

Vektorifunktioiden analyysi 2A
Harjoitus 3, 3.2.2017

1. Laske integraalit

$$\int_0^1 \left(\int_{-2}^1 y^2 x^2 - 3x \, dx \right) dy \quad \text{ja} \quad \int_{-2}^1 \left(\int_0^1 y^2 x^2 - 3x \, dy \right) dx.$$

2. Laske funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x \sin y - ye^x$ integraali yli välin $I = [-1, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

3. Olkoon $I = [0, 1] \times [0, 1]$ ja

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} x + y^3, & \text{kun } y \leq x^2 \\ 2xy^2 + 1, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

(a) Perustele funktion f integroituvuus yli välin I .

(b) Miksi integraalin $\int_I f$ laskemiseen voidaan käyttää Fubinin lausetta (Lause 1.4.1)?

(c) Laske integraali $\int_I f$.

4. Hahmottele kuva joukosta

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-2, 1], 0 \leq x \leq y^2\}$$

ja laske funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y$ integraali yli joukon A .

5. Laske funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$ integraali yli kolmion muotoisen joukon A , jonka kärkipisteet ovat $(0, 0)$, $(1, 0)$ ja $(2, 2)$.

6. Vaihda integroimisjärjestystä integraalissa $\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x \frac{x}{1+y^2} \, dy \right) dx$ ja laske integraalin arvo.

(Ohje: Hahmottele ensin minkä kaksiulotteisen joukon yli integraalia laskeaan.)

7. Olkoon $I = [a, b] \times [c, d]$ ja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva. Määritellään

$$F: I \rightarrow \mathbb{R}, F(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(t, s) \, ds \, dt.$$

Osoita, että

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y)$$

kaikille $x \in]a, b[$ ja $y \in]c, d[$.