M5: Lineaarialgebra

Fysa115 (3 op) Syksy 2016, Fysiikan laitos, Jyväskylän yliopisto

Luennot Juha Merikoski 5.9.–19.10.2016 ma&ke 12-14 (FYS3)
Laskuharjoitukset 7 kertaa, ke, max 12 p (pisteet ok vuoden ajan)
1. tentti Perjantaina 28.10.2016, max 48 p
2. tentti Perjantaina 18.11.2016
Yleinen tenttipäivä 3.2.2017

Oletetut esitiedot Fysp111 ja Fysp112
Avuksi myös Lineaarinen algebra ja geometria 1&2 (matem)

Kirjallisuutta Adams&Essex: Calculus s. 600-609 (ei kattava)
Lay: Linear Algebra and its applications (alkuosa)
Muita: Arfken, Boas, Riley&Hobson&Bence
Taulukkokirjat Alan Jeffrey s. 50-66

Päivitetty luentorunko ja uusimmat tehtävät suoraan Kopasta:

https://koppa.jyu.fi/kurssit/203013/luennot/Luennot.pdf
https://koppa.jyu.fi/kurssit/203013/harj/Tehtavat.pdf

Muu materiaali (malliratkaisuja yms) Kopassa salasanan takana.

0.1. Kurssin tavoitteet

Kurssi sisältää seuraavia asioita:

- lineaariset yhtälöryhmät
- matriisit ja matriisioperaatiot
- determinantti ja käänteismatriisi
- vektoriavaruudet ja lineaarikuvaukset
- matriisin ominaisarvot ja -vektorit
- diagonalisointi ja neliömuodot
- kompleksiset vektoriavaruudet

Kurssin vaativuustaso on asetettu siten, että sen tiedoilla (näiltä osin) voi aloittaa esim. Mekaniikan ja Kvanttimekaniikan kurssit. Kurssi on luonteeltaan laskennallinen (ei teoreettinen).

Kurssin asiat käsitellään pääosin (ja tarkoin todistuksin) myös matematiikan kursseilla Lineaarinen algebra ja geometria 1&2. Nämä luentokalvot ovat verrattain tiiviit ja rakentuvat pääosin Jouni Suhosen tekemän luentomonisteen (2012) mukaisesti. Aihetta käsitellään myös Markku Lehdon monisteessa (2001).

1. Matriisit ja matriisioperaatiot

1.1. Lineaariset yhtälöryhmät ja matriisit

Lineaariseksi yhtälöksi kutsumme muotoa

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{1}$$

olevaa yhtälöä muuttujille $x_1, \ldots, x_n$, missä a_i ja b ovat vakioita.

Lineaarinen yhtälöryhmä on useamman sellaisen lineaarisen yhtälön ryhmä, joissa on samat tuntemattomat muuttujat x_i, $i = 1, \ldots, n$. Esimerkiksi kahden muuttujan ($n = 2$) yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{2}$$

ja vakioista a_{ij} ja b_i riippuen tällä yhtälöryhmällä joko ei ole yhtään ratkaisua, on täsmälleen yksi ratkaisu (yksi piste) tai äärettömän monta ratkaisua (suora).

Esim Esimerkit kustakin em. tapauksesta kahden yhtälön ryhmälle.

Useammankin kuin kahden muuttujan yhtälöryhmälle pätee Lause:

> Lineaarisella yhtälöryhmällä joko ei ole yhtään ratkaisua, on täsmälleen yksi ratkaisu tai on äärettömän monta ratkaisua.

Pieniä yhtälöryhmiä olemme koulussa oppineet ratkaisemaan eliminointimentelmällä. Se helpottuu huomattavasti (paperilla ja tietokoneessa, kts. §2) ottamalla käyttöön matriisit.

