 12,5. \end{cases}$$



Rajoitusalueen rajaavien suorien leikkauspisteet ovat $(0, 25/3), (25/2, 0)$ *ja* $(0, 25/2)$*. Lasketaan ostopalvelun kustannus* $70x + 105y$ *näissä pisteissä:*
$(0, 25/3):\ 70 \cdot 0 + 105 \cdot 25/3 = 875$
$(25/2, 0):\ 70 \cdot 25/2 + 105 \cdot 0 = 875$

$(0, 25/2):\ 70 \cdot 0 + 105 \cdot 25/2 = 1312,50$

Palvelu on edullisimmillaan pisteissä $(0, 25/3)$ *ja* $(25/2, 0)$ *ja siten myös kaikissa pisteissä näiden välisellä janalla. Siis yrityksen on yhtä kannattavaa ostaa järjestelmäpalveluja mikä tahansa määrä väliltä* $0 - 25/3$ *tuntia.*



Edellisissä optimointiongelmissa oli vain kaksi muuttujaa x ja y. Kun muuttujia on enemmän, niin lineaaristen yhtälöryhmien ratkaiseminen on työläämpää. On kehitetty menetelmiä, jotka helpottavat ratkaisua: tarvitsemme lineaarialgebraa.

2 Lineaarialgebraa

2.1 Matriisit

Matriisi on riveistä ja sarakkeista koostuva lukukaavio. Esimerkiksi

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

on matriisi, jossa on kaksi riviä ja kolme saraketta eli 2×3-*matriisi*. Sen ensimmäinen rivi on vektori $(-1, 3, -5)$ ja toinen rivi on vektori $(2, -4, 6)$. Näitä vektoreita kutsutaan *rivivektoreiksi*. Sen ensimmäinen sarake on vektori $(-1, 2)$, toinen sarake on vektori $(3, -4)$ ja kolmas sarake $(-5, 6)$. Näitä kutsutaan *sarakevektoreiksi*. Luvut $-1, 2, 3, -4, -5$ ja 6 ovat matriisin *alkioita*.

Matriisi A, jossa on m riviä ja n saraketta, on kaavio

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

jonka alkiot a_{ij} ovat reaalilukuja kaikilla $i = 1, 2, \ldots, m$ ja $j = 1, 2, \ldots, n$. Alkion alaindekseistä ij ensimmäinen indeksi (i) kertoo mille riville alkio kuuluu matriisissa ja jälkimmäinen (j) kertoo sarakkeen. Sanomme, että matriisin A *dimensio* eli *tyyppi* on $m \times n$. Lyhyesti sanottuna A on $m \times n$-matriisi. Käytämme myös lyhennettyä merkintää

$$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n},$$

josta käy siis ilmi, että matriisissa A on m riviä ja n saraketta, indeksi i saa arvot $1, 2, \ldots, m$ ja indeksi j saa arvot $1, 2, \ldots, n$.

Rivimatriisi on matriisi, jossa on vain yksi rivi eli joka on $1 \times n$-matriisi $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$. *Sarakematriisi* taas on $m \times 1$-matriisi eli siinä on vain yksi sarake: $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$.

Esimerkki 2.1.1.

(a) *Matriisissa* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ *on kaksi riviä ja kolme saraketta eli se on* 2×3*-matriisi. Ensimmäinen rivi on* $1, 2, 3$ *ja toinen rivi* $2, 4, 0$*. Sen ensimmäinen sarake on* $1, 2$*, toinen sarake* $2, 4$ *ja kolmas* $3, 0$*.*

(b) *Olkoon matriisin* B *dimensio* 4×3 *ja* $b_{ij} = i - j$ *kaikilla* $i = 1, \dots, 4$ *ja* $j = 1, \dots, 3$*. Silloin matriisille* $B = \big[b_{ij}\big]_{m \times n}$ *pätee*

$$B = \begin{bmatrix} 1-1 & 1-2 & 1-3 \\ 2-1 & 2-2 & 2-3 \\ 3-1 & 3-2 & 3-3 \\ 4-1 & 4-2 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) *Olkoon* $m = n = 3$ *ja* $C = \big[c_{ij}\big]_{m \times n}$*, missä*

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Silloin

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) *Matriisi* $D = [(-1)^{i+j}]_{3 \times 3}$ *on*

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(e) $E = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$ *on rivimatriisi.*

(f) $F = \begin{bmatrix} 1023 \\ 23001 \\ 5 \end{bmatrix}$ *on sarakematriisi.*

2.1.1 Neliömatriisi, diagonaalimatriisi ja yksikkömatriisi

Matriisi $A = \big[a_{ij}\big]_{m \times n}$ on *neliömatriisi*, jos $m = n$ eli siinä on yhtä monta riviä ja saraketta. Neliömatriisin *päälävistäjä* eli *diagonaali* koostuu alkioista $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 2.1.2. *Matriisi*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

on 4×4*-neliömatriisi ja sen diagonaali on* $0, 2, 0, 2$.

Matriisi $A = \big[a_{ij}\big]_{m\times n}$ on *diagonaalimatriisi*, jos se on neliömatriisi ja kaikki sen päälävistäjän ulkopuoliset alkiot ovat nollia:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}.$$

Yksikkömatriisi I on diagonaalimatriisi, jonka päälävistäjän alkiot ovat ykkösiä:

$$I = I_m = I_{m\times m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 2.1.3. *Matriisi*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on diagonaalimatriisi, mutta ei yksikkömatriisi.

2.1.2 Peruslaskutoimituksia matriiseilla

Yhteen- ja vähennyslasku

Matriiseille A ja B voidaan laskea summa $A + B$ ja erotus $A - B$, jos niillä on sama dimensio eli yhtä monta riviä ja yhtä monta saraketta. Kun $A = \big[a_{ij}\big]_{m\times n}$ ja $B = \big[b_{ij}\big]_{m\times n}$, niin niiden summa on $m \times n$-matriisi

$$A + B = \big[a_{ij} + b_{ij}\big]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

ja erotus on $m \times n$-matriisi

$$A - B = \left[a_{ij} - b_{ij}\right]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 2.1.4.

(a)

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \\ 3 & 7 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+5 & -1+(-1) \\ 1+4 & 0+2 \\ 2+3 & 1+7 \\ 3+2 & 2+(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 5 & 2 \\ 5 & 8 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0-5 & -1-(-1) & -2-(-2) \\ 1-4 & 0-2 & -1-(-1) \\ 2-3 & 1-7 & 0-0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ -1 & -6 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matriisien yhteenlaskulle on voimassa vaihdanta- ja liitäntälait:

- $A + B = B + A$
- $A + B + C = A + (B + C) = (A + B) + C$

Reaaliluvulla kertominen

Matriisi voidaan kertoa reaaliluvulla, jolloin jokainen matriisin alkio kerrotaan kyseisellä luvulla: Olkoon r reaaliluku ja $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ matriisi. Silloin

$$rA = \left[ra_{ij}\right]_{m\times n} = \begin{bmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \cdots & ra_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \cdots & ra_{mn} \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 2.1.5.

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) & 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 3 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 0 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Yhteen- ja vähennyslaskun sekä reaaliluvulla kertomisen säännöistä voidaan johtaa kaava $A - B = A + (-1) \cdot B$.

Esimerkki 2.1.6. *Olkoon*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lasketaan $A + B - 2A$.

$$\begin{aligned} A + B - 2A &\underbrace{=}_{\textit{liitäntälaki}} (A + B) + (-2) \cdot A \underbrace{=}_{\textit{vaihdantalaki}} (-2) \cdot A + (A + B) \\ &\underbrace{=}_{\textit{liitäntälaki}} ((-2) \cdot A + A) + B = (-1) \cdot A + B \underbrace{=}_{\textit{vaihdantalaki}} B - A \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matriisien kertolasku

Kaksi matriisia voidaan kertoa keskenään, jos ensimmäisessä matriisissa on yhtä monta saraketta kuin jälkimmäisessä on rivejä. Siis matriiseille A ja B voidaan laskea tulo AB, jos

$$A = \big[a_{ij}\big]_{m \times p} \quad \text{ja} \quad B = \big[b_{ij}\big]_{p \times n}$$

joillakin luvuilla n, p ja m. Matriisi AB on silloin $m \times n$-matriisi. Siis

$$\underbrace{A}_{m \times p} \underbrace{B}_{p \times n} = \underbrace{AB}_{m \times n}.$$

Merkitään $AB = C = \big[c_{ij}\big]_{m \times n}$. Matriisin $C = AB$ alkio c_{ij} saadaan laskemalla matriisin A i:nnen rivin $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ip})$ ja matriisin B j:nnen sarakkeen $(b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{pj})$ alkoiden tulot yhteen seuraavasti:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

Alkio c_{ij} on matriisin A i:nnen rivivektorin ja matriisin B j:nnen sarakevektorin *sisätulo* eli *pistetulo* eli *skalaaritulo*.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \quad \& \quad \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} \quad \to \quad c_{ij}$$

Esimerkki 2.1.7.

(a)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0\cdot 4 + 1\cdot 7 & 0\cdot 5 + 1\cdot 8 & 0\cdot 6 + 1\cdot 9 \\ 2\cdot 4 + 3\cdot 7 & 2\cdot 5 + 3\cdot 8 & 2\cdot 6 + 3\cdot 9 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 29 & 34 & 39 \end{bmatrix}}_{2\times 3}$$

(b)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_{1\times 4} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 8 & 9 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}}_{4\times 2}$$

$$= \begin{bmatrix} 0\cdot 4 + 1\cdot 6 + 2\cdot 8 + 3\cdot 10 & 0\cdot 5 + 1\cdot 7 + 2\cdot 9 + 3\cdot 11 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 52 & 58 \end{bmatrix}}_{1\times 2}$$

Matriisien yhteen- ja vähennyslasku, sekä reaaliluvulla kertominen, tehdään alkioittain. Tämän vuoksi näissä matriisien laskutoimituksissa pätevät samat laskusäännöt kuin vastaavissa laskuissa reaaliluvuilla. Matriisien kertolasku on erilainen laskutoimitus: erityisesti se **ei ole vaihdannainen** sillä vaikka voisimme laskea tulon AB, niin voi olla että tuloa BA ei voi edes laskea. Vaikka A ja B olisivat neliömatriiseja, on olemassa esimerkkejä joilla

$$AB \neq BA.$$

Seuraavat laskusäännöt kuitenkin pätevät: Olkoon A $m\times p$-matriisi, B $p\times n$-matriisi, ja C $n\times q$-matriisi. Tällöin

- $ABC = (AB)C = A(BC)$
- $rAB = r(AB) = (rA)B = A(rB)$
- $I_{m\times m}A = A = AI_{p\times p}$, missä $I_{m\times m}$ ja $I_{p\times p}$ ovat yksikkömatriiseja.

Kun A ja B ovat $m \times p$-matriiseja ja C $p \times n$-matriisi, pätee

- $(A + B)C = AC + BC$.

Kun A on $m \times p$-matriisi, ja B ja C ovat $p \times n$-matriiseja, pätee

- $A(B + C) = AB + AC$.

2.1.3 Transpoosi

Matriisin $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ *transpoosi* on matriisi $A^{\mathsf{T}} = \left[a_{ji}\right]_{n\times m}$. Transpoosin rivit ovat matriisin A sarakkeita ja sarakkeet ovat matriisin A rivejä.

Esimerkki 2.1.8.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad \textit{ja} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Matriisi A on *symmetrinen*, jos $A = A^{\mathsf{T}}$. Jos A on $m \times n$-matriisi, on A^{T} silloin $n \times m$-matriisi. Symmetriselle matriisille täytyy siis aina päteä $m = n$ eli symmetrinen matriisi on aina neliömatriisi.

Esimerkki 2.1.9. *Edellisen esimerkin matriisit eivät ole symmetrisiä. Matriisi*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

on symmetrinen.

Matriisi $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ on siis symmetrinen, jos $a_{ij} = a_{ji}$ kaikilla indekseillä $i = 1, \ldots, n$ ja $j = 1, \ldots, n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Diagonaalimatriisi on aina symmetrinen.

Kun A ja B ovat $m \times n$-matriiseja ja C on $n \times p$-matriisi, niin

- $(A^\mathsf{T})^\mathsf{T} = A$
- $(rA)^\mathsf{T} = rA^\mathsf{T}$ kaikilla reaaliluvuilla r
- $(A + B)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} + B^\mathsf{T}$
- $(AC)^\mathsf{T} = C^\mathsf{T} A^\mathsf{T}$

2.1.4 Determinantti

Mille tahansa neliömatriisille voidaan laskea *determinantti* matriisin alkioiden avulla. Kun A on 2×2-matriisi, sen determinantti on luku

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Esimerkki 2.1.10.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2.$$

Kun A on $n \times n$-matriisi, sen determinantti lasketaan alimatriisien determinanttien avulla. *Alimatriisi* A_{ij} on $(n-1) \times (n-1)$-matriisi, joka saadaan matriisista A poistamalla rivi i ja sarake j.

Esimerkki 2.1.11. *Selvitetään joitakin matriisin* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ *alimatriiseja:*

$$A_{11} : \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} : \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A_{13} : \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_{13} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} : \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Matriisin A determinantti voidaan laskea *minkä tahansa* rivin tai sarakkeen suhteen. Rivin i suhteen laskettuna se on

$$\det A = (-1)^{i+1}a_{i1}\det A_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}\det A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}\det A_{in}$$

ja sarakkeen j suhteen laskettuna

$$\det A = (-1)^{1+j}a_{1j}\det A_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}\det A_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}\det A_{nj},$$

missä alimatriisien determinantit lasketaan edelleen uusien alimatriisien determinanttien avulla, kunnes ollaan päästy 2×2-matriiseihin. Termin $(-1)^{i+j}$ antaman merkin muistaa helpoiten kaaviosta (vrt. Esimerkki 2.1.1(d)):

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Esimerkki 2.1.12. *Lasketaan* $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ *ensimmäisen rivin suhteen:*

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} &= (-1)^{1+1}\cdot \underbrace{0}_{a_{11}} \cdot \det \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}}_{A_{11}} + (-1)^{1+2}\cdot \underbrace{1}_{a_{12}} \cdot \det \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}}_{A_{12}} \\ &\quad + (-1)^{1+3}\cdot \underbrace{2}_{a_{13}} \cdot \det \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}}_{A_{13}} \\ &= 0 - 1\cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + 2\cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \\ &= -1\cdot(3\cdot 8 - 5\cdot 6) + 2\cdot(3\cdot 7 - 4\cdot 6) \\ &= -1\cdot(-6) + 2\cdot(-3) = 0. \end{aligned}$$

Esimerkki 2.1.13. *Lasketaan* $\det A$*, kun*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinantti kannattaa laskea sellaisen rivin tai sarakkeen suhteen, missä on mahdollisimman paljon nollia, joten lasketaan determinantti kolmannen sarakkeen suhteen.

$$\begin{aligned}\det A = (-1)^{1+3} \cdot \underbrace{2}_{a_{13}} \cdot \det \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{13}} &+ (-1)^{2+3} \cdot \underbrace{0}_{a_{23}} \cdot \det \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{23}} \\ + (-1)^{3+3} \cdot \underbrace{0}_{a_{33}} \cdot \det \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{33}} &+ (-1)^{4+3} \cdot \underbrace{0}_{a_{43}} \cdot \det \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_{A_{43}} \\ = 2 \cdot \det \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Lasketaan alimatriisin $A_{13} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ *determinantti kolmannen rivin suhteen.*

$$\begin{aligned}\det \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} &= (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+3} \cdot 0 \cdot \det \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = -2 \cdot 3 - 0 \cdot 2 = -6.\end{aligned}$$

Matriisin A determinantti on siis $\det A = 2 \cdot (-6) = -12$.

Determinantin laskemisessa voi hyödyntää seuraavia ominaisuuksia: Kun A ja B ovat $n \times n$-matriiseja, niin

- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det A^{\mathsf{T}} = \det A$
- Jos matriisin A jokin rivi tai sarake koostuu nollista, niin $\det A = 0$.
- Jos matriisissa on kaksi samaa riviä (tai kaksi samaa saraketta) niin sen determinantti on nolla.

- Jos matriisin johonkin riviin (tai sarakkeeseen) lisätään toinen rivi (sarake) kerrottuna millä tahansa luvulla r, niin matriisin determinantti ei muutu.

Esimerkki 2.1.14. *Käytetään determinantin ominaisuuksia esimerkin 2.1.12 matriisin*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

determinantin laskemisessa: Kerrotaan toinen rivi (-2) : *lla ja lisätään se viimeiseen riviin, jolloin saadaan matriisi*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6+(-2)\cdot 3 & 7+(-2)\cdot 4 & 8+(-2)\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Lisätään viimeinen rivi ensimmäiseen, jolloin saadaan matriisi $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$. *Ensimmäinen rivi on nollia, joten tämän matriisin determinantti on nolla. Nämä matriisin muuttamiseksi tehdyt laskut eivät muuta determinanttia, joten* $\det A = 0$.

2.1.5 Käänteismatriisi

Luvulla $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on olemassa käänteisluku a^{-1}, jolle pätee

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Vastaavasti sanomme, että **neliömatriisi** A on *kääntyvä*, jos on olemassa matriisi B jolle pätee

- $AB = BA = I$.

Tällöin merkitsemme $A^{-1} = B$, ja sanomme että A^{-1} on matriisin A *käänteismatriisi*. Huomaa, että jos A on $n \times n$-matriisi, niin myös A^{-1} on $n \times n$-matriisi. Lisäksi, käänteismatriisi A^{-1} on *yksikäsitteinen*: Jos on olemassa matriisi C jolle pätee:

$$AC = CA = I,$$

niin tällöin

$$C = CI = C(AA^{-1}) = (CA)A^{-1} = A^{-1}.$$

Siis $C = A^{-1}$. Tämä on hyvä uutinen: jos pystymme jotenkin löytämään neliömatriisille A käänteismatriisin, niin tiedämme ettei muita käänteismatriiseja olekaan. Tämän todistamisessa emme muuten tarvinneet tietoa $AC = I$. Itse asiassa, pätee *työnpuolituslause*:

$$\boxed{\text{Jos } AB = I, \text{ niin } BA = I.}$$

Reaaliluvulle a löytyy käänteisluku jos ja vain jos $a \neq 0$. Matriiseille puolestaan osoittautuu, että:

$$\boxed{\text{Matriisi } A \text{ on kääntyvä jos ja vain jos } \det A \neq 0}$$

Lisäksi, kun A ja B ovat kääntyviä $n \times n$-matriiseja, niin

- $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$,
- $(A^{-1})^{-1} = A$,
- AB on kääntyvä ja $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Esimerkki 2.1.15. det $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = -2 \neq 0$, *joten matriisi* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *on kääntyvä. Merkitään käänteismatriisia* $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. *Tiedämme, että*

$$AA^{-1} = I \quad \textit{eli} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot a + 2 \cdot c & 1 \cdot b + 2 \cdot d \\ 3 \cdot a + 4 \cdot c & 3 \cdot b + 4 \cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriisit ovat yhtä suuret vain jos niiden kaikki alkio ovat yhtä suuret, joten täytyy olla $a + 2c = 1$, $3a + 4c = 0$, $b + 2d = 0$ *ja* $3b + 4d = 1$. *Saamme selville matriisin* A^{-1} *alkiot* a, b, c *ja* d *ratkaisemalla yhtälöparit*

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ 3a + 4c = 0 \end{cases} \quad \textit{ja} \quad \begin{cases} b + 2d = 0 \\ 3b + 4d = 1 \end{cases}.$$

Kun vähennämme alemmista yhtälöistä ylemmät yhtälöt kerrottuna luvulla -3, *saamme*

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ 3a + 4c - 3 \cdot (a + 2c) = 0 - 3 \end{cases} \quad \textit{ja} \quad \begin{cases} b + 2d = 0 \\ 3b + 4d - 3 \cdot (b + 2d) = 1 - 3 \cdot 0 \end{cases},$$

eli

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ -2c = -3 \end{cases} \quad \textit{ja} \quad \begin{cases} b + 2d = 0 \\ -2d = 1 \end{cases}.$$

Lisäämällä nyt alemmat yhtälöt ylempiin, saamme

$$\begin{cases} a + 2c - 2c = 1 - 3 \\ -2c = -3 \end{cases} \quad \textit{ja} \quad \begin{cases} b + 2d - 2d = 0 + 1 \\ -2d = 1 \end{cases},$$

eli

$$\begin{cases} a = -2 \\ -2c = -3 \end{cases} \quad \textit{ja} \quad \begin{cases} b = 1 \\ -2d = 1 \end{cases}.$$

Kertomalla alemmat yhtälöt luvulla $-\frac{1}{2}$ *päädymme ratkaisuun*

$$\begin{cases} a = -2 \\ c = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \textit{ja} \quad \begin{cases} b = 1 \\ d = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Huomaa, että yllä tekemämme yhtälöparien muokkaukset eivät muuta yhtälöparien ratkaisuja. Siis on

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Työnpuolituslauseen perusteella A^{-1} *on matriisin* A *käänteismatriisi. Laskuvirheiden varalta kannattaa kuitenkin tarkistaa ratkaisumme* A^{-1} *laskemalla* $A^{-1}A$*:*

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & -2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ \frac{3}{2} \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3 & \frac{3}{2} \cdot 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.1.6 Gauss-Jordanin eliminointimenetelmä

Käänteismatriisin etsiminen $n \times n$-matriisille, kun $n > 2$, voidaan tehdä kuten Esimerkissä 2.1.15. Jo tapauksessa $n = 3$ tulee kuitenkin ratkaistavaksi kolme kappaletta yhtälökolmikoita, joiden ratkaiseminen Esimerkin 2.1.15 merkinnöillä on aika kömpelöä. Selkein tapa käänteismatriisin ratkaisemiseksi onkin ns. *Gauss-Jordanin eliminointimenetelmä*. Siinä muodostetaan laajennettu matriisi

$$\begin{bmatrix} A & \mid & I \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right],$$

jota muokataan rivioperaatioin niin että vasemmalle puolelle muodostuu yksikkömatriisi. Silloin oikealle puolelle on ilmestynyt matriisin A käänteismatriisi.

Käytettävissä olevat rivioperaatiot ovat:

- $R_i \to rR_i$ (kaikki rivin i alkiot kerrotaan luvulla r)
- $R_i \leftrightarrow R_j$ (rivit i ja j vaihdetaan keskenään)
- $R_i \to R_i + rR_j$ (riviin i lisätään rivi j kerrottuna luvulla r).

Näitä operaatioita käyttäen laajennettua matriisia muokataan ensimmäisestä sarakkeesta alkaen niin että diagonaalialkioksi tulee 1 ja sen ylä- ja alapuolelle nollia.

