

Vektorifunktioiden analyysi 2A
Harjoitus 6, 24.2.2017

1. Laske napakoordinaatteja käyttäen integraali

$$\int_A x^2 y$$

missä $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$.

2. Laske integraali $\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2 dy dx$ käyttäen muuttujanvaihtoa $u = x + y, v = y - 2x$.

3. Laske tilavuus rajoitetulle joukolle $A \subset \mathbb{R}^3$, jota rajoittavat pinnat $z = 4 - x^2$ ja $x^2 + y^2 = 4$, sekä taso $z = 0$.

4. Laske sopivaa muuttujanvaihtoa käyttäen integraali $\int_A \sin(\pi(x+y))$, kun joukko $A \subset \mathbb{R}^2$ on rajoitettu alue, jonka rajaavat suorat $x + y = 0, x + y = 1, 2x - 3y = 0$ ja $2x - 3y = 4$.

5. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ ympyrän $x^2 + y^2 = 2x$ rajoittama rajoitettu joukko. Laske funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ integraali yli joukon A napakoordinaatteja käyttäen.

6. Joukko $A \subset \mathbb{R}^3$ saadaan pallosta $B^3(0, 1)$ poistamalla siitä kartioon $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$ sisältyvä osa. Laske joukon A tilavuus.

7. Olkoon $h: W \rightarrow \mathbb{R}^2, h(u, v) = (u^2 - v^2, uv)$, missä $W =]0, \infty[\times]0, \infty[$.

(a) Osoita, että $h: W \rightarrow h(W)$ on diffeomorfismi.

(b) Millaisiksi käyriksi h kuvaa akselien suuntaiset suorat $u = 1$ ja $v = 1$?

8. Laske edellisen tehtävän kuvausta h käyttäen funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ integraali yli joukon

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2: x > 0, y > 0, 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9, 2 \leq xy \leq 4\}.$$

Piirrä kuva.