Esim Yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases} \tag{3}$$

voidaan esittää täydentämällä yhtälöryhmän kerroinmatriisi **A** ns. täydennetyksi matriisiksi **B** seuraavasti:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right) \tag{4}$$

Määritelmä

Jatkossa $m \times n$–matriisilla $\mathbf{A}$ tarkoitetaan kaari- tai hakasulkujen sisällä olevaa lukukaaviota, jossa on

m riviä (vaakariviä) ja n saraketta (pystyriviä)

alkiot (matriisielementit) a_{ij}, $i = 1, ..., m$ ja $j = 1, ...n$

eli

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

missä alkiot $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (tai $a_{ij} \in \mathbb{C}$). Käytämme myös merkintöjä

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) \qquad [\mathbf{A}]_{ij} = a_{ij}. \tag{6}$$

Sanomme myös, että

$n \times n$–matriisi on neliömatriisi (jolle siis yllä $m = n$)

$1 \times n$–matriisi on rivivektori eli vaakavektori eli rivimatriisi

$m \times 1$–matriisi on sarakevektori eli pystykevektori eli sarakem.

$m \times n$–matriisin $\mathbf{A}$ transpoosi $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ on $n \times m$-matriisi, jolle

$$\boxed{[\mathbf{A}^\mathsf{T}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ji} \quad \forall i, j.} \tag{7}$$

Matriisin (5) transpoosi (eli transponoitu matriisi) on siis

$$\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Esim Vaakavektorin transpoosi on pystyvektori:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Huom $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tarkoittaa joskus pystyvektoria $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Neliömatriisin $(n \times n)$ transpoosi on neliömatriisi $(n \times n)$.

Neliömatriisi $\mathbf{A} = (a_{ij})$ on symmetrinen, jos $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ eli $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j$.

Neliömatriisi $\mathbf{A} = (a_{ij})$ on diagonaalinen, jos $a_{ij} = a_{ij}\delta_{ij}$, missä

$$\boxed{\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kun } i = j \\ 0, & \text{kun } i \neq j \end{cases}} \tag{9}$$

on Kroneckerin delta. Diagonaalimatriisille käytetään merkintää

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}). \tag{10}$$

Huom Matriisin diagonaalisuus viittaa nimenomaan vasemmasta yläkulmasta oikeaan alakulmaan kulkevaan diagonaaliin ja sen symmetrisyys peilisymmetrisyyteen kyseisen diagonaalin suhteen.

1.2. Matriisien yhteenlasku ja skalaarilla kertominen

Yhtäsuuruus $m \times n$–matriisit $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ja $\mathbf{B} = (b_{ij})$ ovat samat, jos

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \;\Leftrightarrow\; a_{ij} = b_{ij}\ \forall i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Yhteenlasku $m \times n$–matriisien $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ja $\mathbf{B} = (b_{ij})$ summa on $m \times n$–matriisi $\mathbf{C} = (c_{ij})$, jolle

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \;\Leftrightarrow\; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\ \forall i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Skalaarilla kertominen Kertomalla $m \times n$–matriisi $\mathbf{A} = (a_{ij})$ vakiolla $c \in \mathbb{R}$ saadaan $m \times n$–matriisi $\mathbf{B} = (b_{ij})$

$$\mathbf{B} = c\mathbf{A} = \mathbf{A}c \;\Leftrightarrow\; b_{ij} = ca_{ij}\ \forall i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Merkinnällä $-\mathbf{A}$ tarkoitamme matriisia, joka saadaan kun $c = -1$:

$$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A} \;\Leftrightarrow\; [-\mathbf{A}]_{ij} = -[\mathbf{A}]_{ij}\ \forall i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Huom Nämä määrittelyt yleistyvät sellaisinaan myös kompleksiseen tapaukseen, jossa matriisien alkiot tai skalaari c ovat kompleksisia.

Määritelmät edellä tuottavat matriisien yhteenlaskulle ja skalaarilla kertomiselle laskusäännöt[1]

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}+\mathbf{B} &= \mathbf{B}+\mathbf{A} && (15)\\
(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} &= \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) && (16)\\
\exists\ \mathbf{0},\ \text{jolle } \mathbf{A}+\mathbf{0} &= \mathbf{A}\ \forall\ \mathbf{A} && (17)\\
\forall\ \mathbf{A}\ \exists -\mathbf{A} \text{ siten, että } \mathbf{A}+(-\mathbf{A}) &= \mathbf{0} && (18)\\
(c_1c_2)\mathbf{A} &= c_1(c_2\mathbf{A}) && (19)\\
1\mathbf{A} &= \mathbf{A} && (20)\\
c(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= c\mathbf{A}+c\mathbf{B} && (21)\\
(c_1+c_2)\mathbf{A} &= c_1\mathbf{A}+c_2\mathbf{A}, && (22)
\end{aligned}
$$

missä esiintyvät c, c_1, c_2 ovat skalaareja ja kaikki matriisit ovat $m\times n-$matriiseja, mukaanlukien nollamatriisi: $[\mathbf{0}]_{ij} = 0\ \forall i, j$.