Esimerkki 2.1.16. *(vrt. Esimerkkiin 2.1.15)*
Käännetään matriisi $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *Gauss-Jordanin menetelmällä. Muodostetaan laajennettu matriisi*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Ensimmäinen diagonaalialkio a_{11} *on jo valmiiksi* 1. *Muokataan sen alapuolelle* 0 *lisäämällä toiseen riviin ensimäinen rivi kerrottuna* -3*:lla eli operaatiolla* $R_2 \to R_2 - 3R_1$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3-3\cdot 1 & 4-3\cdot 2 & 0-3\cdot 1 & 1-4\cdot 0 \end{array}\right]$$
$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

Lisätään nyt toinen rivi ensimmäiseen riviin:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2-2 & 1-3 & 0+1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$
$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

Saamme toisesta diagonaalialkiosta ykkösen kertomalla toisen rivin luvulla $-\frac{1}{2}$*:*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\cdot(-3) & -\frac{1}{2}\cdot 1 \end{array}\right]$$
$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *käänteismatriisi* $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ *löytyy nyt laajennetun matriisin oikeasta lohkosta.*

Esimerkki 2.1.17. *Esimerkissä 2.1.13 laskettiin, että matriisin*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

determinantti on -12. *Se on siis kääntyvä matriisi. Käännetään se:*

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \leftrightarrow R_3 \\ R_2 \leftrightarrow R_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \to \frac{1}{2}R_1 \\ R_2 \to -R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] R_4 \to R_4 + 2R_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \to R_1 - R_2 \\ R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to R_4 - 3R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_3 \to \frac{1}{2}R_3 \\ R_4 \to \frac{1}{3}R_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_3 \to R_3 - \frac{3}{2}R_4 \\ R_1 \to R_1 - \frac{3}{2}R_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right].$$

Siis $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}.$

2.2 Lineaarinen yhtälöryhmä

Lineaarisessa optimoinnissa rajoitusalueen reunasuorien leikkauspisteet ratkaistiin kahden muuttujan lineaarisista yhtälöryhmistä. Esim. suorien $y = ax + b$ ja $y = cx + d$ leikkauspiste löytyy ratkaisemalla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -ax + y = b \\ -dx + y = d. \end{cases}$$

Kun muuttujia on n kappaletta, käytämme muuttujista x:n ja y:n sijasta merkintää $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja kun yhtälöitä on m kappaletta, niin lineaarinen yhtälöryhmä saa seuraavan muodon:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

missä $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ovat reaalilukuja, kuten myös kertoimet a_{ij}.Yhtälöryhmän ratkaiseminen tarkoittaa, että selvitetään millä muuttujien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ arvoilla kaikki ryhmän yhtälöt ovat yhtä aikaa voimassa. Ratkaisuja on aina joko nolla, yksi tai äärettömän monta kappaletta.

Yhtälöryhmän kertoimet a_{ij} muodostavat yhtälöryhmän *kerroinmatriisin* $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$. Myös muuttujista $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja vakioista $b_1, b_2, \ldots, b_m$ voidaan muodostaa matriisit $X = \left[x_i\right]_{n\times 1}$ ja $B = \left[b_j\right]_{m\times 1}$. Koska A on $m \times n$-matriisi ja X on $n \times 1$-matriisi, voidaan laskea tulo

$$AX = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{m\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{n\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}}_{m\times 1}.$$

Matriisi AX koostuu yhtälöryhmän yhtälöiden vasemmista puolista, joten yhtälöryhmä on sama kuin matriisiyhtälö

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{eli} \quad AX = B.$$

Matriisiyhtälöä $AX = B$ kutsutaan yhtälöryhmän *matriisiesitykseksi.*

Esimerkki 2.2.1. *Yhtälöryhmän* $\begin{cases} -x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_2 = 4 \end{cases}$ *matriisiesitys on*

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

2.2.1 Ratkaiseminen käänteismatriisin avulla

Jos yhtälöryhmän kerroinmatriisi A on kääntyvä (eli se on neliömatriisi ja se determinantti on eri kuin nolla), niin sille voidaan laskea käänteismatriisi A^{-1}. Koska nyt $m = n$ ja AX ja B ovat $n \times 1$-matriiseja, ne voidaan kertoa vasemmalta $n \times n$-matriisilla A^{-1}. Jos $AX = B$, niin

$$X = IX \underset{I=A^{-1}A}{=} (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) \underset{AX=B}{=} A^{-1}B.$$

Toisaalta, jos $X = A^{-1}B$ niin

$$AX \underset{X=A^{-1}B}{=} A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B \underset{AA^{-1}=I}{=} IB = B.$$

Siis yhtälö $AX = B$ on yhtäpitävä sen kanssa, että $X = A^{-1}B$.

Siis: jos yhtälöryhmän kerroinmatriisi on kääntyvä, niin yhtälöryhmällä on *täsmälleen yksi ratkaisu* ja se saadaan yhtälöryhmää vastaavasta matriisiyhtälöstä

$$\boxed{AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B}$$

laskemalla tulo $A^{-1}B$.

Esimerkki 2.2.2. *Yhtälöryhmän* $\begin{cases} -x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_2 = 4 \end{cases}$ *matriisiesitys on*

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Lasketaan kerroinmatriisin $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *käänteismatriisi.*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} R_1 \to -R_1 \\ R_2 \to \frac{1}{2}R_2 \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] R_1 \to R_1 + R_2 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Siis $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ *ja*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 \\ 0 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on siis $x_1 = -1$ *ja* $x_2 = 2$.

Esimerkki 2.2.3. *Yhtälöryhmän*

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 12 \\ -x_2 = 6 \end{cases}$$

kerroinmatriisi A ja vakioista koostuva matriisi B ovat

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Koska $\det A \neq 0$ *(ks. Esimerkki 2.1.13), on A kääntyvä matriisi ja sen käänteismatriisi*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

laskettiin esimerkissä 2.1.17. Ratkaistaan yhtälöryhmä käänteismatriisin avulla.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 12 - \frac{1}{2} \cdot 6 \\ 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 12 - 1 \cdot 6 \\ \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 12 - 1 \cdot 6 \\ 0 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 12 + 1 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 0 + 0 - 3 \\ 0 + 0 + 0 - 6 \\ 1 - 0 - 6 - 6 \\ 0 + 0 + 4 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ -11 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $x_1 = -3, x_2 = -6, x_3 = -11, x_4 = 10$.

2.2.2 Ratkaiseminen Gauss-Jordanin eliminointimenetelmällä

Jos yhtälöryhmän kerroinmatriisi ei ole kääntyvä, yhtälöryhmän voi ratkaista soveltamalla matriisin kääntämisestä tuttua Gauss-Jordanin menetelmää ns. *laajennettuun kerroinmatriisiin*:

$$\begin{bmatrix} A & | & B \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

johon matriisin kääntämisestä tuttuja rivioperaatioita sovelletaan.

(a) Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 3 \\ -2x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$$

ja käytetään sen laajennettu kerroinmatriisia

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 4 \end{array}\right] R_1 \to -R_1 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 4 \end{array}\right] R_2 \to R_2{+}2R_1 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Toinen rivi tarkoittaa $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = -2$, mikä ei toteudu millään reaaliluvuilla x_1, x_2. Siis yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

(b) Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 3 \\ \quad\;\; 2x_2 = 4 \\ \;\; x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Laajennettu kerroinmatriisi on

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] R_1 \to -R_1,\, R_2 \to \frac{1}{2}R_2 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] R_3 \to R_3 - R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right] R_1 \to R_1 + R_2,\, R_3 \to R_3 - 2R_2 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ratkaisu on $x_1 = -1, x_2 = 2$. Viimeinen rivi tarkoittaa yhtälöä $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$, joka toteutuu kaikilla luvuilla x_1, x_2 eikä se siten ole ristiriidassa kahden ensimmäisen rivin antaman tuloksen kanssa.

(c) Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 3 \\ -2x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$$

Laajennettu kerroinmatriisi on

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \end{array}\right] R_1 \to -R_1 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 4 \end{array}\right] R_2 \to R_2{+}2R_1 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Tästä ei voida enää jatkaa. Ensimmäisen rivin yhtälö on $x_1 - x_2 = -3$ ja toisen rivin yhtälö on $0 = 0$. Yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua, x_1 on mikä tahansa reaaliluku ja $x_2 = x_1 + 3$. Ratkaisut voi ilmoittaa myös muodossa:

$$(x_1, x_2) = (t, t + 3), t \in \mathbb{R}.$$

2.2.3 Ratkaiseminen Cramerin säännöllä

Jos yhtälöryhmän kerroinmatriisi on kääntyvä neliömatriisi, niin yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu ja se voidaan selvittää Cramerin säännöllä. Olkoon yhtälöryhmän matriisiesitys

$$AX = B \quad \text{eli} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Muodostetaan matriisi A_i matriiseista A ja B siten, että matriisin A sarake i korvataan sarakematriisilla B. Esimerkiksi

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Silloin yhtälön $AX = B$ ratkaisut $x_1, x_2, \ldots, x_n$ saadaan kaavasta

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

Esimerkki 2.2.4. *Ratkaistaan yhtälöryhmä*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}.$$

Lasketaan ensin $\det A$ *ensimmäisen rivin suhteen.*

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= 2 \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} - 3 \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 2 \cdot (3 - 4) - (-3 + 2) - 3 \cdot (2 - 1) = -2 + 1 - 3 = -4. \end{aligned}$$

Koska $\det A \neq 0$*, voidaan käyttää Cramerin sääntöä. Muodostetaan matriisit*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

ja lasketaan niiden determinantit.

$$\begin{aligned}
\det A_1 &= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \\
&= 1 \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - 3 \det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \\
&= (3-4) - (-9+4) - 3 \cdot (6-2) = -8,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det A_2 &= \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \\
&= 2 \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} - 3 \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \\
&= 2 \cdot (-9+4) - (-3+2) - 3 \cdot (-2+3) = -12
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\det A_3 &= \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \\
&= 2 \det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= 2 \cdot (2-6) - (2-1) + (2-1) = -8.
\end{aligned}$$

Ratkaisut ovat

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-8}{-4} = 2 \\
x_2 &= \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-12}{-4} = 3 \\
x_3 &= \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-8}{-4} = 2.
\end{aligned}$$

Vastaus: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ *ja* $x_3 = 2$.

3 Analyysin alkeita

3.1 Yhden reaalimuuttujan funktio

Tämä luku on suurimmaksi osaksi yhden reealimuuttujan funktioiden peruskäsitteiden kertausta. Reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ *osajoukko* on jokin joukko reaalilukuja, esimerkiksi piste $\{a\}$, suljettu väli $[a, b]$, avoin väli (a, b), aidosti positiiviset luvut $(0, \infty)$, kokonaisluvut $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, rationaaliluvut $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : \ m, n \in \mathbb{Z}\}$, reaaliluvut joista on poistettu nolla $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, koko $\mathbb{R}$ itse ... Kun luku x kuuluu joukkoon A, siitä käytetään merkintää $x \in A$. Kun joukko A sisältyy joukkoon B, käytetään merkintää $A \subseteq B$.

Olkoot A ja B reaalilukujoukkoja. *Funktio* eli *kuvaus* $f : A \to B$ on sääntö, joka liittää jokaiseen joukon A lukuun täsmälleen yhden luvun joukosta B. Sääntö ilmaistaan funktion *lausekkeen* avulla yleensä seuraavasti:

$$f : A \to B,\ f(x) = \text{“lauseke”}.$$

(Sanotaan “f käy joukosta A joukkoon B, $f(x)$ on ...)

Joukkoa A kutsutaan funktion f *lähtöjoukoksi* eli *määrittelyjoukoksi* ja siitä käytetään joskus merkintää M_f. Joukko B on funktion f *maalijoukko*, eli joukko missä funktion f arvot sijaitsevat. Kun kootaan yhteen kaikki funktion f saamat arvot, eli luvut $f(x)$ kaikilla $x \in M_f$, saadaan funktion f *arvojoukko* eli *kuvajoukko* A_f. Joukkomerkinnöillä tämä voidaan kirjoittaa näin:

$$A_f = \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y = f(x) \text{ jollakin } x \in M_f \right\}.$$

Arvojoukko on aina maalijoukon osajoukko, eli $A_f \subseteq B$.

Esimerkki 3.1.1.
Olkoon $A = [-2, 0]$, $B = [0, 10]$ ja $f : A \to B$, $f(x) = x + 4$. Silloin esimerkiksi

$$f(\underbrace{-2}_{\in A}) = -2 + 4 = \underbrace{2}_{\in B} \quad \text{ja} \quad f(\underbrace{-1/2}_{\in A}) = -1/2 + 4 = \underbrace{3\frac{1}{2}}_{\in B}.$$

Funktion määrittelyjoukko on $M_f = [-2, 0]$. Selvitetään mikä on funktion f arvojoukko A_f. Huomataan, että

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x + 4 \Leftrightarrow y - 4 = x.$$

Siis $y = f(y - 4)$, kunhan $f(y - 4)$ on määritelty. Tämä on määritelty juuri silloin, kun $y - 4 \in M_f = [-2, 0]$, eli $y \in [2, 4]$. Näin ollen $A_f = [2, 4]$.

Esimerkki 3.1.2. *Määritä A_f funktiolle $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, missä*

(a) $A = [0, 2]$,

(b) $A = [-3, -1)$,

(c) $A = [-2, -1] \cup [3, 4]$.

Huomataan ensiksi, että $y = f(x) = x^2$ voi toteutua vain jos $y \geq 0$. Lisäksi, kun $y \geq 0$, on

$$y = x^2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = x \text{ tai } -\sqrt{y} = x.$$

Siis $y \in A_f$ kun $y \geq 0$, ja lisäksi $\sqrt{y} \in M_f$ tai $-\sqrt{y} \in M_f$.

(a) *$M_f = [0, 2]$, joten $\sqrt{y} \in M_f$ jos ja vain jos $y \in [0, 4]$. Koska $-\sqrt{y} \in M_f$ vain kun $y = 0$, on $A_f = [0, 4]$.*

(b) *$M_f = [-3, -1)$, joten $\sqrt{y}$, joka on ei-negatiivinen luku, ei kuulu joukkoon M_f millään $y \geq 0$. Puolestaan $-\sqrt{y} \in M_f$ jos ja vain jos*

$$\begin{aligned} & -3 \leq -\sqrt{y} < -1 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 < \sqrt{y} \leq 3 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 < y \leq 9. \end{aligned}$$

Siis $A_f = (1, 9]$.

(c) *$M_f = [-2, -1] \cup [3, 4]$, joten*

$$\begin{aligned} & \sqrt{y} \in M_f \\ \Leftrightarrow \quad & 3 \leq \sqrt{y} \leq 4 \\ \Leftrightarrow \quad & 9 \leq y \leq 16. \end{aligned}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned} & -\sqrt{y} \in M_f \\ \Leftrightarrow \quad & -2 \leq -\sqrt{y} \leq -1 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 \leq y \leq 4. \end{aligned}$$

Siis $A_f = [1, 4] \cup [9, 16]$.

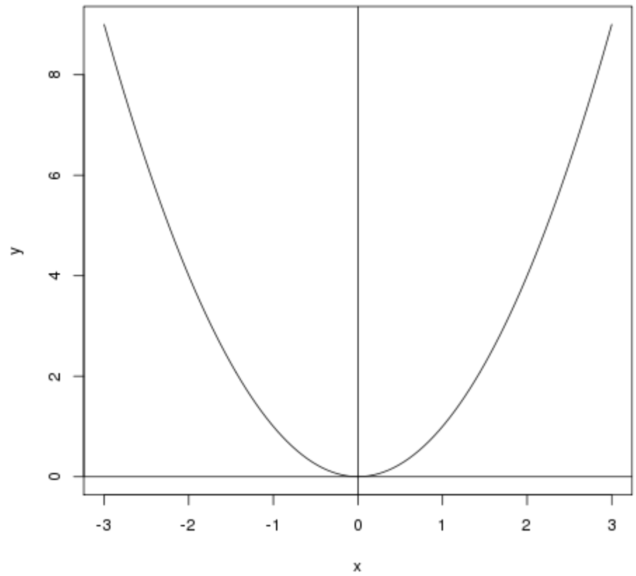
Jos funktiosta annetaan vain lauseke, niin määrittelyjoukoksi valitaan suurin mahdollinen joukko jossa lauseke on määritelty.

Esimerkki 3.1.3. *Funktion $f(x) = x^2$ määrittelyjoukko on $M_f = \mathbb{R}$. Tällöin arvojoukko on $[0, \infty)$, sillä $x^2 \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ja $f(\sqrt{x}) = x$ kaikilla $x \geq 0$.*

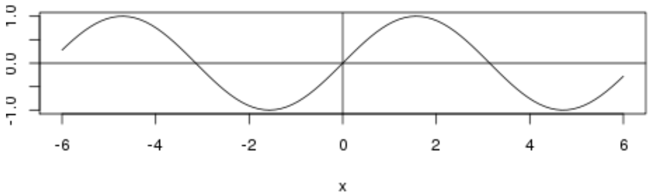
Funktion $f : A \to B$ *kuvaaja* eli *graafi* on pisteparien $(x, f(x))$, missä $x \in A$, muodostama käyrä tasokoordinaatistossa.

Esimerkki 3.1.4.

(a) *Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ *kuvaaja:*



(b) *Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$ *kuvaaja:*



Trigonometriset funktiot, eksponenttifunktio ja algebralliset funktiot sekä näiden käänteisfunktiot ja yhdistetyt funktiot ovat ns. *alkeisfunktioita*. Lisäksi alkeisfunktioihin kuuluvat funktiot, jotka on saatu edellisistä soveltamalla niihin äärellinen määrä peruslaskutoimituksia (summa, tulo, osamäärä). Alla on lueteltu joitakin tutuimpia alkeisfunktioita, niiden suurin mahdollinen määrittelyjoukko ja arvojoukko.

- vakiofunktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$), $A_f = \{a\}$
- potenssifunktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, missä $n = 1, 2, 3, \ldots$, $A_f = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{jos } n \text{ pariton} \\ [0, \infty), & \text{jos } n \text{ parillinen} \end{cases}$
- juurifunktio $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, missä A ja A_f ovat kuten potenssifunktion arvojoukko, paitsi parillisilla n, jolloin $A = [0, \infty)$
- polynomifunktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

  $$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n,$$

  A_f riippuu luvuista $a_0, a_1, \ldots, a_n$
- rationaalifunktio $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, missä P ja Q ovat polynomifunktioita. Lauseke $f(x)$ on määritelty kun $Q(x) \neq 0$, eli määrittelyjoukko on $A = \mathbb{R} \setminus \{Q(x) = 0\}$, ja arvojoukko A_f riippuu funktioista P ja Q
- trigonometriset funktiot
  - sinifunktion $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ arvojoukko on $[-1, 1]$
  - kosinifunktion $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ arvojoukko on $[-1, 1]$
  - tangenttifunktion $\tan : A \to \mathbb{R}$, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ määrittelyjoukko on

    $$A = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

    ja arvojoukko on $\mathbb{R}$.
- eksponenttifunktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ ($a > 0$ ja $a \neq 1$), arvojoukko $A_f = (0, \infty)$ (tärkein eksponenttifunktio $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$).

- logaritmifunktio $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$ ja $a \neq 1$), $A_f = \mathbb{R}$ ($\log_e = \log = \ln$, luonnollinen logaritmi).

Huomautus 3.1. *Rationaalifunktion ja polynomifunktion arvojoukkoa (sekä rationaalifunktion määrittelyjoukkoa) selvittäessä laskuja yleensä helpottavat yhtälöt:*

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b), \\ a^2 + 2ab + b^2 &= (a+b)^2, \\ a^2 - 2ab + b^2 &= (a-b)^2, \end{aligned}$$

missä $a, b \in \mathbb{R}$. Näiden lisäksi polynomien jakaminen jakokulmassa helpottaa joskus laskuja.

Esimerkki 3.1.5.

(a) *Polynomifunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 4x + 4$ arvojoukko on $[2, \infty)$, sillä*

$$2x^2 - 4x + 4 = 2(x^2 - 2x + 1) + 2 = 2(x-1)^2 + 2.$$

(a) *Rationaalifunktion $f(x) = \frac{x^7 - 5x^5 - 1}{10 - 18x + 9x^2}$ määrittelyjoukko on $M_f = \mathbb{R}$, sillä $10 - 18x + 9x^2 = 9(x^2 - 2x + 1) + 1 = 9(x-1)^2 + 1$, joka ei ole nolla millään $x \in \mathbb{R}$. Siis lauseke $\frac{x^7 - 5x^5 - 1}{10 - 18x + 9x^2}$ on määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$.*

(b) *Rationaalifunktio $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$ ei ole määritelty kun $x^2 - 1 = 0$, eli kun $(x+1)(x-1) = 0$, eli kun $x = -1$ tai $x = 1$.*

(c) *Lauseke $\frac{1}{x}$ on määritelty kun $x \neq 0$. Siis funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ määrittelyjoukko on $M_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Myös arvojoukko on $A_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$: jos $x \neq 0$, niin $\frac{1}{x}$ on määritelty, ja eri suuri kuin nolla. Siis $\frac{1}{x} \in M_f$, eli $f(\frac{1}{x})$ on määritelty. Nyt*

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 : \frac{1}{x} = x,$$

eli $x \in A_f$.

(d) *Funktio $f(x) = \frac{x-1}{x}$ on määritelty kun $x \neq 0$. Koska $\frac{x-1}{x} = \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$, nähdään että funktio saa (kohdan (c) nojalla) kaikki arvot paitsi arvon 1. Siis $A_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.*

(e) *Saako funktio $f(x) = \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + 1}$ arvoa 2, eli onko $2 \in A_f$? Kirjoitetaan ensin $\frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + 1} = \frac{x^4 + 1}{x^4 + 1} - \frac{x^2}{x^4 + 1} = 1 - \frac{x^2}{x^4 + 1}$. Huomataan, että $\frac{x^2}{x^4 + 1} \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, josta seuraa että $1 - \frac{x^2}{x^4 + 1} \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Siis funktio f ei voi saada arvoa 2, joten $2 \notin A_f$.*

3.1.1 Yhdistetty kuvaus ja käänteiskuvaus

Yhdistetty kuvaus on kuvaus, jossa muuttujat kuvataan ensin yhdellä funktiolla ja sitten toisella. Olkoot $f : A \to B$ ja $g : B \to C$ kuvauksia. Silloin niiden yhdistetty kuvaus $g \circ f : A \to C$ on kuvaus

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right).$$

Sanotaan, että f on yhdistetyn kuvauksen *sisäfunktio* ja g on *ulkofunktio*.

Esimerkki 3.1.6.

(a) *Olkoon* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $f(x) = 3x$ *ja* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $g(x) = x^2$*. Silloin* $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,*

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = g(3x) = (3x)^2,$$

ja $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,*

$$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = f(x^2) = 3x^2.$$

(b) *Olkoon* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $f(x) = 2x - 1$ *ja* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $g(x) = x^3 + 3$*. Silloin* $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,*

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = g(2x-1) = (2x-1)^3 + 3,$$

ja $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,*

$$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = f(x^3+3) = 2 \cdot (x^3+3) - 1.$$

(c) *Olkoon* $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$*,* $f(x) = e^x$ *ja* $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$*,* $g(x) = \frac{1}{x}$*. Silloin* $g \circ f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$*,*

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = g(e^x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}.$$

(d) *Olkoon* $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$*,* $f(x) = x^n$ *ja* $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$*,* $g(x) = \log x$*. Silloin* $g \circ f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$*,*

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = \log x^n = n \log x.$$

(e) *Olkoon* $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$*,* $f(x) = \log x$ *ja* $g : \mathbb{R} \to (0,\infty)$*,* $g(x) = e^x$*. Silloin* $g \circ f : (0,\infty) \to (0,\infty)$*,*

$$(g \circ f)(x) = g(\log x) = e^{\log x} = x,$$

ja $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,*

$$(f \circ g)(x) = f(e^x) = \log(e^x) = x.$$

(f) *Olkoon* $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ *ja* $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \tan x$. *Tällöin*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \tan(\cos x) = \frac{\sin(\cos x)}{\cos(\cos x)}.$$

Tämä lauseke on määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$, *koska* $\cos(\cos x)$ *ei saa arvoa nolla millään* $x \in \mathbb{R}$.

