Tarkastellaan muuttujanvaihtoa laskemalla määrätty integraali $\int_0^2 x^3 dx$ muunnoksella $u = x^2$, eli $x = \sqrt{u}$.

Tällöin funktio x^3 on $x^3 = (\underbrace{x^2}_{u})^{\frac{3}{2}} = u^{\frac{3}{2}}$, ja

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = x^2 = 0 \\ x = 2 \Rightarrow u = x^2 = 4 \end{cases}.$$

Nyt (luonnollinen) arvaus on, että $\int_0^2 x^3 dx = \int_0^4 u^{\frac{3}{2}} du$. Tämä ei kuitenkaan pidä paikkaansa!

Syy tähän on seuraava: Kun lasketaan $\int_0^2 x^3 dx$, niin lasketaan funktion x^3 ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-alaa välillä $[0,2]$. Tällöin jokainen $\boxed{\text{muuttujan } x}$ arvo on tavallaan "saman-arvoinen".

Kun integraalia $\int_0^2 x^3 dx$ lasketaan "muuttujan $u = x^2$ maailmassa", tilanne muuttuu erilaiseksi; jokainen $\boxed{\text{muuttujan } u}$ arvo ei olekaan samanarvoinen!

Tämän hahmottaa (toivottavasti) sivun 2 kuvasta: Siinä on jaettu x-muuttujan väli $[0,2]$ tasaväleihin, ja piirretty mitä muunnos $u = x^2$ tekee näille väleille.

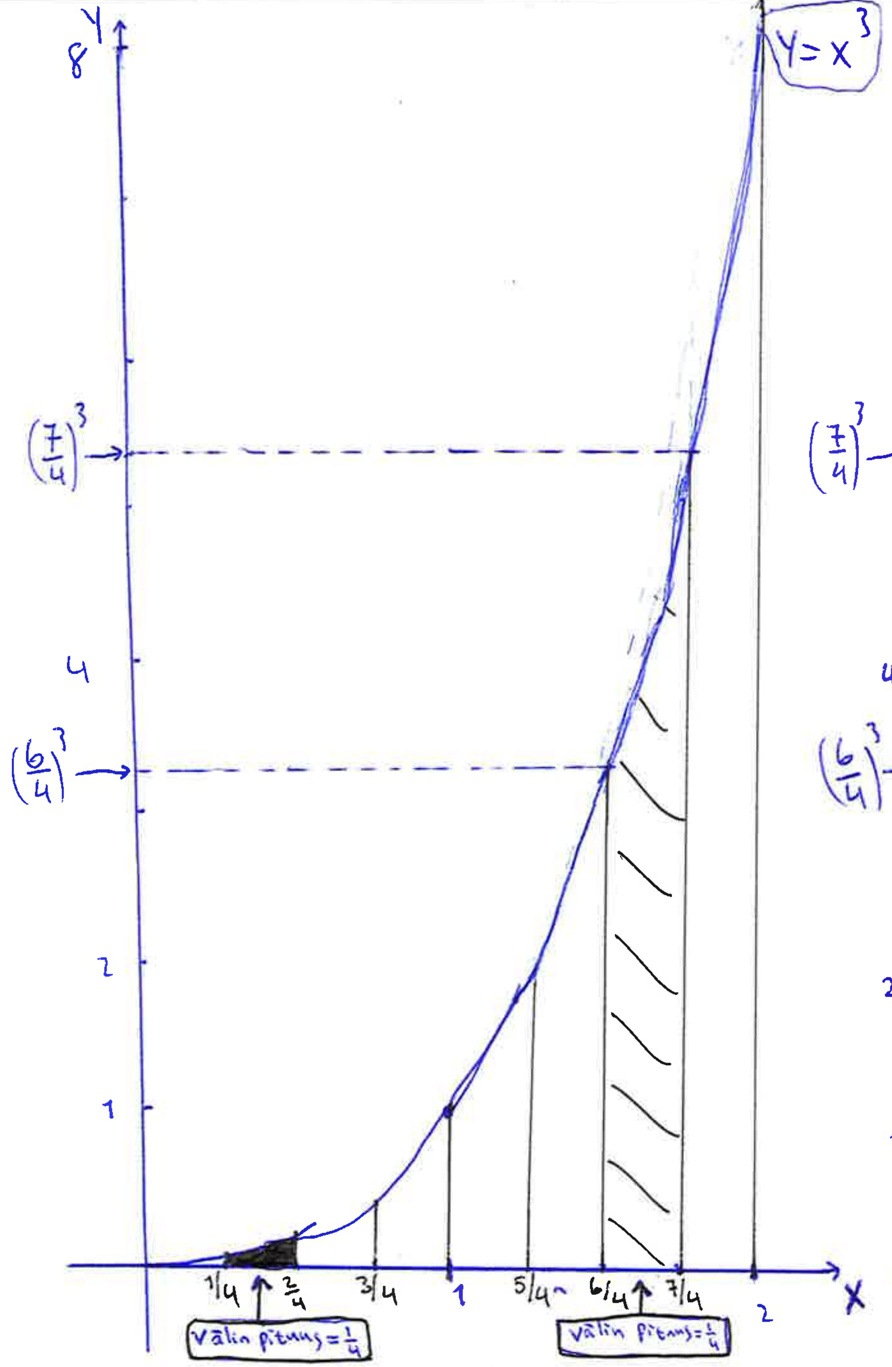
Huomattavaa on se, että ensimmäisiä välejä muunnos $u = x^2$ kutistaa, ja loppuja välejä muunnos venyttää leveämmiksi.