[1] Todistukset menevät alkioittain ja huomaten, että alkioille pätevät samat laskusäännöt kuin muillekin skalaareille eli c:lle ja c_i:lle. Tässä muodossaan 'laskusäännöt' vastaavat vektoriavaruudelle (kts. myöh.) annettuja ehtoja.

1.3. Matriisikertolasku

Matriiseille voi määritellä useammankinlaisia tuloja; nyt käsitellään niistä sitä, jota tavallisimmin kutsutaan matriisikertolaskuksi.

Olkoon annetut $m \times p$−matriisi $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ja $p \times n$−matriisi $\mathbf{B} = (b_{ij})$. Niiden tulomatriisi on $m \times n$−matriisi $\mathbf{C} = (c_{ij})$, jonka alkiot ovat

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{AB} \;\Leftrightarrow\; c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{array}} \tag{23}$$

Siis $\mathbf{C}$:n alkio c_{ij} on $\mathbf{A}$:n i:nnen rivin ja $\mathbf{B}$:n j:nnen sarakkeen vastinalkioiden tulojen summa.

Oleellista: $\mathbf{A}$:ssa yhtä monta saraketta kuin rivejä $\mathbf{B}$:ssa (p kpl).

Jos $m = n$, voidaan laskea myös $\mathbf{BA}$, joka on $p \times p$−matriisi.

Jos $m \neq n$, niin käänteinen tulo $\mathbf{BA}$ ei ole määritelty.

Huom Tulo on helppo *laskea*; kokeile vaikka $m = 3$, $p = 2$, $n = 4$.

Neliömatriisien kertolaskusta

Jos $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ovat kumpikin $n \times n-$matriiseja, niin sekä $\mathbf{AB}$ että $\mathbf{BA}$ ovat $n \times n-$matriiseja. Fysiikassa on käyttöä kommutaattorille

$$\boxed{[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}.} \tag{24}$$

Jos $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$, niin sanomme, että $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ kommutoivat. Yleensä $\mathbf{BA} \neq \mathbf{AB}$ eli $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ eivät kommutoi, jolloin niiden kommutaattori on nollasta poikkeava (kiinnostavakin) matriisi.

Erityisen hyödyllinen on $n \times n-$yksikkömatriisi

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1, 1, ..., 1). \tag{25}$$

Neliömatriisille $\mathbf{A}$ määritellään myös sen k:s potenssi ($k \geq 0$)

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I} \qquad \mathbf{A}^1 = \mathbf{A} \qquad \mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} \qquad \mathbf{A}^k = \mathbf{AA}\cdots\mathbf{A}. \tag{26}$$

1.4. Matriisikertolaskun ja transpoosin ominaisuuksia

Olettaen matriisien dimensiot ja luvut j, k sellaisiksi, että kaikki tulot ja summat ovat määriteltyjä (c on skalaari), pätee yleisesti

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \tag{27}$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC} \tag{28}$$
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC} \tag{29}$$
$$c(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(c\mathbf{B}) \tag{30}$$
$$\mathbf{AI} = \mathbf{A} = \mathbf{IA} \tag{31}$$
$$\mathbf{A0} = \mathbf{0} = \mathbf{0A} \tag{32}$$

ja neliömatriiseille erityisesti

$$\mathbf{A}^j\mathbf{A}^k = \mathbf{A}^{j+k} \tag{33}$$
$$(\mathbf{A}^j)^k = \mathbf{A}^{jk}. \tag{34}$$