(g) *Yhdistetty kuvaus* $\sqrt{-x}$ *on määritelty kun* $-x \geq 0$, *eli kun* $x \leq 0$.

(h) *Yhdistetty kuvaus* $\tan(\log(x))$ *on määritelty niillä luvuilla* x *joilla* $\log(x)$ *on määritelty (eli* $x > 0$*) ja* $\log(x)$ *ei ole muotoa* $\frac{\pi}{2} + k\pi$ *millään* $k \in \mathbb{Z}$.

Kuvauksella $f : A \to B$ on *käänteiskuvaus* $f^{-1} : B \to A$, jos se on *bijektio*. Kuvaus $f : A \to B$ on bijektio, jos se on

- *surjektio* eli $B = A_f$ eli jokaiselle maalijoukon pisteelle $y \in B$ löytyy jokin lähtöjoukon piste $x \in A$ niin että $f(x) = y$

  JA

- *injektio* eli funktio f kuvaa jokaisen pisteen eri pisteeksi eli ehdosta $x \neq z$ seuraa $f(x) \neq f(z)$ kaikilla $x, z \in A$.

Käänteiskuvaus on se kuvaus, jolle

$$\boxed{f(x) = y \ \Leftrightarrow \ f^{-1}(y) = x}$$

Käänteiskuvaus määräytyy myös ehdoista $f^{-1}(f(x)) = x$ kaikilla $x \in M_f$ ja $f(f^{-1}(y)) = y$ kaikilla $y \in A_f$ (vrt. Esimerkkiin 3.1.6(e)). Huomaa, että aina pätee $M_f = A_{f^{-1}}$ ja $M_{f^{-1}} = A_f$.

Esimerkki 3.1.7.

(a) *Esimerkin 3.1.1 kuvaus* $f : [-2, 0] \to [0, 10]$, $f(x) = x + 4$ *on injektio, sillä* $x \neq z \Leftrightarrow x + 4 \neq z + 4$. *Kuvaus ei kuitenkaan ole surjektio, joten sillä ei ole käänteiskuvausta.*

(b) *Kuvaus* $f : [-2, 0] \to [2, 4]$, $f(x) = x + 4$ *on injektio, ja lisäksi se on surjektio koska maalijoukko* $[2, 4]$ *on myös sen arvojoukko* A_f. *Koska lisäksi* $f(x) = y \Leftrightarrow y - 4 = x$ *(ks. Esimerkki 3.1.1), on käänteiskuvaus* $f^{-1} : [2, 4] \to [-2, 0]$, $f^{-1}(y) = y - 4$.

(c) *Funktio* $f : [-3, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ *ei ole injektio, koska esimerkiksi* $f(-2) = 4 = f(2)$. *Funktio ei ole myöskään surjektio: jos* $y \geq 10$, *niin ei ole olemassa* $x \in [-3, 2]$ *siten että* $f(x) = y$, *sillä* $f(x) \leq 9$.

(d) *Funktio* $f : [0, \infty) \to A_f$, $f(x) = x^2 + 1$, *on selvästi surjektio, koska maalijoukko on sen arvojoukko. Lisäksi se on injektio, sillä* $x^2 \neq z^2$ *jos* $x \neq z$ *ja* $x, z \geq 0$. *Siis* f *on bijektio, ja sillä on käänteiskuvaus* f^{-1}. *Olkoon* $x \geq 0$ *ja* $y = x^2 + 1$. *Tällöin* $y \geq 1$ *ja*

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = x^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = y - 1 \\ &\overset{y-1\geq 0}{\Leftrightarrow} \quad |x| = \sqrt{y-1} \\ &\overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} \quad x = \sqrt{y-1}. \end{aligned}$$

Siis $f^{-1} : [1, \infty) \to [0, \infty)$, $f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$.
Tehtävä: *Piirrä sekä funktion* f *että funktion* f^{-1} *graafit. Käänteisfunktion graafin saat kun käännät alkuperäisen funktion graafin.*

(e) *Funktiolla* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ *on käänteiskuvaus* $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *koska ehto* $f(x) = y$ *eli* $x^3 = y$ *on yhtäpitävä sen kanssa että* $x = \sqrt[3]{y}$. *Siis* $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ *kaikilla* $y \in \mathbb{R}$. *Muista, että esimerkiksi* $\sqrt[3]{-8} = -2$, *koska* $(-2)^3 = -8$.

(f) *Kuvauksen* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{2}{x}$ *käänteiskuvaus on* $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f^{-1}(x) = \frac{2}{x}$, *sillä kaikilla* $x \neq 0$ *pätee:*

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = f(f^{-1}(x)) = 2 : \frac{2}{x} = 2 \cdot \frac{x}{2} = x.$$

(g) *Logaritmifunktio on eksponenttifunktion käänteisfunktio:* $\log_a(a^x) = x$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$ *ja* $a^{\log_a y} = y$ *kaikilla* $y \in (0, \infty)$.

(h) *Oletetaan että* $f : A \to A_f$ *on aidosti kasvava, eli kaikilla* $x, z \in A$ *ehdosta* $x < z$ *seuraa* $f(x) < f(z)$. *Tällöin* f *on injektio (harjoitustehtävä). Koska* f *on selvästi surjektio, on* f *tällöin bijektio, joten sillä on olemassa käänteiskuvaus* $f^{-1} : A_f \to A$.

(i) *Vastaavasti kuin kohdassa (h), jos* $f : A \to A_f$ *on aidosti vähenevä, eli kaikilla* $x, z \in A$ *ehdosta* $x < z$ *seuraa* $f(x) > f(z)$, *niin* f *on bijektio, joten sillä on olemassa käänteiskuvaus* $f^{-1} : A_f \to A$.

Esimerkki 3.1.8. *Kuvaus* $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{jos } x \leq 0, \\ x^2, & \text{jos } x > 0, \end{cases}$ *on aidosti kasvava: tämä on selvästi totta väleillä* $[-1, 0]$ *ja* $(0, 1]$. *Jos lisäksi*

$f(0) < f(x)$ kaikilla $x > 0$, niin f on aidosti kasvava koko määrittelyjoukossaan. Kun $x > 0$, on $f(x) = x^2 > 0$, joten

$$f(0) = 0 < x^2 = f(x).$$

Koska $A_f = [-1, 1]$, niin Esimerkin 3.1.7(h) nojalla funktiolla on olemassa käänteiskuvaus $f^{-1} : [-1, 1] \to [-1, 1]$. Käänteiskuvauksen lausekkeen päätteleminen on harjoitustehtävä.

3.1.2 Raja-arvo ja jatkuvuus

Funktiolla $f : A \to B$ on *raja-arvo* pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$, jos on olemassa jokin luku $y_0 \in \mathbb{R}$, jolle

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

eli $f(x)$ lähestyy lukua y_0, kun x lähestyy lukua x_0. Raja-arvon ominaisuuksia: Jos $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$, ja $c \in \mathbb{R}$, niin:

- $\lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = a + b$
- $\lim_{x \to x_0}(cf(x)) = c \lim_{x \to x_0} f(x) = ca$
- $\lim_{x \to x_0}(f(x)g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x) = ab$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{a}{b}$, jos $b \neq 0$.

Esimerkki 3.1.9. *Polynomifunktion $f(x) = (4x - 3)(x^2 + 1)$ raja-arvo pisteessä $x_0 = 1$ on $\lim_{x \to 1}(4x - 3)(x^2 + 1) = \lim_{x \to 1}(4x - 3) \cdot \lim_{x \to 1}(x^2 + 1) = 1 \cdot 2 = 2$.*

Esimerkki 3.1.10. *Rationaalifunktio $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$ ei ole määritelty pisteessä $x_0 = 1$. Koska $1^3 - 1^2 + 1 - 1 = 0$, on osoittaja $x^3 - x^2 + x - 1$ muotoa $(x - 1)P(x)$, missä $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on polynomi. Päättelemällä, tai jakokulmalla, huomataan että $P(x) = x^2 + 1$, joten*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + 1)}{(x - 1)(x + 1)} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 1}{x + 1} \\ &= \frac{\lim_{x \to 1}(x^2 + 1)}{\lim_{x \to 1}(x + 1)} \\ &= \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

Esimerkki 3.1.11. *Olkoon* $f : \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\} \to \mathbb{R}$*,* $f(x) = \frac{x}{\log|x|} + 3$*. Funktio* f *on määritelty kaikissa pisteissä* $x \in \mathbb{R}$ *paitsi* -1*,* 0 *ja* 1*, koska* $\log|0|$ *ei ole määritelty ja* $\log|-1| = \log|1| = 0$ *ja nollalla ei voida jakaa. Funktio* f *ei ole määritelty pisteessä* $x_0 = 0$*, mutta sillä saattaa olla raja-arvo kyseisessä pisteessä. Tarkastellaan funktion* f *arvoja* $f(x)$*, kun* x *on lähellä pistettä* $x_0 = 0$*:*

x	$0,1$	$-0,01$	$-0,003$	$0,0005$	$\to 0$
$f(x)$	$2,9565\ldots$	$3,0021\ldots$	$3,0005\ldots$	$2,9999\ldots$	$\to 3$

Funktion f *arvot* $f(x)$ *lähestyvät lukua* 3*, kun* x *lähestyy lukua* 0*. Siis*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 3.$$

Funktio $f : A \to B$ on *jatkuva pisteessä* x_0, jos

(1) funktio f on määritelty pisteessä x_0, eli $x_0 \in A$,

(2) jos funktiolla f on raja-arvo pisteessä x_0, ja

(3) funktion f arvo pisteessä x_0 on sama kuin funktion raja-arvo pisteessä x_0.

Lyhyesti nämä kolme ehtoa voi tiivistää näin: funktio $f : A \to B$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in A$ jos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Funktio $f : A \to B$ on *jatkuva*, jos se on jatkuva jokaisessa pisteessä $x_0 \in A$.

Esimerkki 3.1.12. *Olkoon* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $f(x) = 3x$ *ja* $x_0 = 1$*. Kun luku* x *on lähellä lukua* 1*, niin* $f(x) = 3x$ *on lähellä lukua* 3*. Siis*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to 1} 3x = 3.$$

Koska $f(1) = 3 = \lim_{x\to 1} f(x)$*, niin* f *on jatkuva pisteessä* 1*.*

Kaikki alkeisfunktiot, varsinkin siis kaikki luvun 3.1 alussa luetellut funktiot, ovat jatkuvia **määrittelyjoukossaan**. Lisäksi kahden jatkuvan funktion $f : A \to \mathbb{R}$ ja $g : A \to \mathbb{R}$

- summa $f + g : A \to \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- tulo $fg : A \to \mathbb{R}$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$ ja

- osamäärä $\frac{f}{g} : C \to \mathbb{R}$, $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, missä $C \subseteq A$ on joukko missä $g(x) \neq 0$

on jatkuva. Jos $f : A \to B$ on jatkuva ja kääntyvä, niin käänteiskuvaus $f^{-1} : B \to A$ on jatkuva. Jos $f : A \to B$ ja $g : B \to C$ ovat jatkuvia, niin yhdistetty kuvaus $g \circ f : A \to C$ on jatkuva.

Esimerkki 3.1.13.

(a) *Kaikki esimerkin 3.1.5 funktiot ovat alkeisfunktioita, joten ne ovat jatkuvia määrittelyjoukoissaan. Huomaa, että tämän mukaan esimerkiksi* $f(x) = \frac{1}{x}$ *on jatkuva määrittelyjoukossaan eli joukossa* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$*. Koska* $f(x)$ **ei ole määritelty** *kun* $x = 0$*, ei* f *voi olla jatkuva kun* $x = 0$.

(b) *Kaikki esimerkin 3.1.6 funktiot ovat alkeisfunktioiden yhdistettyjä funktioita, joten ne ovat jatkuvia määrittelyjoukoissaan.*

(c) *Funktio* $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \cos(x^2 e^x - \pi)$ *on muodostettu yhdistämällä ja kertomalla alkeisfunktioita, joten* f *on jatkuva määrittelyjoukossaan, joka on* $M_f = \mathbb{R}$.

(d) *Funktio* $f(x) = \frac{\sin(x) - e^x + 1}{x^{\frac{1}{2}}}$ *on muodostettu yhdistämällä ja jakamalla alkeisfunktioita, joten* f *on jatkuva määrittelyjoukossaan. Funktio* f *on määritelty kun* $\sin(x)$, e^x, *ja* $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ *on määritelty, ja* $x^{\frac{1}{2}} \neq 0$*. Nämä ehdot toteutuvat kun* $x > 0$*, joten määrittelyjoukko on* $M_f = (0, \infty)$.

Esimerkki 3.1.14. *Funktio*

$$f(x) = \frac{e^{x^2 - 12} + \cos(\log(x^2 + 3))}{x^4 + 1 + (\tan(\sin(x)))^2}$$

on muodostettu yhdistämällä ja kertomalla alkeisfunktioita, joten f *on jatkuva määrittelyjoukossaan. Funktion määrittelyjoukko on* $M_f = \mathbb{R}$*, sillä*

(1) $\tan(\sin(x))$ *on määritelty kaikilla* $x \in \mathbb{R}$*, koska* $\sin(x) \in [-1, 1]$*, ja* $\tan(y)$ *on määritelty kun* $y \in [-1, 1]$,

(2) $\log(x^2 + 3)$ *on määritelty kaikilla* $x \in \mathbb{R}$*, koska* $x^2 + 3 > 0$*, ja* $\log(y)$ *on määritelty kun* $y > 0$,

(3) $x^4 + 1 + (\tan(\sin(x)))^2 \geq 1$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$*, eli nimittäjä ei ole ikinä nolla.*

Funktiolla $f : A \to B$ on *oikeanpuoleinen raja-arvo* pisteessä $x_0 \in A$, jos on olemassa jokin luku $a \in \mathbb{R}$, jolle

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = a.$$

Funktiolla $f : A \to B$ on *vasemmanpuoleinen raja-arvo* pisteessä $x_0 \in A$, jos on olemassa jokin luku $b \in \mathbb{R}$, jolle

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = b.$$

Funktio f on *oikealta jatkuva pisteessä* x_0, jos $f(x_0) = a$ ja *vasemmalta jatkuva pisteessä* x_0, jos $f(x_0) = b$. Se on jatkuva, jos se on sekä oikealta että vasemmalta jatkuva eli $a = b$.

Esimerkki 3.1.15. *Olkoon* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -1, & \textit{kun } x < 0 \\ x^2, & \textit{kun } x \geq 0 \end{cases}$. *Tarkastellaan funktion* f *mahdollisia raja-arvoja pisteessä* $x_0 = 0$. *Kun* $x \to 0+$ *eli* x *lähestyy nollaa oikealta, niin funktio* f *saa arvoja* x^2. *Kun* x *on lähellä nollaa, niin myös* x^2 *on lähellä nollaa. Siis*

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} x^2 = 0.$$

Kun $x \to 0-$ *eli* x *lähestyy nollaa vasemmalta, niin* f *saa aina arvon* -1.*Siis*

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} -1 = -1.$$

Koska $f(0) = 0 = \lim_{x \to x_0+} f(x)$, *on* f *oikealta jatkuva pisteessä* 0. *Koska* $\lim_{x \to x_0-} f(x) \neq 0$, *funktio* f *ei ole vasemmalta jatkuva pisteessä* 0, *eikä siis myöskään jatkuva pisteessä* 0.

Esimerkki 3.1.16. *Esimerkin 3.1.8 kuvaus* $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$, $f(x) = \begin{cases} x, \ \textit{jos } x \leq 0, \\ x^2, \ \textit{jos } x > 0, \end{cases}$ *on jatkuva väleillä* $[-1, 0)$ *ja* $(0, 1]$, *koska alkeisfunktiot ovat jatkuvia määrittelyjoukoissaan. Tutkitaan kuvauksen jatkuvuutta pisteessä* 0. *Kun* $x > 0$, *niin funktio* f *saa arvoja* x^2, *ja raja-arvo kun* $x \to 0+$ *on tällöin*

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} x^2 = 0.$$

Kun $x \to 0-$ *eli* x *lähestyy nollaa vasemmalta, niin* f *saa arvoja* x, *joten raja-arvo vasemmalta on*

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} x = 0.$$

Koska $\lim_{x \to 0-} = \lim x \to 0+ = f(0)$, *on funktio jatkuva pisteessä* 0. *Siis* f *on jatkuva kaikissa pisteissä* $x \in [-1, 1]$, *eli* f *on jatkuva. Myös funktion* f *käänteiskuvaus* $f^{-1} : [-1, 1] \to [-1, 1]$ *on näin ollen jatkuva.*

3.2 Yhden muuttujan funktion differentiaalilaskentaa

3.2.1 Differentioituvuus ja derivaattafunktio

Funktion $f : A \to B$ *erotusosamäärä* pisteessä $x_0 \in A$ on

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Erotusosamäärä kertoo funktion **keskimääräisen** kasvunopeuden pisteiden x ja x_0 välillä. Funktion kuvaajalla tämä tarkoittaa pisteiden $(x, f(x))$ ja $(x_0, f(x_0))$ läpi kulkevan suoran (ns. *sekantin*) kulmakerrointa. Funktion **hetkellinen** kasvunopeus pisteessä x_0 saadaan raja-arvona erotusosamäärästä kun $x \to x_0$. Jos raja-arvo

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

on olemassa, niin sanotaan että funktio f on *derivoituva pisteessä* x_0 ja $f'(x_0)$ on funktion f *derivaatta* pisteessä x_0. Funktion kuvaajalla luku $f'(x_0)$ on pisteeseen $(x_0, f(x_0))$ piirretyn *tangenttisuoran* kulmakerroin. Jos f on derivoituva pisteessä x_0, niin määritelmän mukaan on olemassa raja-arvo $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Koska nimittäjän raja-arvo on 0, on tällöin oltava myös $\lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$, eli f on jatkuva pisteessä x_0.

Jatkuvuudesta puolestaan ei seuraa derivoituvuus (ks. esimerkki 3.2.1(c)).

Esimerkki 3.2.1.

(a) *Olkoon* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ *ja* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Silloin*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1.$$

Raja-arvo on olemassa, joten f *on derivoituva pisteessä* x_0 *ja derivaatta on* $f'(x_0) = 1$. *Funktion* f *kuvaajalle mihin tahansa pisteeseen* $(x_0, f(x_0))$ *piirretty tangenttisuora on funktion kuvaaja itse. Tämän suoran kulmakerroin on* $f'(x_0) = 1$.

(b) *Olkoon* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ *ja* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Silloin*

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0 + h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0} e^h - e^{x_0}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0}(e^h - 1)}{h} = \lim_{h \to 0} e^{x_0} \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\to 1} = e^{x_0}.\end{aligned}$$

Siis f on derivoituva pisteessä x_0, ja $f'(x_0) = e^{x_0} = f(x_0)$. Funktion kuvaajalle pisteeseen $(0, f(0)) = (0, 1)$ piirretyn tangenttisuoran kulmakerroin on siis $f'(0) = e^0 = 1$, ja pisteeseen $(1, f(1)) = (1, e)$ piirretyn tangenttisuoran kulmakerroin on $f'(1) = e^1 = e$.

(c) *Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, ja $x_0 = 0$. Nyt*

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0+} 1 = 1,$$

ja

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0-} -1 = -1.$$

Siis ei ole olemassa raja-arvoa $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, joten f ei ole derivoituva pisteessä $x_0 = 0$. Funktion f graafilla ei ole tangenttisuoraa kohdassa $(0, 0)$, koska siinä on "piikki".

Funktio $f : A \to B$ on *derivoituva*, jos se on derivoituva jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä $x_0 \in A$. Silloin derivaatat (eli tangenttisuorien kulmakertoimet) määrittävät *derivaattafunktion*

$$f' : A \to \mathbb{R},\ f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Derivaattafunktiosta käytetään myös merkintöjä Df ja $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Näin saadaan siis uusi funktio, jota voimme vaikka yrittää derivoida uudestaan. Jos f' on derivoituva, niin sen derivaattafunktiota merkitään yleensä f''.

Esimerkki 3.2.2.

(a) *Esimerkissä 3.2.1(a) selvitimme että funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ on derivoituva kaikissa pisteissä $x_0 \in \mathbb{R}$, ja $f'(x_0) = 1$. Siis funktio f on derivoituva, ja sen derivaattafunktio on $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = 1$.*

(b) *Esimerkissä 3.2.1(b) selvitimme, että funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ on derivoituva kaikissa pisteissä $x_0 \in \mathbb{R}$, ja $f'(x_0) = e^{x_0}$. Siis funktio f on derivoituva, ja sen derivaattafunktio on $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x$. Siispä myös $f''(x) = e^x$. Ja $f'''(x) = e^x$, ja...*

3.2.2 Derivoimissääntöjä

Derivaatan määritelmästä voidaan johtaa derivoimissääntöjä.

Esimerkki 3.2.3. (a) *Olkoon* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vakiofunktio* $f(x) = a$ *jollakin* $a \in \mathbb{R}$. *Silloin*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a-a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. *Siis funktion* $f(x) = a$ *derivaattafunktio on* $f'(x) = 0$.

(b) *Olkoon* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. *Silloin* $f(x+h) = (x+h)^2 = x^2+2xh+h^2$ *ja*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x. \end{aligned}$$

Siis funktion $f(x) = x^2$ *derivaattafunktio on* $f'(x) = 2x$.

Emme todista kaikkia sääntöjä tällä kurssilla, vaan otamme seuraavat säännöt käyttöön ilman todistusta.

- potenssifunktio $f(x) = x^n$: $f'(x) = nx^{n-1}$
- juurifunktio $f(x) = \sqrt[n]{x}$: $f'(x) = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$
- yleisemmin: jos $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ja $f(x) = x^r$, niin $f'(x) = rx^{r-1}$.
- polynomifunktio $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$: $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$
- trigonometriset funktiot:
  (i) $\sin'(x) = \cos(x)$
  (ii) $\cos'(x) = -\sin(x)$
  (iii) $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2$
- eksponenttifunktio $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$. Jos $f(x) = a^x$ ($a > 0$ ja $a \neq 1$), niin $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$
- luonnolliselle logaritmifunktiolle pätee $D \log x = \frac{1}{x}$, ja yleisesti logaritmifunktioille $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$ ja $a \neq 1$) pätee $f'(x) = \frac{1}{\log(a) \cdot x}$

Lisäksi, jos f ja g ovat derivoituvia funktioita ja $c \in \mathbb{R}$, niin

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ (Derivoinnin lineaarisuus 1/2)
- $(cf)'(x) = cf'(x)$ (Derivoinnin lineaarisuus 2/2)
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (Tulon derivointi)
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ (Osamäärän derivointi)
- $(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x)f'(x) = g'(f(x))f'(x)$ (Ketjusääntö)

Esimerkki 3.2.4.

(a) $D(\sqrt{x}) = D(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(b) $D(\frac{1}{x^4}) = D(x^{-4}) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = \frac{-4}{x^5}$.

(c) $D(2x + \log x) = 2Dx + D\log x = 2 + \frac{1}{x}$.

