Vektorifunktioiden analyysi 2A
Harjoitus 4, 10.2.2017

1. Laske integraali
$$\int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 \cos(\pi(x+y+z))\,dx\,dy\,dz.$$

2. Hahmottele kuva joukosta
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \tfrac{1}{4}y^4 \le x \le y^2\}$$
ja perustele, miksi se on Jordan-joukko. Laske joukon A pinta-ala.

3. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ rajoitettu Jordan-joukko, jolle $V(A) > 0$. Joukon A *keskipiste* on piste $(\bar{x}, \bar{y})$, jossa
$$\bar{x} = \frac{1}{V(A)} \int_A x, \qquad \bar{y} = \frac{1}{V(A)} \int_A y.$$
Määritä joukon
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \sin x\}$$
keskipiste.

4. Joukon $A \subset \mathbb{R}^3$ rajaavat tasot $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $x + 2y + 3z = 6$. Perustele, miksi A on Jordan-joukko ja laske (integroimalla) tilavuus $V(A)$.

5. Olkoon
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x\}$$
ja
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x,y) \in B,\ 0 \le z \le x + y\}.$$
Hahmottele kuva joukoista A ja B sekä laske $\int_A f$, kun $f(x,y,z) = xyz$.

6. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu Jordan joukko.
(a) Osoita, että $\overline{A}$ on myös Jordan joukko ja että $V_n(\overline{A}) = V_n(A)$.
(b) Osoita, että jokaiselle jatkuvalle funktiolle $f \colon \overline{A} \to \mathbb{R}$ on $\displaystyle\int_{\overline{A}} f = \int_A f$.

7. Olkoon $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio ja $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
(a) Osoita, että jos $m \le f(x) \le M$ kaikilla $x \in B(x_0, r)$, niin
$$m \cdot V(B(x_0,r)) \le \int_{B(x_0,r)} f \le M \cdot V(B(x_0,r)).$$
(b) Osoita, että
$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{V(B(x_0,r))} \int_{B(x_0,r)} f = f(x_0).$$