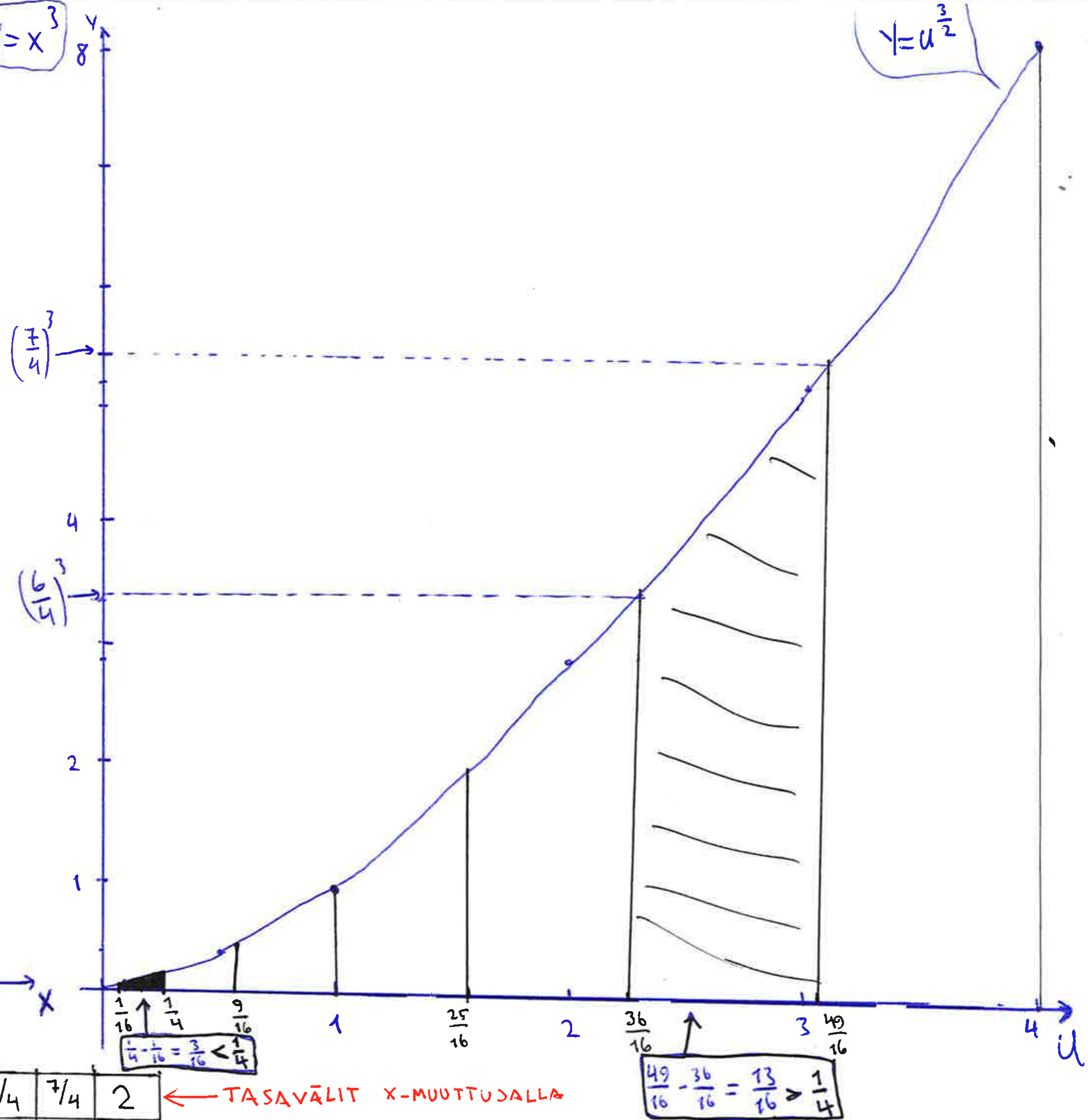
Kuitenkin esimerkiksi funktion x^3 integraali välillä $\left[\frac{6}{4}, \frac{7}{4}\right]$ tulisi olla sama kuin "u-maailmassa" integraali välillä $\left[\frac{36}{16}, \frac{49}{16}\right]$. Tämä toteutuu, kun painotamme muuttujan u arvoja eri tavalla.

Oikea paino saadaan derivaatasta: $\frac{dx}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{u}} du$.

Siis jokaista u:n arvoa kerrotaan luvulla $\frac{1}{2\sqrt{u}}$. Tällöin alkupään arvoja painotetaan enemmän, ja loppupään arvoja vähemmän. Nyt:

$$\int_0^2 x^3 dx = \int_0^4 u^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \int_0^4 \frac{1}{2} u \, du = \Big/_0^4 \left(\frac{1}{4}u^2\right) = \frac{1}{4} \cdot 4^2 = 4.$$





X	0	$1/4$	$2/4$	$3/4$	1	$5/4$	$6/4$	$7/4$	2	← TASAVÄLIT X-MUUTTUJALLA
$u = x^2$	0	$1/16$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$	$\frac{9}{16}$	1	$\frac{25}{16} = 1\frac{9}{16}$	$\frac{36}{16} = 2\frac{1}{4}$	$\frac{49}{16} = 3\frac{1}{16}$	4	← "VENYTETYT VÄLIT" u-muuttujalla