(d) *Olkoon* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, *ja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$. *Tällöin* $(g \circ f)(x) = (3x)^2 = 9x^2$, *joten derivoinnin lineaarisuuden mukaan*

$$(g \circ f)'(x) = D(9x^2) = 9D(x^2) = 9 \cdot 2x = 18x.$$

(e) *Lasketaan (c)-kohta myös käyttämällä ketjusääntöä. Koska* $g'(x) = 2x$ *ja* $f'(x) = 3$, *on*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = \underbrace{2 \cdot 3x}_{g'(f(x))} \cdot \underbrace{3}_{f'(x)} = 18x.$$

(f) *Tulon derivoimissäännöllä saadaan*

$$D\left(\underbrace{(3x^2-1)}_{f(x)}\underbrace{\sin x}_{g(x)}\right) = \underbrace{6x}_{f'(x)}\underbrace{\sin x}_{g(x)} + \underbrace{(3x^2-1)}_{f(x)}\underbrace{\cos x}_{g'(x)}.$$

(g) *Lasketaan* $D(x\log(x))$ *tulon derivoimissäännöllä:*

$$D\left(\underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{\log(x)}_{g(x)}\right) = \underbrace{D(x)}_{f'(x)}\underbrace{\log(x)}_{g(x)} + \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{D(\log(x))}_{g'(x)} = \log(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \log(x) + 1.$$

(h) *Derivoidaan* $(\cos x)^2 = \cos^2 x$ *ketjusäännön avulla. Tällöin ulkofunktio on* $g(x) = x^2$ *ja sisäfunktio on* $f(x) = \cos x$, *jolloin*

$$D\left(\underbrace{\cos^2 x}_{(g\circ f)(x)}\right) = \underbrace{2\cos x}_{g'(f(x))} \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{f'(x)} = -2\cos x \sin x.$$

(i) *Lasketaan rationaalifunktion* $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ *derivaatta osamäärän derivoimissäännöllä:*

$$\begin{aligned} D\left(\frac{\overbrace{x^2+x+1}^{f(x)}}{\underbrace{x^2+1}_{g(x)}}\right) &= \frac{\overbrace{D(x^2+x+1)}^{f'(x)}\overbrace{(x^2+1)}^{g(x)}-\overbrace{(x^2+x+1)}^{f(x)}\overbrace{D(x^2+1)}^{g'(x)}}{\underbrace{(x^2+1)^2}_{g(x)^2}} \\ &= \frac{(2x+1)(x^2+1)-(x^2+x+1)2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(2x^3+2x+x^2+1)-(2x^3+2x^2+2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

(j) $D\left(\frac{\sin x}{x^2}\right) = \frac{(D\sin x)x^2-\sin x Dx^2}{(x^2)^2} = \frac{(\cos x)x^2-(\sin x)2x}{x^4} = \frac{x\cos x-2\sin x}{x^3}$.

(k) *Ketjusäännöllä saadaan* $D(e^{-x^2}) = -2xe^{-x^2}$. *Tässä ulkofunktio on* $g(x)=e^x$ *ja sisäfunktio on* $f(x)=-x^2$.

(l) *Kohta (k) yleisemmin: Jos* f *on derivoituva funktio, niin ketjusäännön nojalla on* $D\left(\underbrace{e^{f(x)}}_{g(f(x))}\right) = \underbrace{e^{f(x)}}_{g'(f(x))} f'(x)$.

(m) *Johdetaan kaava* $D(a^x)=a^x\log(a)$, *kun tiedetään että* $D(e^x)=e^x$ *ja* $\log(x)$ *on funktion* e^x *käänteisfunktio:*

$$D(a^x) = D(e^{\log(a^x)}) = D(e^{x\log(a)}) = \log(a)e^{x\log(a)} = \log(a)a^x.$$

(n) *Jos* f *on derivoituva funktio, niin ketjusäännöllä saadaan*

$$D\left(\log(f(x))\right) = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

kun $f(x)\neq 0$.

3.2.3 Implisiittinen derivointi

Funktion $f : A \to B$ kuvaaja on joukko, joka muodostuu niistä tason pisteistä (x, y), jotka toteuttavat yhtälön $y = f(x)$. Myös esimerkiksi yhtälö $x^2 + y^2 = 4$ määrittelee tason joukon (ympyrän), mutta ei ole olemassa funktiota f, jonka avulla yhtälön voisi esittää *eksplisiittisessä* muodossa $y = f(x)$, koska yhtälön ratkaisu $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$ määrittelee kaksi funktiota $f_1 : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sqrt{4 - x^2}$, ja $f_2 : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = -\sqrt{4 - x^2}$.

Yhtälö

$$F(x, y) = 0$$

on funktion $y = y(x)$ *implisiittinen* eli ratkaisematon esitysmuoto ja se ei aina määrää funktiota yksikäsitteisesti, kuten tapauksessa $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ joka määritteli kaksi eri funktiota.

Implisiittisesti määritellyn funktion y derivaatan y' selvittämiseen on kaksi keinoa:

1. Jos yhtälöstä voidaan ratkaista muuttuja y muuttujan x funktiona, eli muodossa $y = y(x)$, niin funktio $y(x)$ voidaan derivoida normaalisti.

2. Oletetaan, että $y = y(x)$ ja derivoidaan funktio $F(x, y(x))$ muuttujan x suhteen. Saadaan derivaattafunktio, jossa esiintyy x, $y(x)$ ja $y'(x)$ eli $D\left(F(x, y(x))\right) = h(x, y(x), y'(x))$. Koska $F(x, y(x)) = 0$, niin myös $D\left(F(x, y(x))\right) = 0$, eli derivaattafunktio on nolla. Yhtälöstä $h(x, y(x), y'(x)) = 0$ pyritään ratkaisemaan $y'(x)$ muuttujien x ja $y(x)$ funktiona, eli muodossa

   $$y'(x) = g(x, y(x)).$$

   Funktion y' arvoja voidaan nyt laskea tästä yhtälöstä. Jos esimerkiksi halutaan tietää $y'(0)$, niin ratkaistaan ensin y yhtälöstä $F(0, y) = 0$, merkitään $y(0) = y$, ja ratkaistaan sen jälkeen $y'(0)$ yhtälöstä $y'(0) = g(0, y(0))$.

Huomautus 3.2. *Jos ei haluta ratkaista derivaattafunktiota y', vaan pelkästään sen arvo jossakin pisteessä (esimerkiksi $y'(0)$), niin ei ole välttämätöntä päästä muotoon*

$$y'(x) = g(x, y(x)).$$

Esimerkiksi arvo $y'(0)$ voidaan ratkaista jo yhtälöstä

$$h(0, y(0), y'(0)) = 0,$$

kunhan tunnetaan arvo $y(0)$.

Esimerkki 3.2.5.

(a) *Derivoidaan* $x^2 + y^2 - 4 = 0$ *implisiittisesti: Oletetaan että* $y = y(x)$. *Yhtälöstä*

$$\begin{aligned} DF(x, y(x)) &= D(x^2 + (y(x))^2 - 4) = D(x^2) + D(y(x)^2) - D(4) \\ &= 2x + 2y(x)y'(x) = 0 \end{aligned}$$

ratkaistaan

$$y'(x) = \frac{-2x}{2y(x)} = -\frac{x}{y(x)} = -\frac{x}{\pm\sqrt{4-x^2}} = \mp\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Tässä voi käyttää myös eksplisiittistä derivointia derivoimalla funktiot f_1 *ja* f_2 *erikseen:*

$$f_1'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = -f_2'(x).$$

(b) *Yhtälön* $xy^3 + 2xy - 6 = 0$ *eksplisiittistä muotoa on vaikea ratkaista. Oletetaan, että muuttuja* y *voidaan esittää muuttujan* x *funktiona* $y = y(x)$ *ja etsitään* $y'(2)$ *implisiittisen derivoinnin avulla.*

$$DF(x, y(x)) = D(xy(x)^3 + 2xy(x) - 6) = y(x)^3 + x3y(x)^2y'(x) + 2y(x) + 2xy'(x)$$

saadaan

$$\begin{aligned} y(x)^3 + 2y(x) + (3xy(x)^2 + 2x)y'(x) &= 0 \\ y'(x) &= -\frac{y(x)^3 + 2y(x)}{3xy(x)^2 + 2x} \end{aligned}$$

Kun $x = 2$, *niin yhtälö*

$$xy^3 + 2xy - 6 = 2y^3 + 4y - 6 = 0$$

toteutuu vain kun $y = 1$, *sillä*

$$2y^3 + 4y - 6 = (y-1)(2y^2 + 2y + 6) = 2(y-1)\left(\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}\right).$$

Siis on $y(2) = 1$, *ja nyt voimme laskea*

$$y'(2) = -\frac{y(2)^3 + 2y(2)}{3 \cdot 2 \cdot y(2)^2 + 2 \cdot 2} = -\frac{1^3 + 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2} = -\frac{3}{10}.$$

Esimerkki 3.2.6. *Määrätään y' funktion y ja muuttujan x avulla, kun funktion y määrittelee yhtälö*

$$x^2y + 2y^3 = 3x + 2y.$$

Merkitään $y = y(x)$, jolloin yhtälö saa muodon

$$x^2y(x) + 2y(x)^3 = 3x + 2y(x).$$

Derivoidaan tämä puolittain muuttujan x suhteen jolloin saadaan

$$2xy(x) + x^2y'(x) + 2 \cdot 3y(x)^2y'(x) = 3 + 2y'(x)$$

eli

$$y'(x)\left(6y(x)^2 + x^2 - 2\right) = 3 - 2xy(x),$$

josta voidaan ratkaista

$$y'(x) = \frac{3 - 2xy(x)}{6y(x)^2 + x^2 - 2}.$$

3.2.4 Funktion monotonisuus

Kuvaus f on *kasvava* välillä $[a,b]$ jos $f(x) \leq f(z)$ kaikilla $x, z \in [a,b]$ joilla $x < z$, ja *aidosti kasvava* jos tällaisilla x, z päteekin $f(x) < f(z)$. Funktion suurin arvo kyseisellä välillä löytyy silloin välin loppupisteestä ja pienin arvo alkupisteestä.

Kuvaus f on *vähenevä* välillä $[a,b]$ jos $f(x) \geq f(z)$ kaikilla $x, z \in [a,b]$ joilla $x < z$, ja *aidosti vähenevä* jos tällaisilla x, z päteekin $f(x) > f(z)$. Funktion suurin arvo kyseisellä välillä löytyy silloin välin alkupisteestä ja pienin arvo loppupisteestä.

Kuvaus f on *monotoninen* välillä $[a,b]$ jos f on joko kasvava tai vähenevä välillä $[a,b]$.

Oletetaan että kuvaus f on derivoituva välillä (a,b). Kuvauksen f derivaatta pisteessä x "kertoo mihin suuntaan f on menossa pisteessä x". Tämän vuoksi päteekin seuraavat tulokset:

- Jos $f'(x) \geq 0$ kaikilla $x \in (a,b)$, niin f on kasvava välillä (a,b).
- Jos $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in (a,b)$, niin f on aidosti kasvava välillä (a,b).
- Jos $f'(x) \leq 0$ kaikilla $x \in (a,b)$, niin f on vähenevä välillä (a,b).
- Jos $f'(x) < 0$ kaikilla $x \in (a,b)$, niin f on aidosti vähenevä välillä (a,b).

Jos kuvaus f on lisäksi jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$, niin ylläolevat ominaisuudet pätevät suljetulla välillä $[a,b]$. Esimerkiksi jos $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in (a,b)$, niin f on aidosti kasvava välillä $[a,b]$. Lisäksi, jos f on jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$, niin $f'(x)$ saa jopa olla nolla tai määrittelemätön yksittäisissä välin (a,b) pisteissä.

Yllä olevat ominaisuudet voidaan perustella *differentiaalilaskennan väliarvolauseella*[2], joka toteaa seuraavaa: Jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, ja lisäksi derivoituva avoimella välillä (a,b), niin on olemassa $c \in (a,b)$ siten että

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tämä tarkoittaa, että funktion kuvaajalla pisteessä $(c, f(c))$ olevan tangenttisuoran kulmakerroin on sama kuin pisteiden $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$ välille piirretyn sekantin kulmakerroin.

Perustellaan tämän avulla se, että ehdosta $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in (a,b)$ seuraa funktion f aito kasvavuus välillä (a,b). Olkoon $y, z \in (a,b)$ siten että

[2] Yksi hienoimmista differentiaalilaskennan tuloksista

$y < z$, ja todistetaan että $f(y) < f(z)$. Väliarvolauseen nojalla on olemassa $c \in (y, z)$ siten että

$$f'(c) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y},$$

eli

$$f(z) - f(y) = f'(c) \cdot (z - y).$$

Koska $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in (y, z)$, on erityisesti $f'(c) > 0$, joten $f'(c) \cdot (z - y) > 0$. Siispä $f(z) - f(y) > 0$, eli $f(z) > f(y)$, eli f on aidosti kasvava.

Esimerkki 3.2.7.

(a) *Funktio* $f(x) = (x + 1)^3 + x$ *on aidosti kasvava koko reaaliakselilla, koska* $f'(x) = 3(x + 1)^2 + 1 > 0$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$.

(b) *Funktio* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 12$ *on aidosti kasvava koko reaaliakselilla, koska* f *on jatkuva ja* $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2 > 0$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(c) *Olkoon* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(x^2 + 1) + x$. *Tällöin* $f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x + 1 = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x^2+1} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \geq 0$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$, *ja* $f'(x) = 0$ *vain kun* $x = -1$. *Koska* f *on jatkuva (huomaa että* $\log(x^2 + 1)$ *on määritelty kaikilla* $x \in \mathbb{R}$*), on* f *aidosti kasvava koko määrittelyjoukossaan.*

(d) *Funktio* $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ *on aidosti kasvava välillä* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, *koska* $D(\tan(x)) = 1 + \tan^2(x) > 0$.

(e) *Funktion* $f(x) = -x^4 + 3$ *derivaattafunktio on* $f'(x) = -4x^3$. *Koska* $f'(x) < 0$ *kun* $x > 0$, *ja* $f'(x) > 0$ *kun* $x < 0$, *on* f *aidosti kasvava välillä* $(-\infty, 0]$, *ja aidosti vähenevä välillä* $[0, \infty)$.

(f) *Funktio* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ *on jatkuva, ja lisäksi se on derivoituva kaikkialla paitsi nollassa. Kun* $x > 0$, *on* $f(x) = x$, *joten* $f'(x) = 1$. *Kun* $x < 0$, *on* $f(x) = -x$, *joten* $f'(x) = -1$. *Siis* $f'(x) < 0$ *kaikilla* $x \in (-\infty, 0)$ *ja* $f'(x) > 0$ *kaikilla* $x \in (0, \infty)$. *Tämän (ja funktion* f *jatkuvuuden) perusteella* f *on aidosti vähenevä välillä* $(-\infty, 0]$ *ja aidosti kasvava välillä* $[0, \infty)$.

(g) *Olkoon* $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$. *Esimerkissä 3.2.4(i) saatiin derivaattafunktioksi* $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. *Koska derivaattafunktion nimittäjä* $(x^2 + 1)^2$ *on aina positiivinen, on derivaattafunktion merkki sama kuin osoittajan* $1 - x^2$ *merkki. Siispä* $f'(x) < 0$ *kun* $x < -1$ *tai* $x > 1$, *ja* $f'(x) > 0$ *kun*

$x \in (-1, 1)$. Siis f on aidosti vähenevä väleillä $(-\infty, -1]$ ja $[1, \infty)$, sekä aidosti kasvava välillä $[-1, 1]$.

Esimerkki 3.2.8.

(a) *Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Tällöin $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3(x^{\frac{1}{3}})^2} \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Lisäksi $f'(x)$ on ääretöntä jos ja vain jos $x = 0$. Koska f on lisäksi jatkuva koko määrittelyjoukossaan, on se aidosti kasvava koko määrittelyjoukossaan.*

(b) *Olkoon $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{x}$. Tällöin $f'(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Siis f on kasvava välillä $(-\infty, 0)$, ja välillä $(0, \infty)$. Kuvaus f* **ei kuitenkaan ole kasvava koko määrittelyjoukossaan**, *sillä esimerkiksi $f(-1) = 1 > -1 = f(1)$, vaikka $-1 < 1$. Ero kohtaan (a) on se, ettei f ole jatkuva (eikä edes määritelty) suljetulla välillä joka sisältää nollan.*

3.2.5 Funktion ääriarvot

Määritellään, mitä tarkoitamme *lokaaleilla ääriarvoilla.* Kuvauksella $f : A \to B$ on pisteessä $x_0 \in A$ *lokaali minimi* (vastaavasti *lokaali maksimi*), jos kaikilla **pisteen x_0 läheisyydessä** olevilla pisteillä $x \in A$ pätee $f(x) \geq f(x_0)$ (vastaavasti $f(x) \leq f(x_0)$).

Globaalit ääriarvot puolestaan määritellään seuraavasti: Kuvauksella $f : A \to B$ on pisteessä $x_0 \in A$ *globaali minimi* (vastaavasti *globaali maksimi*), jos **kaikilla** pisteillä $x \in A$ pätee $f(x) \geq f(x_0)$ (vastaavasti $f(x) \leq f(x_0)$).

Huomaa että globaali ääriarvo on aina myös lokaali ääriarvo; jos x_0 on ääriarvo **koko** joukossa (eli globaali), se on ääriarvo myöskin kaikissa ympäristöissään.

Siispä keskitymme etsimään lokaaleja ääriarvoja; jos kuvauksella on olemassa globaali ääriarvo, se löytyy lokaalien ääriarvojen joukosta. Muistetaan lisäksi, että suljetulla välillä määritelty jatkuva kuvaus saavuttaa aina miniminsä ja maksiminsa, eli tällaisella kuvauksella on aina olemassa globaali minimi ja globaali maksimi. On kuitenkin olemassa myös kuvauksia joilla ei ole ääriarvoja:

Esimerkki 3.2.9. *Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Tällöin $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ja $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, joten funktiolla ei ole globaaleja ääriarvoja.*

Funktion f lokaaleja ääriarvoja voi löytyä **ainoastaan**

- määrittelyjoukon M_f reunapisteistä (yleensä M_f on joko väli tai välien yhdiste),
- derivaatan nollakohdista,
- pisteistä joissa f ei ole derivoituva.

Esimerkki 3.2.10. *Etsitään kuvauksen $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$ lokaalit ja globaalit ääriarvot. Koska f on derivoituva välillä $(0, 2)$, voivat lokaalit ääriarvot olla vain derivaatan nollakohdissa tai määrittelyjoukon reunapisteissä (0 ja 2). Derivaatta on*

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \begin{cases} < 0, & \textit{kun } 3x^2 - 1 < 0 \textit{ eli } x < \sqrt{\frac{1}{3}} \\ = 0, & \textit{kun } 3x^2 - 1 = 0 \textit{ eli } x = \sqrt{\frac{1}{3}} \\ > 0, & \textit{kun } 3x^2 - 1 > 0 \textit{ eli } x > \sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

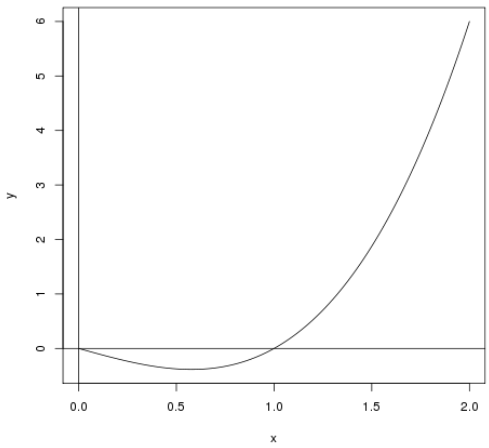
Siis f on vähenevä välillä $[0, \sqrt{1/3})$ ja kasvava välillä $(\sqrt{1/3}, 2]$. Kerätään tämä tieto kulkukaavioon*:*

x	$(0, \sqrt{1/3})$	$(\sqrt{1/3}, 2)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Kulkukaavion (eli monotonisuuden) perusteella kuvauksella on yksi lokaali minimi, se sijaitsee pisteessä $\sqrt{1/3}$. Kulkukaavion perusteella tämä on myös globaali minimi, ja sen arvo on

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \sqrt{\frac{1}{3}}^3 - \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}^2 - 1\right) = \sqrt{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3} - 1\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Kuvauksella on lisäksi kaksi lokaalia maksimia, ne sijaitsevat pisteissä 0 ja 2, ja arvot ovat $f(0) = 0$ ja $f(2) = 2^3 - 2 = 6$. Kuvaus on jatkuva suljetulla välillä, joten se saavuttaa maksiminsa. Siis globaalin maksimin on oltava 6.



Esimerkki 3.2.11. *Etsitään kuvauksen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x) - |x| + 2$ lokaalit ääriarvot. Kuvaus ei ole derivoituva pisteessä $x = 0$, koska*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x) - x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1} -1 \right) = 0$$

ja

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x) + x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \left(\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1} +1 \right) = 2.$$

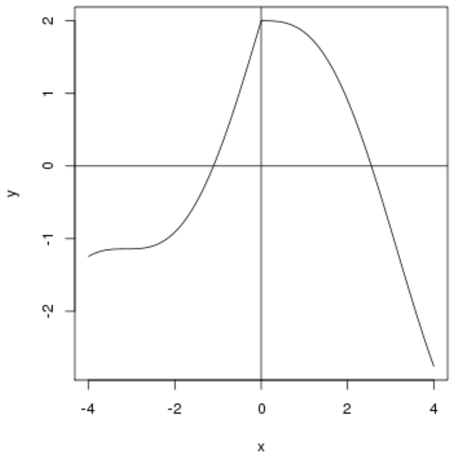
Kuvaus f on derivoituva väleillä $(-\infty, 0)$ ja $(0, \infty)$, ja

$$f'(x) = \begin{cases} \cos(x) + 1, & x < 0 \\ \cos(x) - 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Koska $\cos(x) \in [-1, 1]$ kaikilla x ja $\cos(x) = -1$ kun $x = \pi + 2k\pi$ jollain $k \in \mathbb{Z}$ ja $\cos(x) = 1$ kun $x = 2k\pi$ jollain $k \in \mathbb{Z}$, niin derivaatalle pätee

x	$\cdots$	$(-3\pi, -\pi)$	$(-\pi, 0)$	$(0, 2\pi)$	$(2\pi, 4\pi]$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

Kuvauksella on globaali maksimi pisteessä $x = 0$ ja se on $f(x) = \sin(0) - |0| + 2 = 2$. Muita lokaaleja ääriarvopisteitä ei ole. Huomaa, että vaikka esimerkiksi $f'(-\pi) = 0$, niin se ei ole ääriarvopiste.



