Vektorifunktioiden analyysi 2A
Harjoitus 1, 20.1.2017

1. Olkoon
$$f\colon [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x+y$$
ja $P=\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}\times\{0,\frac{1}{2},1\}$. Laske funktion f jakoon P liittyvät Darboux'n alasumma $L(f,P)$ ja yläsumma $U(f,P)$.

2. Olkoon $I=[0,1]\times[0,1]$ ja
$$f\colon I\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}5, & \text{jos } x\geq y\\ 0, & \text{jos } x<y\end{cases}$$
Osoita integroituvuuden määritelmää tai Riemannin ehtoa käyttäen, että f on integroituva.

3. Olkoon $I\subset\mathbb{R}^n$ kompakti väli ja olkoot $f\colon I\to\mathbb{R}$ ja $g\colon I\to\mathbb{R}$ integroituvia funktioita, joille pätee $f(x)\geq g(x)$ kaikilla $x\in I$. Osoita, että $\int_I f\geq\int_I g$.

4. Todista Riemannin ehto: Rajoitettu funktio $f\colon I\to\mathbb{R}$ on integroituva $\iff$ jokaiselle $\varepsilon>0$ on olemassa välin I jako P_ε siten, että $U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)<\varepsilon$.

5. Olkoon $I=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ kompakti väli.
   (a) Olkoon $f\colon I\to\mathbb{R}$ rajoitettu funktio, jolle pätee $f(x,y)=0$ kaikissa välin I sisäpisteissä. Osoita, että f on integroituva ja että $\int_I f=0$.
   (b) Olkoot $g\colon I\to\mathbb{R}$ ja $h\colon I\to\mathbb{R}$ integroituvia funktioita siten, että $g(x,y)=h(x,y)$ kaikissa välin I sisäpisteissä. Osoita, että $\int_I g=\int_I h$.

6. Olkoon $f\colon I\to\mathbb{R}$ rajoitettu funktio, jolle on olemassa välin $I\subset\mathbb{R}^n$ jako P siten, että $L(f,P)=U(f,P)$. Osoita, että f on vakiofunktio, ts. on olemassa $c\in\mathbb{R}$ siten, että $f(x)=c$ kaikilla $x\in I$.

7. Olkoon $I=[0,1]\times[0,1]$ ja $f\colon I\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x$. Osoita, että ei ole olemassa välin I jakoa P, jolle olisi $L(f,P)=\text{ala}\int_I f$.