1. Määritä seuraavan matriisin ominaisarvot ja ominaisvektorit:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Matriisilla

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

on ominaisarvo $\lambda = 2$. Mikä on tätä ominaisarvoa vastaava ominaisavaruus?

3. (a) Millainen pitää matriisin $\mathbf{A}$ olla, jotta sillä voi olla ominaisarvo $\lambda = 0$?
(b) Onko totta: Matriisi on singulaarinen $\Leftrightarrow$ jokin sen ominaisarvo on nolla.

4. Etsi matriisi $\mathbf{U}$, joka diagonalisoi matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

eli $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2.\lambda_3)$, missä λ_i:t ovat $\mathbf{A}$:n ominaisarvoja.

5. (a) Millä reaalisten vakioiden a ja b arvoilla matriisi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & a \\ b & 1/2 \end{pmatrix}$$

on ortogonaalinen?
(b) Miten edellä saaduilla a:n ja b:n arvoilla matriisia $\mathbf{A}$ vastaava lineaarikuvaus $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kuvaa yksikkövektorit $\hat{\mathbf{i}}_1 = (1\ 0)^\mathrm{T}$ ja $\hat{\mathbf{i}}_2 = (0\ 1)^\mathrm{T}$?
Lisätehtävä: Osoita (yleisemmin), että ortogonaalimatriisia vastaava lineaarikuvaus säilyttää sisätulon ja siten myös ortogonaalisuuden ja normit.

6. (a) Määritä matriisin (voit käyttää jotain symbolisen matematiikan ohjelmistoa tässä kohdassa)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit. (b) Laske sitten saamaasi tulosta hyödyntäen $\mathbf{A}^4$.
Tarkistus: Ominaisvektorit ovat $(1\ 1\ 0\ 1)^\mathrm{T}$, $(-1\ 0\ 1\ 0)^\mathrm{T}$, $(2\ 0\ 0\ 1)^\mathrm{T}$, $(0\ 1\ 0\ 0)^\mathrm{T}$.

Käännä...

7. Etsitään ensimmäisen kertaluvun lineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän (kytketyt differentiaaliyhtälöt, tavallinen tilanne fysiikassa)

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) \\ \qquad\vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) \end{cases},$$

missä a_{ij}:t ovat reaalisia vakioita, ratkaisua $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$. Differentiaaliyhtälöryhmä voidaan kompaktisti kirjoittaa vektorein ja matriisein: $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$. Osoita, että ratkaisuyrite $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$, missä $\mathbf{v}$ on matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvoon λ kuuluva ominaisvektori, tuottaa ratkaisun. Millaisia (fysikaalisesti) ovat ratkaisut, jotka vastaavat imaginaarisia ominaisarvoja? Jos $\mathbf{A}$ on diagonalisoituva, päästään similariteettimuunnoksen matriisilla koordinaateista $\mathbf{x}$ koordinaatteihin $\mathbf{y}$. Miltä yhtälöryhmä näyttää uusissa koordinaateissa?

Huom: Kopassa on kolmenlaista esimerkkimateriaalia, jota on hyvä katsoa, etenkin jos ei ole ollut luennoilla, laskuharjoituksissa tai ohjauksissa mutta muutenkin: Materiaali-kansiossa luentoesimerkit, Harjoitukset-kansiossa harjoitusmalliratkaisut, Ohjaukset-kansiossa ohjaustehtävien vastaukset. Nämä yhdessä muodostavat varsin kattavan esimerkkimateriaalin kurssille. Soveltavia tehtäviä, joiden kaltaisia ei vaadita tenteissä, on tyypillisesti harjoituskertojen viimeisinä tehtävinä.