Esimerkki 3.2.12. (a) *Selvitetään kuvauksen* $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - \frac{5}{3}x^3$ *ääriarvot laskemalla ensin derivaatan nollakohdat:*

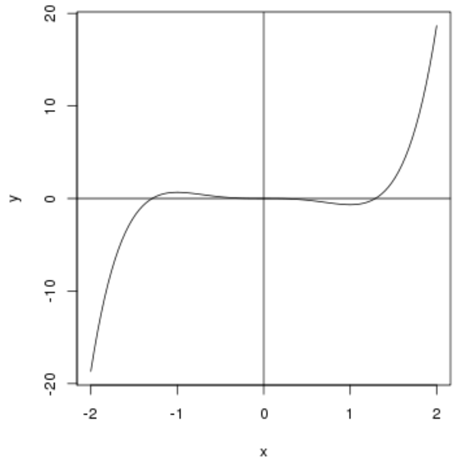
$$f'(x) = 5x^4 - 5x^2 = 5x^2(x^2-1) = 0,$$

jos $x = 0$, $x = 1$ *tai* $x = -1$. *Näistä pisteistä ja välin* $[-2,2]$ *päätepisteistä syntyvillä väleillä* f *on joko aidosti kasvava tai aidosti vähenevä ja ääriarvot löytyvät noista pisteistä.*

x	$[-2,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,2]$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Lasketaan funktion f *arvot määrittelyjoukon päätepisteissä ja derivaatan nollakohdissa:*
$f(-2) = (-2)^5 - \frac{5}{3}(-2)^3 = -32 - \frac{5\cdot(-8)}{3} = -\frac{96-40}{3} = -18\frac{2}{3}$
$f(-1) = (-1)^5 - \frac{5}{3}(-1)^3 = -1 + \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$
$f(0) = 0^5 - \frac{5}{3} \cdot 0 = 0$
$f(1) = 1^5 - \frac{5}{3} \cdot 1^3 = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$
$f(2) = 2^5 - \frac{5}{3} \cdot 2^3 = 32 - \frac{5\cdot 8}{3} = 18\frac{2}{3}$
Pienin arvo löytyi pisteestä $x = -2$. *Myös pisteessä* $x = 1$ *oli pieni arvo, jonka molemmin puolin on sitä suurempia arvoja eli siinä on lokaali minimi: se on välin* $(-1,2)$ *pienin arvo. Suurin arvo taas on*

pisteessa $x = 2$ ja pisteessä $x = -1$ on lokaali maksimi; välin $(-2, 1)$ suurin arvo.



(b) *Kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - \frac{5}{3}x^3$, ei saavuta suurinta tai pienintä arvoa, koska se voi saada miten tahansa pienen arvon ja miten tahansa suuren arvon. Sillä on kuitenkin lokaali minimi pisteessä $x = 1$ ja lokaali maksimi pisteessä $x = -1$.*

Esimerkki 3.2.13. *Selvitetään kuvauksen $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ suurin ja pienin arvo. Koska f on derivoituva, ääriarvoja voi löytyä ainoastaan derivaatan nollakohdista ja välin päätepisteistä. Esimerkissä 3.2.4(i) laskimme*

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2},$$

josta huomaamme, että $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$, ja lisäksi

- *$f'(x) < 0$ kun $x < -1$ tai $x > 1$,*
- *$f'(x) > 0$ kun $x \in (-1, 1)$.*

Kerätään nämä tiedot kulkukaavioon:

x	$(-3, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Siis funktiolla f on lokaalit minimit kohdissa $x = -1$ ja $x = 3$, ja lokaalit maksimit kohdissa $x = 1$ ja $x = -3$. Arvot näissä pisteissä ovat

- $f(-3) = \frac{(-3)^2-3+1}{(-3)^2+1} = \frac{7}{10}$,
- $f(-1) = \frac{(-1)^2-1+1}{(-1)^2+1} = \frac{1}{2}$,
- $f(1) = \frac{(1)^2+1+1}{(1)^2+1} = \frac{3}{2}$,
- $f(3) = \frac{(3)^2+3+1}{(3)^2+1} = \frac{13}{10}$,

joten funktion pienin arvo (eli globaali minimi) on $\frac{1}{2}$, ja suurin arvo (eli globaali maksimi) on $\frac{3}{2}$.

Esimerkki 3.2.14. *Selvitetään funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} + 2x$ lokaalit ääriarvot. Funktio on derivoituva, joten ääriarvokohtia voi olla vain derivaatan nollakohdissa. Koska*

$$f'(x) = -e^{-x} + 2 = 2 - \frac{1}{e^x} = \frac{2e^x - 1}{e^x},$$

on $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \log(\frac{1}{2}) = -\log(2)$. Lisäksi

- *$f'(x) < 0$ kun $x < -\log(2)$,*
- *$f'(x) > 0$ kun $x > -\log(2)$,*

joten saamme kulkukaavion:

x	$(-\infty, -\log(2))$	$(-\log(2), \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Siis funktiolla on lokaali (ja myös globaali) minimi kohdassa $x = -\log(2)$, funktion arvo on

$$f(-\log(2)) = e^{-(-\log(2))} + 2(-\log(2)) = 2 - 2\log(2).$$

Esimerkki 3.2.15. *Selvitetään kuvauksen $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \log(\cos(x))$ lokaalit ääriarvot. Koska funktio f on derivoituva (kaikilla $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$), ääriarvokohtia voi olla vain derivaatan nollakohdissa. Koska*

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = 1 - \tan x,$$

on $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0 \overset{x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow} x = \frac{\pi}{4}$. Lisäksi

- *$f'(x) > 0$ kun $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$,*

- $f'(x) < 0$ *kun* $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$,

joten saamme kulkukaavion:

x	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Siis kuvauksella on lokaali (myös globaali) maksimi kohdassa $x = \frac{\pi}{4}$, *funktion arvo tässä kohdassa on*

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \log\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4} + \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log(2).$$

3.2.6 Approksimointi

Derivaatan määritelmän avulla voidaan arvioida funktion arvoja halutun pisteen läheisyydessä. Kun f on derivoituva pisteessä x, niin

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Kun h on lähellä nollaa, niin

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

mistä saadaan

$$\boxed{f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h}$$

Yllä olevassa arviossa $f(x) + f'(x)h$ on funktion kuvaajalle pisteeseen $(x, f(x))$ piirretyn tangenttisuoran arvo kohdassa $x + h$. Arvo $f(x+h)$ puolestaan on funktion arvo kohdassa $x + h$. Siis arviomme on, että pisteeseen $(x, f(x))$ piirretty tangenttisuora on lähellä funktion kuvaajaa pisteen x lähellä (eli kun h on pieni).

Samaa arviota voi käyttää myös toisin päin. Jos halutaan löytää esimerkiksi funktion f nollakohta, eli piste a jossa $f(a) = 0$, niin edetään seuraavasti:
(1) Tehdään ensin alkuarvaus x_0. Jos $f(x_0) = 0$ halutulla tarkkuudella, esimerkiksi kolmen desimaalin tarkkuudella, niin hyvä. Jos $f(x_0)$ on kaukana nollasta, tehdään uusi arvaus:
(2) Ratkaistaan h yhtälöstä $f(x_0) + f'(x_0)h = 0$, ja asetetaan $x_1 = x_0 + h$. Koska

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h = 0,$$

on mahdollista että $f(x_1)$ on lähes nolla. Jos ei, niin tehdään uusi arvaus:
(3) Ratkaistaan h_2 yhtälöstä $f(x_1) + f'(x_1)h_2 = 0$, ja asetetaan $x_2 = x_1 + h_2$. Koska

$$f(x_1 + h_2) \approx f(x_1) + f'(x_1)h_2 = 0,$$

on mahdollista että $f(x_2)$ on lähes nolla...
Näin jatkamalla saatamme päästä lähelle funktion f nollakohtaa. Tämä on nimeltään Newtonin menetelmä.

Esimerkki 3.2.16. *Esimerkissä 3.1.11 todettiin, että kuvauksen $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\ln|x|} + 3$ raja-arvo nollassa on 3. Raja-arvoa voi arvioida myös edellisen kaavan avulla asettamalla $h = -x$. Silloin*

$$'f(0)' =' f(x - x)' \approx f(x) + f'(x)(-x) = f(x) - f'(x)x.$$

Vertaillaan arvoja $f(x)$ ja $f(x)-xf'(x)$, kun x on lähellä pistettä $x_0 = 0$:

x	$0,1$	$-0,01$	$-0,003$	$0,0005$	$\to 0$
$f(x)$	$2,9565\ldots$	$3,0021\ldots$	$3,0005\ldots$	$2,9999\ldots$	$\to 3$
$f(x)-f'(x)x$	$2,9811\ldots$	$3,0004\ldots$	$3,00008\ldots$	$3,00000\ldots$	$\to 3$

Esimerkki 3.2.17. *Sirkan synnytys käynnistyi ennenaikaisesti ja matkaa sairaalaan on 7 km. Ambulanssi on kutsuttu ja sovittu, että Paavo lähtee kuljettamaan Sirkkaa ambulanssia vastaan. Ambulanssin kuljettaja arvioi kohtaamispaikkaa ja kohtaamisajanhetkeä autojen nopeuden perusteella.*

Muuttuja x edustaa aikaa (tunteina) joka on käytetty lähtöhetkestä, ja $f(x)$ on Sirkan ja Paavon etäisyys kotoaan kun x tuntia on kulunut. Silloin $f'(x)$ on auton nopeus. Jokaisella ajanhetkellä x arvo $f(x)$ nähdään auton matkamittarista ja $f'(x)$ nopeusmittarista. Ambulanssin etäisyys sairaalasta on $g(x)$, jolloin $g'(x)$ on ambulanssin nopeus.

Milloin ja missä auto ja ambulanssi arviolta kohtaavat, kun Paavon kuljettaman auton nopeus tällä hetkellä on 90 km/h, ja ambulanssin nopeus on 120 km/h? Auton kulkema matka h tunnin kuluttua on

$$f(h) \approx f(0) + f'(0)h = 90 \cdot h,$$

ja ambulanssin kulkema matka h tunnin kuluttua on

$$g(h) \approx g(0) + g'(0) \cdot h = 120 \cdot h.$$

Autot kohtaavat kun molempien etäisyys sairaalasta on sama, eli

$$g(h) = 7 - f(h).$$

Sijoittamalla tähän (molemmat) arviomme, saamme yhtälön

$$120 \cdot h \approx 7 - 90 \cdot h,$$

josta ratkaisemme $h = \frac{7}{210} = \frac{1}{30}$. Autot kohtaavat siis noin 2 minuutin kuluttua, jolloin etäisyys sairaalasta on

$$g\left(\frac{1}{30}\right) \approx g(0) + 120 \cdot \frac{1}{30} = 4 \ km.$$

Esimerkki 3.2.18. *Arvioidaan lukua $\sqrt{150}$. Olkoon $f(x) = \sqrt{x}$, jolloin $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Nyt ($x = 144$ ja $h = 6$)*

$$\sqrt{150} = f(150) \approx f(144) + f'(144)6 = \sqrt{144} + \frac{1}{2\sqrt{144}} \cdot 6 = 12 + \frac{6}{24} = 12\frac{1}{4}.$$

Esimerkki 3.2.19. *Olkoon* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$. *Koska* $f(1) = -4$ *ja* $f(2) = 10$ *ja* f *on jatkuva, on olemassa piste* $x \in (1, 2)$ *siten että* $f(x) = 0$. *Etsitään tätä pistettä Newtonin menetelmällä: Lasketaan ensin derivaatta:*

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 2.$$

Alkuarvaus olkoon vaikka $x_0 = 2$, *jossa siis* $f(x_0) = 10$, *ja lisäksi* $f'(x_0) = 22$. *Ratkaistaan* h *yhtälöstä*

$$f(x_0) + f'(x_0)h = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \Leftrightarrow \quad h = -\frac{10}{22} = -\frac{5}{11}.$$

Asetetaan $x_1 = x_0 + h = 2 - \frac{5}{11}$. *Nyt* $f(x_1) \approx 1.77$, *joten taitaa olla syytä jatkaa. Asetetaan*

$$h_2 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx -0.122$$

ja $x_2 = x_1 + h_2$, *jolloin* $x_2 \approx 1.423$, *ja* $f(x_2) \approx 0.112$. *Seuraavaksi asetetaan*

$$h_3 = -\frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx -0.009$$

ja $x_3 = x_2 + h_3$, *jolloin* $x_3 \approx 1.41426$, *ja* $f(x_3) \approx 0.0006$, *joka riittänee meille. Siis funktiolla* f *on nollakohta suunnilleen kohdassa* $x = 1.41426$.

3.3 Yhden muuttujan funktion integraalilaskentaa

Edellisessä osiossa käsiteltiin seuraavaa ongelmaa: kun tunnetaan funktio F, niin ratkaise sen derivaattafunktio F'. Tässä osiossa käsitellään vastakkaista ongelmaa; kun tunnetaan derivaattafunktio F', niin ratkaistaan funktio F.

3.3.1 Integraalifunktio

Oletetaan, että f on funktio, joka on määritelty välillä (a, b). Jos funktio $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdon

$$F'(x) = f(x) \quad \text{kaikilla } x \in (a, b),$$

niin F on funktion f *integraalifunktio* ja siitä käytetään merkintää

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

Jos f on jatkuva, niin sillä on aina olemassa integraalifunktio, mutta se ei ole yksikäsitteinen eli integraalifunktioita on monta: Onpa $C \in \mathbb{R}$ mikä tahansa luku, niin $F(x) + C$ on funktion f integraalifunktio, koska

$$D\left(F(x) + C\right) = DF(x) = f(x).$$

Muita integraalifunktioita ei olekaan: Jos F on **jokin** funktion f integraalifunktio, niin **kaikki** funktion f integraalifunktiot ovat muotoa

$$F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Lukua C kutsutaan *integroimisvakioksi.*

Esimerkki 3.3.1.

(a) *Selvitetään funktion* $f(x) = 6x$ *integraalifunktio* $\int 6x\mathrm{d}x$. $\int 6x\mathrm{d}x = 3x^2 + C$, *koska* $D(3x^2 + C) = 6x$.

(b) *Selvitetään funktion* $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ *integraalifunktio* $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$. $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = \log|x| + \sqrt{x} + C$, *koska* $D\left(\log|x| + \sqrt{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(c) *Selvitetään se funktion* $\sin(x)$ *integraalifunktio, joka saa arvon* 2*, kun* $x = \pi$. *Funktion* $\sin(x)$ *integraalifunktiot ovat muotoa*

$$F(x) = -\cos(x) + C,$$

sillä $D(-\cos(x)+C) = -D\cos(x) = -(-\sin(x)) = \sin(x)$. *Haluamme, että* $F(\pi) = 2$, *eli* $-\cos(\pi) + C = 2$. *Koska* $-(-\cos(\pi)) = -(-1) = 1$, *niin valitsemalla* $C = 1$ *saamme haluamamme integraalifunktion eli*

$$F(x) = -\cos(x) + 1.$$

Derivoimissäännöistä voidaan johtaa integroimissääntöjä:

- $\int a\mathrm{d}x = ax + C$
- $\int x^r \mathrm{d}x = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$, $r \neq -1$ (Huom! $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$)
- $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$
- $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$
- $\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$
- $\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + C$

Funktioiden summan, tulon ja yhdistetyn funktion derivoimissäännöistä saadaan seuraavat integroimiskaavat:

- $\int af(x)\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x$ (lineaarisuus 1/2)
- $\int (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$ (lineaarisuus 2/2)
- $\int g(f(x))f'(x)\mathrm{d}x = G(f(x))$, missä $G(x) = \int g(x)\mathrm{d}x$ (ketjusääntö)
  - $\int f(x)^r f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{r+1}f(x)^{r+1} + C$, $r \neq -1$
  - $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$
  - $\int f'(x)e^{f(x)}\mathrm{d}x = e^{f(x)} + C$

Lisäksi aina

- $D\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)$
- $\int Df(x)\mathrm{d}x = \int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$

Esimerkki 3.3.2.

(a) *Funktion* $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ *integraalifunktio selviää kun ensin huomataan, että* $f(x) = \frac{\frac{1}{2}D(1+x^2)}{1+x^2}$ *eli se on muotoa* $\frac{1}{2}\frac{g'(x)}{g(x)}$, *missä* $g(x) = 1 + x^2$. *Koska* $D(\ln g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$, *niin integroinnin lineaarisuuden perusteella on*

$$\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

(b) *Määrätään* $\int (x+1)^2 \mathrm{d}x$. *Funktio* $(x+1)^2$ *on yhdistetty funktio* $g(f(x))$, *missä* $g(x) = x^2$ *ja* $f(x) = x+1$. *Koska* $f'(x) = 1$, *on*

$$(x+1)^2 = g(f(x))f'(x).$$

Funktion $g(x) = x^2$ *integraalifunktio on* $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$. *Siis*

$$\int (x+1)^2 \mathrm{d}x = \int g(f(x))f'(x)\mathrm{d}x = G(f(x)) = \frac{1}{3}(x+1)^3 + C.$$

(c) *Määrätään* $\int \frac{x+2}{x}\mathrm{d}x$ *käyttämällä integraalin lineaarisuutta:*

$$\int \frac{x+2}{x}\mathrm{d}x = \int 1 + \frac{2}{x}\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = x + 2\log|x| + C.$$

(d) *Koska* $\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + C$, *niin*

$$\int \underbrace{e^x}_{f'(x)} \underbrace{\cos(e^x)}_{g'(f(x))} \mathrm{d}x = \underbrace{\sin(e^x)}_{G(f(x))} + C$$

(e) *Käyttämällä sääntöä* $\int f(x)^r f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{r+1}f(x)^{r+1} + C$ *saamme*

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x^3}_{\frac{1}{12}f'(x)} (\underbrace{1+3x^4}_{f(x)})^{-\frac{3}{4}}\mathrm{d}x &= \frac{1}{12}\int \underbrace{12x^3}_{f'(x)}(\underbrace{1+3x^4}_{f(x)})^{-\frac{3}{4}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{12}\frac{1}{-\frac{3}{4}+1}(1+3x^4)^{-\frac{3}{4}+1} + C \\
&= \frac{1}{3}(1+3x^4)^{\frac{1}{4}} + C
\end{aligned}$$

(f) *Lasketaan* $\int \frac{2x^2 - 6x^2\ln x}{x^6}\mathrm{d}x$. *Koska* $D\ln x = \frac{1}{x}$ *ja* $Dx^3 = 3x^2$, *niin*

$$\frac{2x^2 - 6x^2\ln x}{x^6} = 2\frac{x^2 - 3x^2\ln x}{x^6} = 2\frac{(D\ln x)x^3 - (Dx^3)\ln x}{(x^3)^2} = 2D\left(\frac{\ln x}{x^3}\right).$$

Siis

$$\int \frac{2x^2 - 6x^2\ln x}{x^6}\mathrm{d}x = 2\frac{\ln x}{x^3} + C.$$

Muista että integroinnin tuloksen voit aina tarkistaa derivoimalla!

3.3.2 Osittaisintegrointi

Osittaisintegrointi on apukeino integraalifunktion laskemiseen ja se perustuu tulon derivoimissääntöön:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

eli

$$f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - f(x)g'(x).$$

Integroimalla molemmat puolet, ja käyttämällä tietoa $\int(f(x)g(x))'\mathrm{d}x = f(x)g(x) + C$, saamme

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

Tätä sanotaan *osittaisintegrointikaavaksi.*

Esimerkki 3.3.3.

(a) *Määrätään* $\int \frac{3}{2}x\sqrt{x+1}\mathrm{d}x$ *osittaisintegroinnilla. Valitaan* $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x+1}$ *ja* $g(x) = x$*, jolloin* $f(x) = (x+1)^{\frac{3}{2}}$ *ja* $g'(x) = 1$*. Siis*

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{2}x\sqrt{x+1}\mathrm{d}x &= \int g(x)f'(x)\mathrm{d}x \\ &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x \\ &= (x+1)^{\frac{3}{2}} \cdot x - \int (x+1)^{\frac{3}{2}} \cdot 1\mathrm{d}x \\ &= (x+1)^{\frac{3}{2}} \cdot x - \frac{2}{5} \cdot (x+1)^{\frac{5}{2}} + C \\ &= (x+1)^{\frac{3}{2}} \cdot (x+1-1) - \frac{2}{5} \cdot (x+1)^{\frac{5}{2}} + C \\ &= (x+1)^{\frac{5}{2}} - (x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \cdot (x+1)^{\frac{5}{2}} + C \\ &= \frac{3}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - (x+1)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

(b) *Lasketaan* $\int x\sin(x)\mathrm{d}x$ *osittaisintegroinnilla. Valitaan* $f'(x) = \sin(x)$ *ja* $g(x) = x$*, jolloin* $f(x) = -\cos(x)$ *ja* $g'(x) = 1$*. Silloin*

$$\begin{aligned}\int x\sin(x)\mathrm{d}x &= \int g(x)f'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x \\ &= -x\cos(x) + \int \cos(x)\mathrm{d}x = -x\cos(x) + \sin(x) + C.\end{aligned}$$

(c) *Lasketaan* $\int \sin^2(x)\mathrm{d}x$ *osittaisintegroinnilla. (Merkintä* $\sin^2(x)$ *tarkoittaa* $(\sin(x))^2$*.) Valitaan* $f'(x) = \sin(x)$ *ja* $g(x) = \sin(x)$*, eli* $f(x) = -\cos(x)$ *ja* $g'(x) = \cos(x)$*. Nyt*

$$\begin{aligned}\int \sin^2(x)\mathrm{d}x = \int \sin(x)\sin(x)\mathrm{d}x = \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x \\ &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x \\ &= -\sin(x)\cos(x) - \int -\cos(x)\cos(x)\mathrm{d}x \\ &= -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Koska $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$*, niin saamme*

$$\begin{aligned}\int \sin^2(x)\mathrm{d}x &= -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)\mathrm{d}x \\ &= -\sin(x)\cos(x) + \int \left(1 - \sin^2(x)\right)\mathrm{d}x \\ &= -\sin(x)\cos(x) + \int 1\mathrm{d}x - \int \sin^2(x)\mathrm{d}x \\ &= -\sin(x)\cos(x) + x + C - \int \sin^2(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Lisäämällä yhtälöön puolittain $\int \sin^2(x)\mathrm{d}x$ *saadaan*

$$2\int \sin^2(x)\mathrm{d}x = -\sin(x)\cos(x) + x + C$$

eli

$$\int \sin^2(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2}x + C.$$

(d) *Lasketaan* $\int \ln(x)\mathrm{d}x$ *valitsemalla* $f'(x) = 1$ *ja* $g(x) = \ln(x)$*. Silloin*

$$\begin{aligned}\int \ln(x)\mathrm{d}x = \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x \\ &= x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C.\end{aligned}$$

(e) *Lasketaan* $\int e^x \sin(x)\mathrm{d}x$*:*

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{e^x}_{g(x)} \underbrace{\sin(x)}_{f'(x)} \mathrm{d}x &= \underbrace{e^x}_{g(x)} \underbrace{(-\cos(x))}_{f(x)} - \int \underbrace{e^x}_{g'(x)} \underbrace{(-\cos(x))}_{f(x)} \mathrm{d}x \\
&= -e^x \cos(x) + \int \underbrace{e^x}_{g(x)} \underbrace{\cos(x)}_{h'(x)} \mathrm{d}x \\
&= -e^x \cos(x) + \underbrace{e^x}_{g(x)} \underbrace{\sin(x)}_{h(x)} - \int \underbrace{e^x}_{g'(x)} \underbrace{\sin(x)}_{h(x)} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Tästä saadaan yhtälö

$$2 \int e^x \sin(x)\mathrm{d}x = -e^x \cos(x) + e^x \sin(x) + C$$

eli

$$\int e^x \sin(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x (\sin(x) - \cos(x)) + C.$$

3.3.3 Integrointi sijoituksen avulla

Sijoitusmenetelmässä integroitava funktio esitetään yhdistettynä funktiona. Sisäfunktio valitaan sopivalla integroimista helpottavalla tavalla ja sitä merkitään muuttujalla $t = f(x)$ ja silloin $\mathrm{d}t = f'(x)\mathrm{d}x$:

$$\int g(\overbrace{f(x)}^{t}) \overbrace{f'(x)\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}t} = \int g(t)\mathrm{d}t.$$

Kun integraalifunktio $G(t) = \int g(t)\mathrm{d}t$ on laskettu, sijoitetaan takaisin $t = f(x)$.