Huom Matriisin potenssin kautta voidaan määritellä esimerkiksi

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{6}\mathbf{A}^3 + \dots$$

Transpoosille asianmukaisin oletuksin (matriisien dimensioista) on

$$(\mathbf{AB})^\mathsf{T} = \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T} \tag{35}$$
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T}+\mathbf{B}^\mathsf{T} \tag{36}$$
$$(c\mathbf{A})^\mathsf{T} = c\mathbf{A}^\mathsf{T} \tag{37}$$
$$(\mathbf{A}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \mathbf{A} \tag{38}$$
$$\mathbf{I}^\mathsf{T} = \mathbf{I}. \tag{39}$$

Vielä määritellään $n \times n-$neliömatriisin $\mathbf{A} = (a_{ij})$ jälki (trace) sen diagonaalialkioiden summana

$$\boxed{\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.} \tag{40}$$

Matriisitulon syklinen permutaatio jättää jäljen samaksi; esim:

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{BA}) \qquad \mathrm{Tr}(\mathbf{ABC}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{CAB}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{BCA}) \tag{41}$$

kunhan matriisitulot ovat neliömatriiseja (jolloin jälki määritelty).

2. Yhtälöryhmien ratkaiseminen eliminointimenetelmällä

2.1. Lineaarisen yhtälöryhmän matriisiesitys

Yleinen m lineaarisen n tuntemattoman yhtälön ryhmä on muotoa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{42}$$

Yhtälöryhmä (42) voidaan esittää $m \times n$–kerroinmatriisin $\mathbf{A} = (a_{ij})$ sekä tuntemattoman sarakevektorin $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ldots x_n)^\mathsf{T}$ ja tunnetun sarakevektorin $\mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \ldots b_m)^\mathsf{T}$ avulla kompaktisti:

$$\boxed{\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.} \tag{43}$$

Tässä $\mathbf{x}$ on ratkaistava tuntematon vektori ja $\mathbf{A}$ sekä $\mathbf{b}$ tunnetaan.

Yhtälöryhmä (43) on homogeeninen, jos $\mathbf{b} = 0$ on nollavektori.

Matriisimuodossa auki kirjoitettuna (43) on

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Sitä vastaava täydennetty matriisi

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{12} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right). \tag{45}$$

Yhtälöryhmää vastaava täydennetty matriisi (45) sisältää tiivistetyssä muodossa *kaiken informaation ongelmasta* ja pyrimmekin seuraavassa käyttämään sitä[2] ratkaisemiseen menetelmällä, joka soveltuu hyvin kynälle ja tietokoneelle.

[2] Täydennetty matriisi voidaan esittää myös käyttäen merkintää $(\mathbf{A}\ \mathbf{b})$.

2.2. Alkeisrivitoimitukset

Ratkaistessamme yhtälöryhmää sellaisenaan olemme tottuneet käyttämään seuraavia operaatioita: yhtälön kertominen vakiolla, yhtälön lisääminen toiseen, yhtälöiden järjestyksen vaihtaminen.[3]

Näiden kolmen operaation tarkoituksena on saattaa yhtälöryhmä yksinkertaisemmaksi, ratkaisultaan ekvivalentiksi yhtälöryhmäksi, kunnes ratkaisu lopulta löytyy.

Nämä operaatiot ovat suoraan siirrettävissä täydennetyn matriisin käsittelyyn – kutsumme seuraavia alkeisrivitoimituksiksi:

1) Lisää yhteen riviin VAKIO $\times$ jokin toinen rivi
2) Vaihda kaksi riviä keskenään
3) Kerro yksi rivi nollasta poikkeavalla vakiolla

[3] Lisäksi olemme ehkä käyttäneet yhdestä yhtälöstä ratkaistun muuttujan sijoittamista toiseen yhtälöön silloin kun se on näyttänyt auttavan. Pyrimme nyt kuitenkin algoritmiin, joka on helposti toteutettavissa matriisien avulla.

