

Vektorifunktioiden analyysi 2A

Harjoitus 5, 17.2.2017

1. Laske napakoordinaatteja käyttäen funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2xy$ integraali yli joukon

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x < 0, y > 0, 1 < x^2 + y^2 < 9\}.$$

2. Laske sylinterikoordinaatteja käyttäen funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \frac{z}{1+x^2+y^2}$ integraali yli joukon

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x > 0, x < y, 1 < x^2 + y^2 < 3, 1 < z < 5\}.$$

3. Osoita, että pallokoordinaattikuvaus

$$g_p: W \rightarrow g_p(W), \quad g_p(r, \theta, \varphi) = (r \cos \theta \cos \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \varphi),$$

missä $W =]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on diffeomorfismi.

4. Laske joukon

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4, y > |x|, z > 0\}$$

tilavuus pallokoordinaattikuvausta käyttäen. Piirrä kuva.

5. Laske n -ulotteisen pallon $B^n(0, r)$ tilavuus kun $n = 4$ ja $n = 5$.

6. Olkoon $W \subset \mathbb{R}^n$ ja $g: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-jatkuva funktio, ts. on olemassa $M > 0$ siten, että

$$\|g(x) - g(x')\| \leq M \|x - x'\| \quad \text{kaikille } x, x' \in W.$$

Osoita, että jos $S \subset W$ on nollamittainen, niin myös $g(S)$ on nollamittainen joukko.

7. Olkoon $W \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja $g: W \rightarrow g(W)$ diffeomorfismi. Olkoon lisäksi $U \subset W$ rajoitettu joukko, jolle $\overline{U} \subset W$. Osoita, että

(a) $g(\partial U) = \partial g(U)$.

(b) jos U on Jordan-joukko, niin myös $g(U)$ on Jordan-joukko.