Esimerkki 3.3.4.

(a) *Lasketaan* $\int e^x \sqrt{1 + e^x}\mathrm{d}x$*. Tehdään sijoitus* $t = 1 + e^x$*, jolloin* $\mathrm{d}t = e^x \mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
\int e^x \sqrt{1 + e^x}\mathrm{d}x &= \int \sqrt{\underbrace{1 + e^x}_{t}} \underbrace{e^x \mathrm{d}x}_{\mathrm{d}t} = \int \sqrt{t}\mathrm{d}t = \int t^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} (1 + e^x)^{\frac{3}{2}} + C.
\end{aligned}$$

(b) *Lasketaan* $\int x\sqrt{x+1}\mathrm{d}x$. *Tehdään sijoitus* $t = x+1$, *jolloin* $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. *Sijoituskaavan nojalla*

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+1}\mathrm{d}x &= \int (t-1)\sqrt{t}\mathrm{d}t = \int t\sqrt{t} - \sqrt{t}\mathrm{d}t = \int t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t - \int t^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C.\end{aligned}$$

Tarkistetaan vielä derivoimalla tulos:

$$\begin{aligned}D\left(\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C\right) &= (x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}} \\ &= (x+1)^{\frac{1}{2}}(x+1-1) = x\sqrt{x+1}.\end{aligned}$$

(c) *Lasketaan* $\int x(3x^2+2)^7\mathrm{d}x$. *Sijoitetaan* $t = 3x^2+2$, *jolloin* $\mathrm{d}t = 6x\mathrm{d}x$. *Silloin*

$$\begin{aligned}\int x(3x^2+2)^7\mathrm{d}x &= \int (\underbrace{3x^2+2}_{t})^7\, \underbrace{x\mathrm{d}x}_{\frac{1}{6}\mathrm{d}t} \\ &= \int t^7\frac{1}{6}\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\frac{1}{8}t^8 + C = \frac{1}{48}(3x^2+2)^8 + C.\end{aligned}$$

Äsken teimme sijoituksia, joissa muuttuja t esitettiin muuttujan x funktiona. On myös mahdollista tehdä sijoitus esittämällä muuttuja x muuttujan t funktiona $g(t)$, kunhan g **on bijektio**. Silloin tehdään sijoitus $x = g(t)$ ja $\mathrm{d}x = g'(t)\mathrm{d}t$ eli

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t.$$

Ideana on tehdä sellainen sijoitus, että oikealla puolella oleva integraali (muuttujan t suhteen) ratkeaa. Saatu tulos riippuu nyt muuttujasta t, mutta haluamme tuloksen joka riippuu alkuperäisestä muuttujasta x. Tämä onnistuu kunhan g on bijektio, koska tällöin:

$$x = g(t) \quad \Leftrightarrow \quad g^{-1}(x) = t.$$

Siis lopuksi sijoitamme tulokseemme $t = g^{-1}(x)$.

Esimerkki 3.3.5. *Lasketaan* $\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ *sijoituksella* $x = t^2$. *Kuvaus* $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $g(t) = t^2$ *on bijektio, joten sijoitus tosiaan voidaan tehdä. Tällöin* $e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{g(t)}} = e^t$ *ja* $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = g'(t) = 2t$ *eli* $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$. *Saadaan*

$$\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int e^t 2t\mathrm{d}t.$$

Lasketaan tämä integraali osittaisintegroinnilla valitsemalla $f'(t) = e^t$ ja $g(t) = 2t$. Silloin

$$\begin{aligned}\int e^t 2t\mathrm{d}t &= \int f'(t)g(t)\mathrm{d}t = f(t)g(t) - \int f(t)g'(t) \\ &= e^t \cdot 2t - \int e^t \cdot 2\mathrm{d}t = 2te^t - 2e^t + C = 2e^t(t-1) + C.\end{aligned}$$

Sijoitetaan nyt takaisin muuttuja x. Koska $g(t) = t^2$, on $t = g^{-1}(x) = \sqrt{x}$, ja

$$\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int e^t 2t\mathrm{d}t = 2e^t(t-1) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C.$$

3.3.4 Määrätty integraali ja epäoleellinen integraali

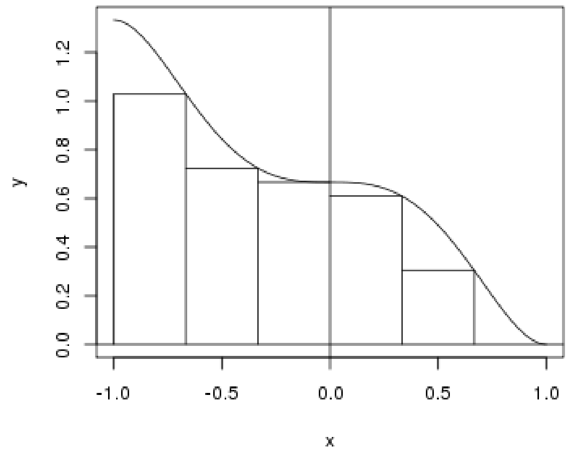
Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Väliltä $[a,b]$ valitaan $n+1$ kappaletta pisteitä x_i, niin että

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Jos $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [a,b]$, niin funktion f kuvaajan ja x-akselin väliin jäävää pinta-alaa voidaan arvioida laskemalla yhteen niiden suorakulmioiden pinta-alat, joiden kulmat ovat pisteissä $(x_{i-1}, 0)$, $(x_i, 0)$, $(x_{i-1}, f(x_i))$ ja $(x_i, f(x_i))$ eli

$$\text{pinta -ala } \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Mitä enemmän pisteitä eli mitä suurempi luku n on, niin sitä tarkempi approksimaatio saadaan.



Kun pisteet x_i valitaan niin että vierekkäisten pisteiden välinen etäisyys menee kohti nollaa kun valitaan enemmän pisteitä, niin pinta-ala-approksimaatio lähestyy funktion f *määrättyä integraalia*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Jos funktio f saa myös negatiivisia arvoja, niin määrätty integraali voidaan laskea aivan samalla tavalla ja geometrinen tulkinta on silloin funktion f kuvaajan rajoittaman alueen pinta-ala x-akselin yläpuolella vähennettynä x-akselin alapuolelle jäävällä pinta-alalla.

Määrätylle integraalille pätevät seuraavat laskusäännöt: Olkoon $r \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, ja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuvia. Silloin

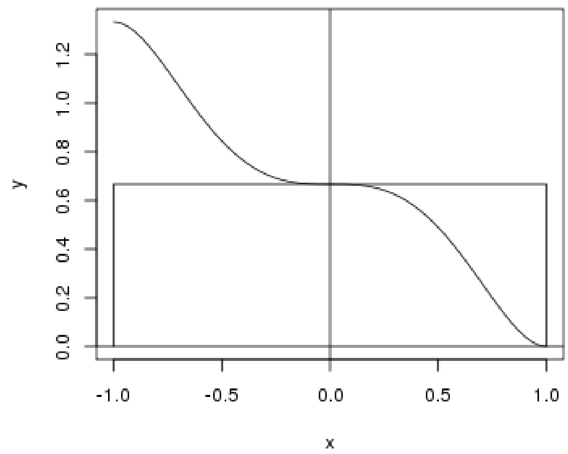
- $\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ (lineaarisuus 1/2)
- $\int_a^b rf(x)\mathrm{d}x = r\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (lineaarisuus 2/2)
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ (osittelu)
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$ (suunnanvaihto)

- Jos $f(x) \leq g(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$, niin
  $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ (monotonisuus)

Integraalilaskennan väliarvolause sanoo, että jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin välillä $[a, b]$ on olemassa sellainen piste x_0, että

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b - a)f(x_0).$$

Geometrinen tulkinta ei-negatiiviselle funktiolle f on, että suorakulmion jonka kannan pituus on $b-a$ ja korkeus $f(x_0)$, pinta-ala on sama kuin funktion f ja x-akselin väliin jäävä pinta-ala. Kuvassa $x_0 = 0$.



Tämän avulla pystymme osoittamaan integraalifunktion ja määrätyn integraalin yhteyden. Osoitetaan ensin, että määrätyn integraalin avulla saamme integraalifunktion jatkuvalle funktiolle: Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Määritellään

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Kun $h \neq 0$, niin väliarvolauseen mukaan pisteiden x ja $x + h$ välissä on olemassa piste x_0, siten että

$$\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = (x + h - x)f(x_0) = h \cdot f(x_0).$$

Nyt

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{h} \\ &= \frac{\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t}{h} = \frac{h\cdot f(x_0)}{h} \\ &= f(x_0)\end{aligned}$$

Kun h lähestyy nollaa, niin x_0 lähestyy lukua x. Koska f on jatkuva niin $f(x_0)$ lähestyy silloin arvoa $f(x)$. Siis

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

eli F on funktion f (eräs) integraalifunktio.

Näytetään seuraavaksi, että jos tiedämme integraalifunktion, niin sen avulla pystymme laskemaan määrättyjä integraaleja: Jos F on jokin funktion f integraalifunktio ja $F_0(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$, niin $F(x) = F_0(x) + C$ jollain $C \in \mathbb{R}$ ja

$$\begin{aligned}F(b)-F(a) = (F_0(b)+C)-(F_0(a)+C) &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + C - \int_a^a f(x)\mathrm{d}x - C \\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Tulimme todistaneeksi *analyysin peruslauseen* joka sanoo, että jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja F on jokin funktion f integraalifunktio, niin

$$\boxed{F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)dx.}$$

Erotukselle $F(b)-F(a)$ käytetään usein merkintää

$$\boxed{\Big/_{\!a}^{b} F(x) = F(b)-F(a).}$$

Esimerkki 3.3.6.

(a) *Lasketaan integraali* $\int_0^6 x^3\mathrm{d}x$. *Koska* $\int x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + C$, *niin*

$$\int_0^6 x^3\mathrm{d}x = \Big/_{\!0}^{6}\frac{1}{4}x^4 = \frac{1}{4}6^4 - \frac{1}{4}0^4 = 324.$$

(b)

$$\int_{-\sqrt{\ln 4}}^{0} \underbrace{x}_{\frac{1}{2}f'(x)} \underbrace{e^{x^2}}_{g(f(x))} = \Big/_{-\sqrt{\ln 4}}^{0} \frac{1}{2} G(f(x)) = \Big/_{-\sqrt{\ln 4}}^{0} \frac{1}{2} e^{x^2}$$
$$= \frac{1}{2} e^{0^2} - \frac{1}{2} e^{(-\sqrt{\ln 4})^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{\ln 4} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}.$$

Koska määrättyjä integraaleja voi laskea integraalifunktion avulla, soveltuvat integraalifunktion laskemistekniikat myös määrätyn integraalin laskemiseen.

Osittaisintegrointi: Jos f ja g ovat derivoituvia ja niiden derivaatat ovat jatkuvia välillä $[a, b]$, niin

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = \Big/_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

Esimerkki 3.3.7.

(a) *Lasketaan* $\int_0^{\ln 3} xe^x \mathrm{d}x$. *Valitaan* $f'(x) = e^x$ *ja* $g(x) = x$, *jolloin*

$$\int_0^{\ln 3} xe^x \mathrm{d}x = \Big/_0^{\ln 3} xe^x - \int_0^{\ln 3} e^x \mathrm{d}x$$
$$= 3 \cdot \ln 3 - 0 \cdot e^0 - \Big/_0^{\ln 3} e^x$$
$$= 3 \ln 3 - (e^{\ln 3} - e^0) = 3 \ln 3 - 2.$$

(b)

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cos(x)\mathrm{d}x = \Big/_{-\pi}^{\pi} x \sin(x) - \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\mathrm{d}x$$
$$= \pi \sin(\pi) - (-\pi \sin(-\pi)) - \Big/_{-\pi}^{\pi} (-\cos(x))$$
$$= 0 - 0 - (-\underbrace{\cos(\pi)}_{-1} - (-\underbrace{\cos(-\pi)}_{-1}))) = -1 + 1 = 0.$$

Sijoitus- eli muuttujanvaihtomenetelmä: Menetelmää käytettäessä on muistettava muuttaa myös **integrointirajat**. Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva ja $g : [c, d] \to [a, b]$ derivoituva bijektio, jonka derivaatta on jatkuva. Silloin

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t.$$

Tässä on siis tehty sijoitus $x = g(t)$. Vaihtoehtoisesti integrointirajat voi pitää ennallaan, kunhan integrointitulokseen sijoittaa lopuksi muuttujan t paikalla $x = g^{-1}(t)$.

Esimerkki 3.3.8. *Lasketaan määrätty integraali $\int_{-1}^{0} x\sqrt[3]{x+1}\mathrm{d}x$. Tehdään sijoitus $x = t^3 - 1 = g(t)$, jolloin $g'(t) = 3t^2$. Uudet integroimisrajat saadaan selville laskemalla $g^{-1}(-1)$ ja $g^{-1}(0)$:*

$$g(t) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad t^3 - 1 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0,$$

joten $g^{-1}(-1) = 0$ ja

$$g(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^3 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1,$$

joten $g^{-1}(0) = 1$. Siis

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} x\sqrt[3]{x+1}\mathrm{d}x &= \int_{g^{-1}(-1)}^{g^{-1}(0)} (t^3-1)\sqrt[3]{(t^3-1)+1}3t^2\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (t^3-1)t\cdot 3t^2\mathrm{d}t = \int_0^1 (3t^6 - 3t^3)\mathrm{d}t = \Big/_{0}^{1} \left(\frac{3}{7}t^7 - \frac{3}{4}t^4\right) \\
&= \frac{3}{7} - \frac{3}{4} = \frac{3\cdot 4 - 3\cdot 7}{7\cdot 4} = -\frac{9}{28}.
\end{aligned}$$

Koska $t = g^{-1}(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$, laskun voi tehdä myös näin:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} x\sqrt[3]{x+1}\mathrm{d}x &= \int_{x=-1}^{x=0} (t^3-1)\sqrt[3]{(t^3-1)+1}3t^2\mathrm{d}t \\
&= \int_{x=-1}^{x=0} (t^3-1)t\cdot 3t^2\mathrm{d}t = \int_{x=-1}^{x=0} (3t^6 - 3t^3)\mathrm{d}t \\
&= \Big/_{x=-1}^{x=0} \left(\frac{3}{7}t^7 - \frac{3}{4}t^4\right) \\
&= \Big/_{x=-1}^{x=0} \left(\frac{3}{7}(x+1)^{\frac{1}{3}\cdot 7} - \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{1}{3}\cdot 4}\right) \\
&= \frac{3}{7} - \frac{3}{4} = \frac{3\cdot 4 - 3\cdot 7}{7\cdot 4} = -\frac{9}{28}.
\end{aligned}$$

Jos integrointirajoina on äärellisten lukujen a ja b sijaan ∞ tai $-\infty$, niin integraalia sanotaan *epäoleelliseksi integraaliksi*. Epäoleellisen integraalin olemassaolo edellyttää, että integraalifunktiolla on *epäoleellinen raja-arvo* äärettömässä tai miinus äärettömässä. Raja-arvo

$$\lim_{b\to\infty} F(b)$$

on olemassa, jos löytyy jokin luku $y_0 \in \mathbb{R}$ niin että arvot $F(b)$ ovat aina vain lähempänä lukua y_0, kun luku b kasvaa rajattomasti. Silloin $\lim_{b\to\infty} F(b) = y_0$. Raja-arvo

$$\lim_{a\to-\infty} F(a)$$

on olemassa, jos löytyy jokin luku $y_* \in \mathbb{R}$ niin että arvot $F(a)$ ovat aina vain lähempänä lukua y_*, kun luku a vähenee rajattomasti. Silloin $\lim_{a\to-\infty} F(a) = y_*$.

Esimerkki 3.3.9.

(a)

$$\lim_{b\to\infty}\left(\frac{2}{b}+3\right) = 3 \quad \textit{ja} \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{2}{a}+3\right) = 3.$$

(b)

$$\lim_{b\to\infty}\frac{b-1}{|b+1|} = \lim_{b\to\infty}\frac{b+1-2}{b+1} = \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{2}{b+1}\right) = 1$$

ja

$$\lim_{a\to-\infty}\frac{a-1}{|a+1|} = \lim_{a\to-\infty}\frac{a+1-2}{-(a+1)} = \lim_{a\to-\infty}\left(-1+\frac{2}{a+1}\right) = -1.$$

- Jos $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja sen integraalifunktiolla on raja-arvo

  $$\lim_{b\to\infty} F(b),$$

  niin silloin funktiolla f on epäoleellinen integraali

  $$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a).$$

- Jos $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja sen integraalifunktiolla on raja-arvo

  $$\lim_{a\to-\infty} F(a),$$

  niin silloin funktiolla f on epäoleellinen integraali

  $$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a).$$

- Jos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja sen integraalifunktiolla on raja-arvot
$$\lim_{b\to\infty} F(b) \quad \text{ja} \quad \lim_{a\to-\infty} F(a),$$
niin silloin funktiolla f on epäoleellinen integraali
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a).$$
- Jos ei ole olemassa äärellistä raja-arvoa $\lim_{b\to\infty} F(b)$ (tai $\lim_{a\to-\infty} F(a)$), niin sanotaan, että epäoleellinen integraali $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ (tai $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$) hajaantuu.

Esimerkki 3.3.10.

(a) *Lasketaan* $\int_1^\infty \frac{9x}{(x^2+2)^4}\mathrm{d}x$. *Lasketaan ensin määrätty integraali* $\int_1^b \frac{9x}{(x^2+2)^4}\mathrm{d}x$.
$$\begin{aligned}\int_1^b \frac{9x}{(x^2+2)^4}\mathrm{d}x &= 9\int_1^b x(x^2+2)^{-4}\mathrm{d}x = \frac{9}{2}\int_1^b \underbrace{2x}_{f'(x)}(\underbrace{x^2+2}_{f(x)})^{-4}\mathrm{d}x \\ &= \frac{9}{2}\Big/_1^b -\frac{1}{3}(x^2+2)^{-3} = -\frac{3}{2}\Big/_1^b \frac{1}{(x^2+2)^3} \\ &= -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{(b^2+2)^3} - \frac{1}{(1^2+2)^3}\right) = \frac{1}{18} - \frac{3}{2(b^2+2)^3}.\end{aligned}$$
Silloin
$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{9x}{(x^2+2)^4}\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{9x}{(x^2+2)^4}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{18} - \frac{3}{2(b^2+2)^3}\right) \\ &= \frac{1}{18}.\end{aligned}$$

(b) *Lasketaan* $\int_{-\infty}^\infty |x|e^{-x^2}\mathrm{d}x$. *Kun* $a < 0 < b$, *niin*
$$\begin{aligned}\int_a^b |x|e^{-x^2}\mathrm{d}x &= \int_a^0 -xe^{-x^2}\mathrm{d}x + \int_0^b xe^{-x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_a^0 -2xe^{-x^2}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^b -2xe^{-x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\Big/_a^0 e^{-x^2} - \frac{1}{2}\Big/_0^b e^{-x^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^0 - e^{-a^2}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{-b^2} - 0\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}e^{-a^2} - \frac{1}{2}e^{-b^2}.\end{aligned}$$

Epäoleellinen integraali on

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2}\mathrm{d}x = 1 - \lim_{a\to-\infty} e^{-a^2} - \lim_{b\to\infty} e^{-b^2} = 1,$$

koska e^x lähestyy nollaa, kun x lähestyy miinus ääretöntä.

Tähän saakka laskimme integraaleja vain suljetulla välillä jatkuville funktioille, mutta joskus integraalin voi laskea, vaikka funktio ei olisi määritelty välin päätepisteessä tai sillä olisi äärellinen määrä epäjatkuvuuspisteitä.

Esimerkki 3.3.11.

(a) *Olkoon $f : [0,4] \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{kun } x \in [0,2] \\ x & \text{kun } x \in (2,4] \end{cases}.$$

Funktio $F : [0,4] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 & \text{kun } x \in [0,2] \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{kun } x \in (2,4] \end{cases}$$

ei ole derivoituva pisteessä $x = 2$, joten se ei voi olla funktion f integraalifunktio. Kuitenkin $F'(x) = f(x)$ kun $x \neq 2$. Funktion f määrätty integraali voidaan laskea seuraavasti:

$$\begin{aligned}\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^2 x^2\mathrm{d}x + \lim_{a\to 2^+}\int_a^4 x\mathrm{d}x \\ &= \Big/_0^2 \frac{1}{3}x^3 + \lim_{a\to 2^+} \Big/_a^4 \frac{1}{2}x^2 \\ &= \frac{1}{3}\left(2^3 - 0^3\right) + \lim_{a\to 2^+}\left(\frac{1}{2}4^2 - \frac{1}{2}a^2\right) \\ &= \frac{8}{3} + 8 - 2 = 8\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

(b) *Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, arvot lähestyvät ääretöntä kun x lähestyy nollaa. Sillä on integraalifunktio $F(x) = 2\sqrt{x}$ kun $x > 0$. Koska integraalifunktiolla on (oikeanpuoleinen) raja-arvo nollassa,*

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x} = 0,$$

niin integraalin $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ voi laskea:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = F(1) - \lim_{a\to 0^+} F(a) = 2 - \lim_{a\to 0^+} 2\sqrt{a} = 2.$$

(c) *Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, arvot lähestyvät ääretöntä kun x lähestyy nollaa. Sillä on integraalifunktio $F(x) = -\frac{1}{x}$ kun $x > 0$. Koska integraalifunktiolla ei ole (oikeanpuoleista) raja-arvoa nollassa,*

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty,$$

niin integraali $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ hajaantuu.

3.3.5 Sovelluksia

Jos jatkuva funktio f ilmoittaa jonkin suureen kasvunopeuden, niin sen integraalifunktio

$$F(x) = \int_a^x f(x)$$

ilmoittaa kyseisen suureen kertyneen määrän kohdan a jälkeen. Siksi sitä kutsutaan *kertymäfunktioksi.*

Esimerkki 3.3.12 (Oppimistehtävä 3.17 Häkkisen kirjasta)**.** *Tietyn vesisäiliön vedenkulutus lauantai-iltapäivänä klo 14-21 välisenä aikana noudattaa funktiota*

$$f : [0,7] \to \mathbb{R}, \quad f(t) = -6t^2 + 60t + 140 \quad m^2/h,$$

missä t edustaa aikaa tunteina ja $t = 0$ kun kello on 14.00. Vesisäiliöön pumpataan lisää vettä koko ajan 120 kuutiota tunnissa. Kuinka paljon säiliön vesimäärä muuttuu lauantaina iltapäivän/illan aikana?

