Vektorifunktioiden analyysi 2A
Harjoitus 2, 27.1.2017

1. Hahmottele kuva joukosta
$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ z = 2\}$$
ja osoita, että joukko on 3-nollamittainen.

2. Osoita, että kompaktin välin $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ reuna ∂I on 2-nollamittainen.

3. Osoita, että avaruuden $\mathbb{R}^3$ yksikköpallon reuna
$$\partial B(0, 1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ \|(x, y, z)\| = 1\}$$
on nollamittainen.
(Vihje: Lause 1.3.2.)

4. Osoita, että $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ei ole nollamittainen.

5. Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ kompakti väli ja $A \subset I$. Osoita, että funktio
$$f \colon I \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in A, \\ 0, & \text{muutoin} \end{cases}$$
on integroituva jos ja vain jos ∂A on nollamittainen.

6. Todista Lause 1.2.4 tapauksessa $n = 2$: Olkoon $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ ja $f \colon I \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Tällöin f on integroituva.

7. Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ kompakti väli ja $f \colon I \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Oletetaan, että jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa välit $I_k \subset I$, $k = 1, \ldots, m$, siten, että
$$\mathcal{E}_f \subset \bigcup_{k=1}^{m} I_k \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda(I_k) < \varepsilon,$$
missä $\mathcal{E}_f$ on funktion f epäjatkuvuuspisteiden joukko. Osoita, että tällöin f on integroituva.

8. Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakti joukko ja $A_i \subset \mathbb{R}^n$ avoimia joukkoja siten, että $K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Osoita, että on olemassa $m \in \mathbb{N}$ siten, että $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} A_i$.
(Ohje: Tee antiteesi ja muista, että jokaisella rajoitetulla jonolla on suppeneva osajono.)