Vesimäärän kasvunopeus on tulevan ja lähtevän veden erotus eli

$$g(t) = 120 - f(t) = 6t^2 - 60t - 20.$$

Jos $g(t) > 0$, niin vesimäärä lisääntyy hetken t ympäristössä ja jos $g(t) < 0$ niin vesimäärä vähenee hetken t ympäristössä. Kertyneen veden määrä saadaan selville laskemalla kertymäfunktion $G(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ arvo hetkellä $t = 7$, eli kun kello on 21.00.

$$\begin{aligned} G(7) &= \int_0^7 (6t^2 - 60t - 20)\mathrm{d}t = \Big/_0^7 \left(2t^3 - 30t^2 - 20t\right) \\ &= 2\cdot 7^3 - 30\cdot 7^2 - 20\cdot 7 - (2\cdot 0^3 - 30\cdot 0^2 - 20\cdot 0) = -924. \end{aligned}$$

Veden määrä säiliössä vähenee 924 kuutiota.

Esimerkki 3.3.13. *Funktio $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{600}e^{-\frac{t}{600}}$, ilmaisee lampun eliniän todennäköisyyttä päivinä siten, että mitä suurempi arvo funktiolla f on hetkellä t niin sitä todennäköisemmin lamppu rikkoutuu lähellä kyseistä ajanhetkeä. Silloin kertymäfunktio*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

ilmaisee kuinka paljon hajoamisen todennäköisyyttä on kertynyt hetkeen x mennessä eli kuinka todennäköisesti lamppu hajoaa ennen hetkeä x. Mikä on todennäköisyys, että lamppu kestää korkeintaan 100 päivää? Se on

$$\begin{aligned} F(100) &= \int_0^{100} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{100} \frac{1}{600}e^{-\frac{t}{600}}\mathrm{d}t \\ &= \Big/_0^{100} - e^{-\frac{t}{600}} = -e^{-\frac{1}{6}} - \left(-e^0\right) \approx 0,15. \end{aligned}$$

Siis on 15 *prosentin todennäköisyys, että lamppu ei enää toimi sadan päivän kuluttua.*

Funktioiden f ja g kuvaajien väliin jäävä pinta-ala välillä $[a, b]$ on

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x.$$

Jos on voimassa $f(x) \geq g(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$, niin kyseinen ala on

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\mathrm{d}x.$$

Esimerkki 3.3.14. *Olkoon $f(x) = 10x^4 + 1$ ja $g(x) = 6x^2$. Lasketaan kuvaajien väliin jäävä pinta-ala välillä $[0, 2]$. Näytetään ensin, että $f(x) \geq g(x)$ eli $f(x) - g(x) \geq 0$ selvittämällä funktion $h(x) = f(x) - g(x)$ minimi välillä $[0, 2]$. Ensinnäkin $h(0) = f(0) - g(0) = 1 > 0$ ja $h(2) = f(2) - g(2) = 81 - 24 = 57 > 0$. Selvitetään derivaatan nollakohdat:*

$$h'(x) = 40x^3 - 12x = 12x\left(\frac{10}{3}x^2 - 1\right) = 0,$$

jos $x = 0$ tai $\frac{10}{3}x^2 - 1 = 0$ eli $x = \sqrt{\frac{3}{10}}$. Funktion h arvo derivaatan nollakohdassa on

$$h\left(\sqrt{\frac{3}{10}}\right) = 10\left(\sqrt{\frac{3}{10}}\right)^4 + 1 - 6\left(\sqrt{\frac{3}{10}}\right)^2 = \frac{1}{10} > 0.$$

Funktio h on jatkuva ja positiivinen kaikissa mahdollisissa ääriarvopisteissä, joten se on positiivinen.

Silloin funktioiden f ja g kuvaajien väliin jäävä pinta-ala välillä $[0,2]$ on

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^2 10x^4 + 1 - 6x^2 \mathrm{d}x &= \Big/_0^2 \left(2x^5 + x - 2x^3\right) \\
&= 2 \cdot 2^5 + 2 - 2 \cdot 2^3 = 50.
\end{aligned}
$$

4 Differentiaaliyhtälöitä

Integraalifunktion määrääminen tarkoittaa funktion F ratkaisemista yhtälöstä

$$F'(x) = f(x), \tag{1}$$

missä f on tunnettu funktio. Tämä on samalla esimerkki *differentiaaliyhtälöstä.*

Differentiaaliyhtälö on yhtälö, joka sisältää tuntemattoman funktion $y : A \to \mathbb{R}$ ja sen derivaattoja. Kuten määrätessä integraalifunktiota, pyrimme ratkaisemaan funktion y tästä yhtälöstä. Differentiaaliyhtälön *kertaluku* on korkeimman yhtälössä esiintyvän derivaatan kertaluku. Esimerkiksi

$$y(x)y'(x) - \sin(x)y''(x) - y(x)^3 = 0$$

on toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, koska siinä esiintyy toisen kertaluvun derivaatta y''. Integraalifunktion F määrääminen yhtälöstä (1) on sama asia kuin differentiaaliyhtälön

$$y'(x) = f(x) \tag{2}$$

ratkaiseminen, eli funktion y määrääminen yhtälöstä (2). Tämä, ja yhtälö:

$$y'(x) = -cy(x)$$

ovat esimerkkejä ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöstä, koska korkein yhtälössä esiintyvä tuntemattoman funktion derivaatan kertaluku on 1.

Joidenkin ilmiöiden matemaattinen malli johtaa differentiaaliyhtälöön. Esimerkiksi radioaktiivisen aineen vähenemisnopeus on suoraan verrannollinen jäljellä olevaan aineen määrään. Siis hajoamista voidaan kuvata yhtälöllä $y'(t) = -cy(t)$, missä t edustaa aikaa, $y(t)$ on aineen määrä hetkellä t, ja $c > 0$ on hajoamisvakio. Tällöin $y'(t)$ kuvaa aineen määrän muutosta hetkellä t, ja on tässä tapauksessa negatiivinen koska ainemäärä vähenee.

Jos pankkitilille maksetaan korkoa *jatkuva-aikaisesti* korolla $p\%$, missä $p > 0$, niin tilillä oleva rahamäärä toteuttaa yhtälön $y'(t) = \frac{p}{100}y(t)$. Tässä t edustaa aikaa, $y(t)$ on tilillä oleva rahamäärä hetkellä t, ja $y'(t)$ on rahamäärän muutosnopeus hetkellä t.

Implisiittisen derivoinnin yhteydessä päädytään usein differentiaaliyhtälöön: Esimerkissä 3.2.5(a) johdimme tason yhtälöstä $x^2 + y^2 - 4 = 0$ differentiaaliyhtälön

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}.$$

Tässä luvussa käsitellään vain ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä.

4.1 Differentiaaliyhtälön ratkaisu(t)

Differentiaaliyhtälön ratkaisu on funktio $y = y(x)$, joka toteuttaa kyseisen differentiaaliyhtälön jossakin avoimessa joukossa (yleensä avoimella välillä, usein peräti koko reaaliakselilla).

Esimerkki 4.1.1.

(a) *Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä*

$$y' + e^{-x} + \sin x - x = 0 \quad \textit{eli} \quad y'(x) = -e^{-x} - \sin x + x.$$

Tämän differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$y(x) = e^{-x} + \cos x + \frac{1}{2}x^2 + C$$

millä tahansa $C \in \mathbb{R}$, koska tälle funktiolle pätee

$$y'(x) = -e^{-x} - \sin x + x.$$

Ratkaisuväli on koko $\mathbb{R}$, koska y' on määritelty kaikkialla, ja toteuttaa annetun differentiaaliyhtälön kaikkialla.

(b) *Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä*

$$y' + xy = 0 \quad \textit{eli} \quad y'(x) + xy(x) = 0.$$

Tämän differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

koska sille pätee

$$y'(x) + xy(x) = -\frac{1}{2} \cdot 2xe^{-\frac{1}{2}x^2} + xe^{-\frac{1}{2}x^2} = 0.$$

Huomataan lisäksi, että kaikki funktiot jotka ovat muotoa

$$y(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad C \in \mathbb{R},$$

ovat annetun differentiaaliyhtälön ratkaisuja. Ratkaisuväli on taas koko $\mathbb{R}$.

(c) *Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä*

$$y'(x) = 2xy(x)^2.$$

Selvästi funktio $y(x) = 0$ *on eräs ratkaisu. Osoitetaan, että myös funktio*

$$y(x) = -\frac{1}{x^2 + C}$$

on ratkaisu:

$$\begin{aligned} y'(x) &= D\left(-\frac{1}{x^2 + C}\right) = -\frac{-2x}{(x^2 + C)^2} \\ &= \frac{2x}{(x^2 + C)^2} = 2x\left(\frac{1}{x^2 + C}\right)^2 = 2xy(x)^2. \end{aligned}$$

Koska lauseke $y(x)$ *(ja lauseke* $y'(x)$*) ei ole määritelty kun* $x^2 = -C$*, on* $y(x) = -\frac{1}{x^2+C}$ *differentiaaliyhtälön ratkaisu joukossa*

$$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 \neq -C\right\}.$$

Edellisten esimerkkien ratkaisut $y(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$ ja $y(x) = -\frac{1}{x^2+C}$, ovat kyseisten differentiaaliyhtälöiden *yleisiä ratkaisuja.* (Luvussa 4.4 näytetään, kuinka ratkaisut voidaan löytää.) Kiinnittämällä vakion C arvo saadaan *yksittäisratkaisu.* Esimerkiksi $y(x) = 5e^{-\frac{1}{2}x^2}$ (arvolla $C = 5$) ja $y(x) = \frac{1}{1-x^2}$ (arvolla $C = -1$) ovat edellisten esimerkkien yksittäisratkaisuja.

Esimerkin (*c*)-kohdassa yhtälöllä oli myös ratkaisu $y(x) = 0$, jota ei saada yleisestä ratkaisusta millään vakion C arvolla. Differentiaaliyhtälön ratkaisua, jota ei voida johtaa yleisestä ratkaisusta, kutsutaan *erikoisratkaisuksi.*

Seuraavaksi tutustumme erilaisiin differentiaaliyhtälöihin ja niiden ratkaisumenetelmiin.

4.2 Alkuarvotehtävät

Integraalilaskennassa tehtävä "määrää $\int \sin(x)dx$" tarkoitti sitä, että etsitään **kaikki** funktion $\sin(x)$ integraalifunktiot, eli funktiot F joille $F'(x) = \sin(x)$ kaikilla x. Tämän tehtävän ratkaisu on funktiot $-\cos(x) + C$, missä C on mikä tahansa reaaliluku. Esimerkin 3.3.1 (c)-kohdassa selvitimme funktion $\sin(x)$ sen integraalifunktion F, jolle $F(\pi) = 2$. Tämän tehtävän ratkaisu on **yksi** funktio; $F(x) = -\cos(x) + 1$.

Vastaavasti tällä kurssilla esiintyville differentiaaliyhtälöille saadaan ratkaisuksi äärettömän monta funktiota (yleinen ratkaisu), mutta antamalla lisäehdoksi että funktion on saatava jokin tietty arvo annetussa pisteessä, saadaan ratkaisuksi yksi funktio (yksittäisratkaisu).

Tehtävä, jossa etsitään differentiaaliyhtälön se ratkaisu joka saa tietyn arvon annetussa pisteessä, on nimeltään *alkuarvotehtävä*. Ratkaisuun liittyy aina *ratkaisuväli*. Ratkaisuväli on suurin avoin väli johon annettu piste kuuluu, ja jossa **sekä** differentiaaliyhtälö **että** ratkaisufunktio ovat määriteltyjä.[3] Tällä kurssilla käy usein (mutta ei aina) niin, että ratkaisuväli on koko reaaliakseli $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Esimerkki 4.2.1.

(a) *Esimerkissä 3.3.1 (c) ratkaisimme alkuarvotehtävän*

$$\begin{cases} y'(x) = \sin(x) \\ y(\pi) = 2 \end{cases},$$

ja saimme ratkaisuksi $y(x) = -\cos(x) + 1$*. Koska yhtälö* $y'(x) = \sin(x)$ *ja funktio* $y(x) = -\cos(x) + 1$ *ovat määriteltyjä kaikilla* $x \in \mathbb{R}$*, ratkaisuväli on* $\mathbb{R}$.

(b) *Ratkaistaan alkuarvotehtävä*

$$\begin{cases} y'(x) + xy(x) = 0 \\ y(0) = 4 \end{cases}.$$

Esimerkissä 4.1.1 (b) selvitettiin, että ratkaisu voisi olla muotoa $y(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$*. Lasketaan, millä vakion* C *arvolla funktio toteuttaa alkuehdon* $y(0) = 4$*:*

$$4 = y(0) = Ce^{-\frac{1}{2}\cdot 0^2} = C \cdot 1 = C.$$

Siis alkuarvotehtävän ratkaisu on $y(x) = 4e^{-\frac{1}{2}x^2}$*. Differentiaaliyhtälö ja ratkaisufunktio ovat taas määriteltyjä kaikkialla, joten ratkaisuväli on* $\mathbb{R}$.

(c) *Ratkaistaan alkuarvotehtävä*

$$\begin{cases} y'(x) = 2xy(x)^2 \\ y(2) = 1 \end{cases}.$$

[3] Tämä on suurin väli jossa voi perustellusti sanoa että saatu funktio on kyseisen alkuarvotehtävän ratkaisu.

Esimerkissä 4.1.1 (b) selvitettiin, että ratkaisu voisi olla muotoa $y(x) = -\frac{1}{x^2+C}$. Lasketaan, millä vakion C arvolla funktio toteuttaa alkuehdon $y(2) = 1$:

$$1 = y(2) = -\frac{1}{2^2+C} = -\frac{1}{4+C} \quad \Leftrightarrow \quad 4 + C = -1 \quad \Leftrightarrow \quad C = -5.$$

Siis alkuarvotehtävän ratkaisu on $y(x) = -\frac{1}{x^2-5}$. Differentiaaliyhtälö on määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$, mutta funktio $y(x) = -\frac{1}{x^2-5}$ on määritelty vain kun $x^2 \neq 5$, joka on avointen välien $(-\infty, -\sqrt{5})$, $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$, ja $(\sqrt{5}, \infty)$ yhdiste. Koska alkuarvona annettu piste $x = 2$ kuuluu välille $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$, on alkuarvotehtävän ratkaisuväli $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$.

4.3 Integroimalla ratkeava differentiaaliyhtälö

Yksinkertaisimmillaan ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö on siis muotoa

$$y'(x) = f(x).$$

Silloin tuntemattoman funktion y derivaatta tunnetaan eksplisiittisesti muuttujan x funktiona ja differentiaaliyhtälön yleinen muoto saadaan laskemalla integraali

$$y(x) = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

Esimerkki 4.3.1.

(a) *Ratkaistaan alkuarvotehtävä*

$$\begin{cases} y'(x) = xe^{-x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Yhtälö on muotoa $y'(x) = f(x)$, joten sen ratkaisu on

$$\begin{aligned} y(x) &= \int y'(x)\mathrm{d}x = \int xe^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \underbrace{-2x}_{g'(x)}\underbrace{e^{-x^2}}_{e^{g(x)}}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C. \end{aligned}$$

Alkuehdon $y(0) = 1$ nojalla

$$1 = y(0) = -\frac{1}{2}e^{-0^2} + C = -\frac{1}{2} + C \quad \Leftrightarrow \quad C = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ratkaisu on $y(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{3}{2}$. Ratkaisuväli on $\mathbb{R}$.

(b) *Ratkaistaan differentiaaliyhtälö*

$$x^2y'(x) + y'(x) = x^5 - x.$$

Koska

$$x^2y'(x) + y'(x) = x^5 - x \quad \Leftrightarrow \quad (x^2+1)y'(x) = x^5 - x$$

$$\Leftrightarrow \quad y'(x) = \frac{x^5 - x}{x^2+1} = x \cdot \frac{x^4-1}{x^2+1} = x \cdot \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1} = x(x^2-1),$$

niin yhtälö on integroimalla ratkeava differentiaaliyhtälö:

$$y(x) = \int x(x^2-1)\mathrm{d}x = \int \left(x^3 - x\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + C.$$

4.4 Separoituva differentiaaliyhtälö

Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö on separoituva, jos se voidaan esittää muodossa

$$y'(x) = \frac{g(x)}{h\left(y(x)\right)}.$$

Esimerkiksi differentiaaliyhtälöt

$$y'(x) = (2x-3)(y(x)+1) \quad \text{ja} \quad y'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2\left(y(x)\right)\sin\left(y(x)\right)}$$

ovat separoituvia. Ensimmäiselle yhtälölle on $g(x) = 2x - 3$ ja $h(y) = \frac{1}{y+1}$, ja toiselle yhtälölle on $g(x) = \sin(x)$ ja $h(y) = \cos^2(y)\sin(y)$.

Oletetaan, että h on jatkuva ja tutkitaan yhtälöä:

$$\begin{aligned}
& & y'(x) &= \frac{g(x)}{h\left(y(x)\right)} & & \Big| \cdot h\left(y(x)\right) \\
&\Leftrightarrow & h(y(x))y'(x) &= g(x) & & H(x) = \int h(x)\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow & DH(y(x)) &= g(x) & & \Big| \int \\
&\Leftrightarrow & H(y(x)) &= \int g(x)\mathrm{d}x + C = G(x) + C & & G(x) = \int g(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Kuvaus y (eli yleinen ratkaisu) yritetään nyt ratkaista yhtälöstä

$$\boxed{H(y(x)) = G(x) + C}$$

Lisäksi, jos lausekkeella $\frac{1}{h(y)}$ on nollakohta pisteessä $y = y_0$, niin yhtälöllä on ratkaisu $y(x) = y_0$. Esimerkiksi yhtälön $y'(x) = (2x-3)(y(x)+1)$ eräs ratkaisu on $y(x) = -1$, sillä lausekkeella $\frac{1}{h(y)} = y + 1$ on nollakohta pisteessä $y = -1$.

Esimerkki 4.4.1.

(a) *Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä $y'(x) = 2y(x)$. Yhtälö on separoituva, koska se voidaan kirjoittaa muotoon*

$$y'(x) = 2y(x) = \frac{2}{\frac{1}{y(x)}} = \frac{g(x)}{h(y(x))},$$

missä $g(x) = 2$ ja $h(y) = \frac{1}{y}$. Tällöin $G(x) = 2x$ ja $H(y) = \ln|y|$, ja koska $y = 0$ on lausekkeen $\frac{1}{h(y)} = y$ nollakohta, eräs ratkaisu differentiaaliyhtälölle on $y(x) = 0$. Lisäksi saamme

$$\begin{aligned} & H(y(x)) = G(x) + C \\ \Leftrightarrow \quad & \ln|y(x)| = 2x + C \qquad \Big| e^{\cdot} \\ \Leftrightarrow \quad & |y(x)| = e^{2x+C} \\ \Leftrightarrow \quad & y(x) = \pm e^{C} e^{2x}. \end{aligned}$$

Koska $e^C > 0$ kaikilla $C \in \mathbb{R}$, näemme tästä että $y(x) = C_0 e^{2x}$ on yhtälön ratkaisu kaikilla $C_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Lisäksi muistetaan, että $y(x) = 0 = 0 \cdot e^{2x}$ on yhtälön ratkaisu, joten saammekin että $y(x) = Ce^{2x}$ on ratkaisu kaikilla $C \in \mathbb{R}$.
Muista että ratkaisun voi aina tarkistaa:
Kun $y(x) = Ce^{2x}$, on $y'(x) = C \cdot 2e^{2x} = 2 \cdot Ce^{2x} = 2y(x)$. Siis Ce^{2x} todella on differentiaaliyhtälön $y'(x) = 2y(x)$ ratkaisu.

(b) *Ratkaistaan alkuarvotehtävä*

$$\begin{cases} y'(x) = 2y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Kohdassa (a) totesimme että yhtälön $y'(x) = 2y(x)$ ratkaisut ovat $y(x) = Ce^{2x}$ kaikilla $C \in \mathbb{R}$. Ratkaistaan luku C käyttämällä lisäehtoa $y(0) = 1$:

$$1 = y(0) = Ce^{2\cdot 0} = C.$$

Siispä $C = 1$, eli alkuarvotehtävän ratkaisu on $y(x) = e^{2x}$. Ratkaisuväli on $\mathbb{R}$.
Tässä voi lisäksi tarkistaa että y toteuttaa lisäehdon:
Nyt $y(0) = e^{2\cdot 0} = e^0 = 1$, joten funktio $y(x) = e^{2x}$ toteuttaa lisäehdon $y(0) = 1$.

(c) *Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä $y'(x) = (2x-3)(y(x)+1)$. Yhtälö on separoituva, koska se voidaan kirjoittaa muotoon*

$$y'(x) = (2x-3)(y(x)+1) = \frac{2x-3}{\frac{1}{y(x)+1}} = \frac{g(x)}{h(y(x))},$$

missä $g(x) = 2x-3$ ja $h(y) = \frac{1}{y+1}$. Tällöin $G(x) = x^2 - 3x$ ja $H(y) = \ln|y+1|$, ja koska $y = -1$ on lausekkeen $\frac{1}{h(y)} = y+1$ nollakohta, eräs ratkaisu differentiaaliyhtälölle on $y(x) = -1$. Lisäksi saamme

$$\begin{aligned} & & H(y(x)) &= G(x) + C \\ &\Leftrightarrow & \ln|y(x)+1| &= x^2 - 3x + C & \Big| e^{\cdot} \\ &\Leftrightarrow & |y(x)+1| &= e^{x^2-3x+C} \\ &\Leftrightarrow & y(x)+1 &= \pm e^C e^{x^2-3x} \\ &\Leftrightarrow & y(x) &= C_0 e^{x^2-3x} - 1, & C_0 \neq 0 \end{aligned}$$

Koska myös $y(x) = -1$ on yhtälön ratkaisu, on $y(x) = Ce^{x^2-3x} - 1$ ratkaisu kaikilla $C \in \mathbb{R}$.

(d) *Ratkaistaan alkuarvotehtävä*

$$\begin{cases} y'(x) = (2x-3)(y(x)+1) \\ y(1) = 0 \end{cases}.$$

Kohdassa (c) totesimme että yhtälön $y'(x) = (2x-3)(y(x)+1)$ ratkaisut ovat $y(x) = Ce^{x^2-3x} - 1$ kaikilla $C \in \mathbb{R}$. Ratkaistaan luku C käyttämällä lisäehtoa $y(1) = 0$:

$$\begin{aligned} & 0 = y(1) = Ce^{1^2-3\cdot 1} - 1 = Ce^{-2} - 1 \\ \Leftrightarrow\ & 1 = Ce^{-2} \\ \Leftrightarrow\ & e^2 = C. \end{aligned}$$

Siispä $C = e^2$, eli alkuarvotehtävän ratkaisu on $y(x) = e^2 e^{x^2-3x} - 1 = e^{x^2-3x+2} - 1$. Ratkaisuväli on $\mathbb{R}$.

(e) *Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä $y'(x) + xy(x) = 0$. Se voidaan kirjoittaa muotoon*

$$y'(x) = -xy(x) = \frac{-x}{\frac{1}{y(x)}} = \frac{g(x)}{h(y(x))}.$$

Tässä siis $g(x) = -x$ ja $h(y) = \frac{1}{y}$, jolloin $G(x) = -\frac{1}{2}x^2$ ja $H(y) = \ln|y|$. Lausekkeella $\frac{1}{h(y)}$ on nollakohta $y = 0$, joten yhtälöllä on ainakin ratkaisu $y(x) = 0$. Lisäksi saamme

$$
\begin{aligned}
& & H(y(x)) &= G(x) + C & & \\
&\Leftrightarrow & \ln|y(x)| &= -\frac{1}{2}x^2 + C & & \Big| e^{\cdot} \\
&\Leftrightarrow & |y(x)| &= e^{-\frac{1}{2}x^2 + C} = e^C e^{-\frac{1}{2}x^2} & & \\
&\Leftrightarrow & y(x) &= \pm e^C e^{-\frac{1}{2}x^2} & & \\
&\Leftrightarrow & y(x) &= C_0 e^{-\frac{1}{2}x^2}, & & C_0 \neq 0
\end{aligned}
$$

Koska myös $y(x) = 0$ on yhtälön ratkaisu, on $y(x) = C_0 e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ratkaisu kaikilla $C_0 \in \mathbb{R}$.

(f) *Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä*

$$y'(x) = 2xy(x)^2 = \frac{2x}{\frac{1}{y(x)^2}} = \frac{g(x)}{h(y(x))},$$

missä $g(x) = 2x$ ja $h(y) = \frac{1}{y^2}$. Silloin $G(x) = x^2$ ja $H(y) = -\frac{1}{y}$ ja

$$
\begin{aligned}
& & H(y(x)) &= G(x) + C & & \\
&\Leftrightarrow & -\frac{1}{y(x)} &= x^2 + C & & \Big| \cdot \frac{y(x)}{x^2 + C}, \quad x^2 \neq -C \\
&\Leftrightarrow & -\frac{1}{x^2 + C} &= y(x) & &
\end{aligned}
$$

Siis $y(x) = -\frac{1}{x^2+C}$ on ratkaisu kun $x^2 \neq -C$. Lisäksi lausekkeella $\frac{1}{h(y)} = y^2$ on nollakohta pisteessä $y = 0$, joten yhtälöllä on erikoisratkaisu $y(x) = 0$.

(g) *Ratkaistaan alkuarvotehtävä*

$$\begin{cases} y'(x) = 2xy(x)(y(x) - 1) \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Separoidaan:

$$y'(x) = 2xy(x)(y(x) - 1) = \frac{2x}{\frac{1}{y(x)(y(x)-1)}} = \frac{g(x)}{h(y(x))},$$

missä $g(x) = 2x$ *ja* $h(y) = \frac{1}{y(y-1)}$*. Lausekkeella* $\frac{1}{h(y)}$ *on nollakohdat pisteissä* $y = 0$ *ja* $y = 1$*, joten yhtälöllä on ratkaisut* $y(x) = 0$ *ja* $y(x) = 1$*. Kumpikaan näistä ei kuitenkaan toteuta alkuehtoa* $y(0) = \frac{1}{2}$*, joten jatketaan etsintää. Nyt* $G(x) = x^2$ *ja*

$$\begin{aligned} H(y) &= \int \frac{1}{y(y-1)}\mathrm{d}y = \int \frac{1-y+y}{y(y-1)}\mathrm{d}y = \int \left(\frac{1-y}{y(y-1)} + \frac{y}{y(y-1)}\right)\mathrm{d}y \\ &= \int -\frac{1}{y}\mathrm{d}y + \int \frac{1}{y-1}\mathrm{d}y = -\ln(|y|) + \ln(|y-1|) = \ln\left(\left|\frac{y-1}{y}\right|\right). \end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned} && H(y(x)) &= G(x) + C \\ \Leftrightarrow && \ln\left(\left|\frac{y(x)-1}{y(x)}\right|\right) &= x^2 + C \\ \Leftrightarrow && \left|\frac{y(x)-1}{y(x)}\right| &= e^{x^2+C} = e^C e^{x^2}. \end{aligned}$$

Itseisarvolle pätee

$$\left|\frac{y(x)-1}{y(x)}\right| = \begin{cases} \frac{y(x)-1}{y(x)}, & \text{kun } y(x) < 0 \text{ tai } y(x) > 1 \\ \frac{1-y(x)}{y(x)}, & \text{kun } 0 < y(x) < 1 \end{cases}.$$

Koska haluamme, että $y(0) = \frac{1}{2}$*, tarkastelemme vain tilannetta* $0 < y(x) < 1$*, jolloin yhtälö* $H(y(x)) = G(x) + C$ *saa muodon*

$$\begin{aligned} && \frac{1-y(x)}{y(x)} &= e^C e^{x^2} \\ \Leftrightarrow && 1 - y(x) &= e^C e^{x^2} y(x) \\ \Leftrightarrow && 1 &= \left(e^C e^{x^2} + 1\right) y(x) \\ \Leftrightarrow && \frac{1}{e^C e^{x^2} + 1} &= y(x). \end{aligned}$$

Etsitään vielä sellainen C*, että alkuehto* $y(0) = \frac{1}{2}$ *toteutuu:*

$$\frac{1}{2} = y(0) = \frac{1}{e^C e^{0^2} + 1} = \frac{1}{e^C + 1} \quad \Leftrightarrow \quad e^C + 1 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad C = 0.$$

Alkuarvotehtävän ratkaisu on $y(x) = \frac{1}{e^{x^2}+1}$*. Ratkaisuväli on* $\mathbb{R}$*.*

Esimerkki 4.4.2.

(a) *Tarkastellaan esimerkin 3.2.5(a) differentiaaliyhtälöä* $y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$. *Tämä differentiaaliyhtälö on separoituva, koska se on muotoa* $y'(x) = \frac{g(x)}{h(y(x))}$ *funktioille* $g(x) = -x$ *ja* $h(y) = y$. *Tällöin* $G(x) = -\frac{1}{2}x^2$ *ja* $H(y) = \frac{1}{2}y^2$, *joten saamme ratkaisuksi*

$$\begin{aligned}
& H(y(x)) = G(x) + C \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2}y(x)^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C && \Big| \cdot 2 \\
\Leftrightarrow\quad & y(x)^2 = -x^2 + 2C && \Big| \sqrt{(\cdot)} \\
\Leftrightarrow\quad & y(x) = \pm\sqrt{-x^2 + 2C} && \Big| \textit{merkitään } C_0 = 2C \\
\Leftrightarrow\quad & y(x) = \pm\sqrt{C_0 - x^2}.
\end{aligned}$$

Differentiaaliyhtälön ratkaisut ovat siis $y(x) = \pm\sqrt{C - x^2}$, *missä* $C > 0$ *(muuten lauseke ei olisi missään määritelty), ja lisäksi on oltava* $x^2 < C$, *eli* $x \in (-\sqrt{C}, \sqrt{C})$.

(b) *Ratkaistaan alkuarvotehtävä*

$$\begin{cases} y'(x) = -\frac{x}{y(x)} \\ y(0) = 2 \end{cases}.$$

Kohdassa (a) totesimme että yhtälön $y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$ *ratkaisut ovat* $y(x) = \pm\sqrt{C - x^2}$, *missä* $C > 0$. *Ratkaistaan luku* C *käyttämällä lisäehtoa* $y(0) = 2$:

$$\begin{aligned}
& 2 = y(0) = \sqrt{C - 0^2} = \sqrt{C} \\
\Leftrightarrow\quad & 4 = C.
\end{aligned}$$

Siispä $C = 4$, *eli alkuarvotehtävän ratkaisu on* $y(x) = \sqrt{4 - x^2}$. *Differentiaaliyhtälö ei ole määritelty kun* $y(x) = 0$, *eli kun* $x^2 = 4$. *Lisäksi* $y(x)$ *on määritelty kun* $x^2 < 4$, *eli ratkaisuväli on* $(-2, 2)$. *Vastaavasti alkuarvotehtävän*

$$\begin{cases} y'(x) = -\frac{x}{y(x)} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

ratkaisuksi saadaan $y(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, *ja ratkaisuväli on* $(-1, 1)$.

4.5 Lineaarinen yhtälö

Differentiaaliyhtälö on *lineaarinen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö*, jos se on muotoa

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x).$$

Jos funktio g on nolla, niin yhtälöä sanotaan *homogeeniseksi*. Tässä tapauksessa yhtälö voidaan muokata muotoon:

$$y'(x) + f(x)y(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'(x) = -f(x)y(x) = \frac{-f(x)}{\frac{1}{y(x)}}.$$

Siis homogeeninen yhtälö onkin separoituva, funktioilla $g(x) = -f(x)$ ja $h(y) = \frac{1}{y}$, joten $G(x) = -F(x) = -\int f(x)dx$ ja $H(y) = \log|y|$. Nyt saamme separoituvan yhtälön ratkaisukaavasta

$$H(y(x)) = -F(x) + C$$

homogeenisen yhtälön $y'(x) + f(x)y(x) = 0$ yleiseksi ratkaisuksi

$$\boxed{y(x) = Ce^{-\int f(x)\mathrm{d}x} = Ce^{-F(x)}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

Huomaa, että tämä sisältää myös ratkaisun $y(x) = 0$. Epähomogeenisen yhtälön $y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$ ratkaisun voi löytää esimerkiksi seuraavasti:

1. Etsitään (kokeilemalla) jokin ratkaisu. Käytetään siitä merkintää y_1.
2. Ratkaistaan vastaava homogeeninen yhtälö $y'(x) + f(x)y(x) = 0$, jolle saadaan yleinen ratkaisu $y_0(x) = Ce^{-\int f(x)\mathrm{d}x}$ $C \in \mathbb{R}$.
3. Epähomogeenisen yhtälön $y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$ yleinen ratkaisu on silloin $y_1 + y_0$:

$$\begin{aligned}
&(y_1 + y_0)'(x) + f(x)(y_1 + y_0)(x) \\
&= \underbrace{y_1'(x) + f(x)y_1(x)}_{=g(x)} + \underbrace{y_0'(x) + f(x)y_0(x)}_{=0} \\
&= g(x).
\end{aligned}$$

Esimerkki 4.5.1.

(a) *Ratkaistaan yhtälö*

$$y'(x) + y(x) = \cos(x).$$

1. *Etsitään jokin ratkaisu: Kokeillaan olisiko funktio*

$$y_1(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$$

ratkaisu joillain $A, B \in \mathbb{R}$ *eli yritetään löytää luvut* A *ja* B*, joille* $y_1'(x) + y_1(x) = \cos(x)$*:*

$$\begin{aligned} y_1'(x) + y_1(x) &= A\cos(x) - B\sin(x) + A\sin(x) + B\cos(x) \\ &= (A+B)\cos(x) + (A-B)\sin(x) \\ &= \cos(x), \end{aligned}$$

jos $A + B = 1$ *ja* $A - B = 0$*. Nämä ehdot toteutuvat, kun* $A = B = \frac{1}{2}$*. Siis* $y_1(x) = \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x)$ *on eräs ratkaisu.*

2. *Ratkaistaan vastaava homogeeninen yhtälö* $y'(x) + y(x) = 0$*: Nyt* $f(x) = 1$*, joten yleinen ratkaisu on*

$$y_0(x) = Ce^{-\int f(x)\mathrm{d}x} = Ce^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3. *Epähomogeenisen yhtälön* $y'(x) + y(x) = g(x)$ *yleinen ratkaisu on*

$$y_1(x) + y_0(x) = \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x) + Ce^{-x}.$$

(b) *Ratkaistaan yhtälö*

$$y'(x) + 2y(x) = 2x^2 + 4x + 5.$$

1. *Koska* $g(x) = 2x^2 + 4x + 5$ *on toisen asteen polynomi, kokeillaan toteuttaako jokin toisen asteen polynomi* $y_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ *yhtälön. Yhtäsuuruus*

$$2x^2 + 4x + 5 = y_1'(x) + 2y_1(x) = a_1 + 2a_2x + 2a_0 + 2a_1x + 2a_2x^2$$

johtaa lineaariseen yhtälöryhmään

$$\begin{cases} a_1 + 2a_0 = 5 \\ 2a_2 + 2a_1 = 4 \\ 2a_2 = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

Siis $y_1(x) = 2 + x + x^2$ *on eräs ratkaisu.*

2. *Ratkaistaan vastaava homogeeninen yhtälö $y'(x) + 2y(x) = 0$: Nyt $f(x) = 2$, joten yleinen ratkaisu on*

$$y_0(x) = Ce^{-\int f(x)\mathrm{d}x} = Ce^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3. *Epähomogeenisen yhtälön $y'(x) + y(x) = g(x)$ yleinen ratkaisu on*

$$y_1(x) + y_0(x) = 2 + x + x^2 + Ce^{-2x}.$$

Esimerkissä 4.5.1 ratkaisun löytämistä helpotti se, että differentiaaliyhtälössä $y'(x)+f(x)y(x) = g(x)$ funktio $f(x)$ olikin vakiofunktio (esimerkin (a)-kohdassa $f(x) = 1$ ja (b)-kohdassa $f(x) = 2$). Yleisessä tapauksessa ratkaisun arvaaminen voi olla hankalampaa. Lineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaisemiseksi on kuitenkin olemassa toinenkin keino, jossa yksittäisratkaisua y_1 ei tarvitse arvata tai löytää kokeilemalla, vaan sen voi laskea. Johdetaan seuraavaksi laskukaava lineaarisen differentiaaliyhtälön

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$$

yleiselle ratkaisulle.

Tehdään ratkaisuyritys $y(x) = V(x)e^{-F(x)}$, missä $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$ on funktion f jokin integraalifunktio ja $V(x)$ on tuntematon funktio. Silloin

$$\begin{aligned}
&y'(x) + f(x)y(x) \\
&= V'(x)e^{-F(x)} + V(x)(-\underbrace{F'(x)}_{f(x)})e^{-F(x)} + f(x)V(x)e^{-F(x)} \\
&= V'(x)e^{-F(x)}.
\end{aligned}$$

Jotta $y(x) = V(x)e^{-F(x)}$ olisi yhtälön $y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$ ratkaisu, on oltava

$$V'(x)e^{-F(x)} = g(x)$$

eli

$$V'(x) = e^{F(x)}g(x).$$

Tämä on integroimalla ratkeava differentiaaliyhtälö, josta funktio V saadaan laskemalla integraali

$$V(x) = \int e^{F(x)}g(x)\mathrm{d}x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Koska $y(x) = V(x)e^{-F(x)}$, on

$$\boxed{y(x) = \left(\int e^{F(x)}g(x)\mathrm{d}x + C\right) e^{-F(x)}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

lineaarisen differentiaaliyhtälön $y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$ yleinen ratkaisu.

Huomaa, että tästä kaavasta saadaan myös homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu: homogeenisessa yhtälössä $g(x) = 0$, jolloin ylläoleva kaava muokkautuu muotoon

$$y(x) = \left(\int e^{F(x)} \cdot 0 \, \mathrm{d}x + C\right) e^{-F(x)} = Ce^{-F(x)}.$$

Esimerkki 4.5.2.

(a) *Ratkaistaan Esimerkin* 4.5.1(*a*) *yhtälö*

$$y'(x) + y(x) = \cos(x)$$

yo. kaavan avulla. Koska $f(x) = 1$, *on* $F(x) = x$. *Ratkaisu on*

$$y(x) = \left(\int e^{F(x)} g(x)\mathrm{d}x + C\right) e^{-F(x)} = \int e^x \cos(x)\mathrm{d}x e^{-x} + Ce^{-x}.$$

Lasketaan integraali $\int e^x \cos(x)\mathrm{d}x$ *osittaisintegroinnilla: Yhtälöstä*

$$\begin{aligned}\int e^x \cos(x)\mathrm{d}x &= e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)\mathrm{d}x \\ &= e^x \sin(x) - \left(e^x(-\cos(x)) - \int e^x(-\cos(x))\mathrm{d}x\right) \\ &= e^x(\sin(x) + \cos(x)) - \int e^x \cos(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

saadaan

$$\int e^x \cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^x(\sin(x) + \cos(x)).$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön $y(x) = \int e^x \cos(x)\mathrm{d}x e^{-x} + Ce^{-x}$ *saadaan*

$$\begin{aligned}y(x) &= \int e^x \cos(x)\mathrm{d}x e^{-x} + Ce^{-x} \\ &= \frac{1}{2}e^x(\sin(x) + \cos(x))e^{-x} + Ce^{-x} \\ &= \frac{1}{2}(\sin(x) + \cos(x)) + Ce^{-x}.\end{aligned}$$

(b) *Esimerkin* 4.5.1(*b*) *differentiaaliyhtälön*

$$y'(x) + 2y(x) = 2x^2 + 4x + 5$$

ratkaisu on

$$y(x) = \left(\int e^{F(x)} g(x) \mathrm{d}x + C \right) e^{-F(x)} = \int e^{2x} (2x^2 + 4x + 5) \mathrm{d}x e^{-2x} + Ce^{-2x}.$$

Lasketaan integraali $\int e^{2x}(2x^2 + 4x + 5)\mathrm{d}x$ *osittaisintegroimalla:*

$$\begin{aligned} \int e^{2x} (2x^2 + 4x + 5) \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} e^{2x} (2x^2 + 4x + 5) - \int \frac{1}{2} e^{2x} (4x + 4) \mathrm{d}x \\ &= e^{2x} (x^2 + 2x + \frac{5}{2}) - \left[\frac{1}{4} e^{2x} (4x + 4) - \int \frac{1}{4} e^{2x} \cdot 4 \mathrm{d}x \right] \\ &= e^{2x} (x^2 + x + \frac{3}{2}) + \frac{1}{2} e^{2x} \\ &= e^{2x} (x^2 + x + 2). \end{aligned}$$

Sijoittamalla tämä ratkaisufunktioon saadaan

$$\begin{aligned} y(x) &= \int e^{2x} (2x^2 + 4x + 5) \mathrm{d}x e^{-2x} + Ce^{-2x} \\ &= e^{2x} (x^2 + x + 2) e^{-2x} + Ce^{-2x} \\ &= x^2 + x + 2 + Ce^{-2x}. \end{aligned}$$

(c) *Ratkaistaan lineaarinen differentiaaliyhtälö*

$$y'(x) - e^x y(x) = e^{e^x}.$$

Tässä $f(x) = -e^x$ *ja* $g(x) = e^{e^x}$, *joten* $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \int -e^x \mathrm{d}x = -e^x$. *Siis saamme ratkaisukaavalla:*

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(\int e^{F(x)} g(x) \mathrm{d}x + C \right) e^{-F(x)} \\ &= \left(\int e^{-e^x} e^{e^x} \mathrm{d}x + C \right) e^{e^x} \\ &= \left(\int 1 \mathrm{d}x + C \right) e^{e^x} \\ &= (x + C) \, e^{e^x}. \end{aligned}$$

4.6 Differentiaaliyhtälöiden sovelluksia

Tarkastellaan joitain ilmiöitä, joiden matemaattinen malli johtaa differentiaaliyhtälöön.

Saalistaja- ja saalisongelma: Oletetaan, että jollei petoja olisi, niin saaliseläinten määrä kasvaisi eksponentiaalisesti. Saaliseläinten määrää $p(t)$ kuvaa silloin differentiaaliyhtälö

$$p'(t) = ap(t).$$

Toisaalta yksi petoeläin syö saaliseläimiä vauhdilla v, jonka suuruus riippuu saaliseläinten määrästä p, eli saaliseläinten syöntivauhti on $v(p(t))$. Oletetaan, että syöntivauhti on suoraan verrannollinen saaliseläinten lukumäärään eli $v(p(t)) = bp(t)$. Kun petoeläinten määrää kuvataan funktiolla $g(t)$, saadaan saaliseläinten määrää kuvaava differentiaaliyhtälö

$$p'(t) = ap(t) - v(p(t))g(t) = ap(t) - bp(t)g(t).$$

Saalistajien määrä g on riippuvainen saalistusvauhdista ja luonnollisesta kuolleisuudesta. Sitä kuvaa yhtälö

$$g'(t) = cv(p(t))g(t) - dg(t) = (cbp(t) - d)g(t),$$

missä c on lisääntymisvauhtia kuvaava vakio ja d kuolleisuuden osuus.

Saalistaja- ja saalisongelmaa kuvaa yhtälöpari

$$\begin{cases} p'(t) = ap(t) - bp(t)g(t) \\ g'(t) = (cbp(t) - d)g(t) \end{cases}$$

Jatkuvakorkoinen tili: Oletetaan että tilille lisätään korko pääomaan jatkuvasti, (jatkuvalla) korolla $p\%$. Olkoon funktio $y(t)$ rahan määrä euroina hetkellä $t \geq 0$, missä t on aika vuosina. Rahan määrä lisääntyy koko ajan vauhtia

$$y'(t) = \frac{p}{100}y(t).$$

Kun tilille on alussa, hetkellä $t = 0$, talletettu A euroa, niin saadaan alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{p}{100}y(t) \\ y(0) = A \end{cases}$$

Tämän alkuarvotehtävän ratkaisu on

$$y(t) = Ae^{\frac{p}{100}t}.$$

Koska $y(1) = Ae^{\frac{p}{100}}$, kasvaa talletus vuodessa $e^{\frac{p}{100}}$-kertaiseksi, eli jatkuvaa korkoa $\frac{p}{100}$ vastaava vuosikorkokanta on $e^{\frac{p}{100}} - 1$. Toisinpäin ajateltuna, vuosikorkokantaa q vastaava jatkuva korko on $\ln(q + 1)$.

Yhden tuotteen hinnan dynamiikka: Tarkastellaan erään tuotteen hinnan käyttäytymistä. Käytetään merkintöjä

- hinta $= H(t)$
- kysyntä $= K(t) = a_1 - b_1 H(t)$ (kun hinta nousee, niin kysyntä vähenee)
- tarjonta $= T(t) = -a_2 + b_2 H(t)$ (kun hinta nousee niin tarjonta kasvaa)

Vakiot a_1, a_2, b_1 ja b_2 ovat ei-negatiivisia vakioita.

Kauppa on tasapainossa, jos kysyntä ja tarjonta ovat yhtä suuret eli

$$\begin{aligned} K(t) &= T(t) \\ a_1 - b_1 H(t) &= -a_2 + b_2 H(t) \\ a_1 + a_2 &= (b_1 + b_2) H(t) \\ H(t) &= \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}. \end{aligned}$$

Oletetaan, että hinnan muutos on suoraan verrannollinen ylikysyntään eli

$$H'(t) = m(K(t) - T(t))$$

jollain $m > 0$. Sijoitetaan tähän yhtälöön funktioiden K ja T lausekkeet ja saadaan

$$H'(t) = m\left(a_1 - b_1 H(t) - (-a_2 + b_2 H(t))\right) = m(a_1 + a_2) - m(b_1 + b_2) H(t).$$

Tämän differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$H(t) = \left(H(0) - \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}\right) e^{-m(b_1+b_2)t} + \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2},$$

missä $H(0)$ on hinta hetkellä $t = 0$. Riippumatta alkuarvosta $H(0)$ tuotteen hinta muuttuu pitkän ajan kuluessa niin että kauppa tasapainottuu:

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = \lim_{t\to\infty} \left(H(0) - \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}\right) \underbrace{e^{-m(b_1+b_2)t}}_{\to 0} + \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}.$$

Newtonin jäähtymislaki: Newtonin jäähtymislain mukaan lämpimän kappaleen lämpötila $y(t)$ alenee yhtälön

$$y'(t) = -K(y(t) - a)$$

mukaisesti, missä

- K on vakio, joka ilmaisee lämmön siirtymisen nopeutta
- a on ympäröivän aineen lämpötila