Esim Vasemmalla on yhtälöryhmä sellaisenaan, oikealla sen esitys täydennettynä matriisina $\mathbf{B} = (\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right)$$

Pyritään ensin ratkaisemaan x_3 ja sitä käyttäen sitten x_2 jne. Lisätään Y3:een 4·Y1 eli Y3→Y3+4·Y1 (Ym on m:s yhtälö) :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right)$$

Seuraavaksi ensin Y2→ $\frac{1}{2}$Y2 ja sitten Y3→Y3+3·Y2:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ x_3 = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Näin saatiin kerroinmatriisi **A** on yläkolmiomuotoon eli

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \left(\begin{array}{ccc|c} \star & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star \end{array}\right),$$

missä $\star$ on mikä tahansa luku. Tämä oli välitavoitteemme.
Palaten esimerkkiin: Seuraavaksi Y2$\to$Y2$+4\cdot$Y3 ja Y1$\to$Y1$-1\cdot$Y3:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3 \\ x_2 = 16 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Vielä kerroinmatriisi yksikkömatriisiksi operaatiolla Y1$\to$Y1$+2\cdot$Y2:

$$\begin{cases} x_1 = 29 \\ x_2 = 16 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right),$$

jolloin $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(1,1,1)$ ja esimerkkiyhtälöryhmä on ratkaistu.

Määritelmä

Matriisit $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{B}'$ ovat riviekvivalentit, mikäli ne saadaan toisistaan alkeisrivitoimituksin. Tällöin merkitään $\mathbf{B} \sim \mathbf{B}'$.

Lause

Jos kahden yhtälöryhmän täydennetyt matriisit ovat riviekvivalentit, niin yhtälöryhmillä on samat ratkaisut.

Huom Alkeisrivitoimitusten kannalta täydennettyä matriisia $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ kirjoittettaessa edellä käytetty pystyviiva on epäoleellinen, se vain muistuttaa viimeisen sarakkeen erityismerkityksestä yhtälöryhmiä ratkaistaessa. Tarvittavat alkeisrivitoimitukset määrää matriisi $\mathbf{A}$.

Huom Edellisten sivujen esimerkissä yhtälöitä oli yhtä monta kuin tuntemattomia. Tällöin kerroinmatriisi $\mathbf{A}$ on neliömatriisi ja se on mahdollista saattaa yläkolmiomuotoon ja lopulta diagonaaliseksi.

Yleisessä tapauksessa yhtälöiden ja tuntemattomien määrä ei välttämättä ole sama, jolloin kannattaa määritellä...

2.3. Porrasmatriisit

Määritelmä

$m \times n-$matriisi **B** porrasmatriisi, jos

1) matriisin mahdolliset nollarivit ovat alimpana,
2) jokaisen nollasta eroavan rivin ensimmäinen eli johtava alkio on 1 ja
3) alemman rivin johtava alkio sijaitsee aina ylemmän rivin johtavan alkion oikealla puolella

Määritelmä

Porrasmatriisi **B** on redusoitu, jos lisäksi

4) jokaisen rivin johtava alkio on sarakkeensa ainoa nollasta poikkeava alkio.

Lause

Jokainen $m \times n-$matriisi on riviekvivalentti jonkin (yksikäsitteisen) redusoidun porrasmatriisin kanssa.

Porrasmatriisi ($\star$ mikä tahansa luku) on siis muotoa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ja redusoitu porrasmatriisi muotoa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \star & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esim Alkeisrivitoimituksin päästään redusoituun porrasmuotoon

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.4. Yhtälöryhmän ratkaiseminen porrasmatriiseilla

Seuraavassa esitetään kaksi algoritmia lineaarisen yhtälöryhmän $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ratkaisemiseksi. Täydennetty matriisi olkoon $\mathbf{B} = (\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

Gaussin eliminointi

1) Etsitään $\mathbf{B}$:n kanssa riviekvivalentti porrasmatriisi $\mathbf{B}' = (\mathbf{A}'|\mathbf{b}')$.
2) Ratkaistaan yhtälöryhmä $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ takaisinsijoituksin.

Gaussin-Jordanin eliminointi

1) Etsitään $\mathbf{B}$:n kanssa riviekvivalentti redusoitu porrasmatriisi $\mathbf{B}'' = (\mathbf{A}''|\mathbf{b}'')$.
2) Luetaan suoraan yhtälöryhmän $\mathbf{A}''\mathbf{x} = \mathbf{b}''$ ratkaisut.

Huom Kummassakin algoritmissa vaihe 2) edellyttää, että ratkaisuja on. Niiden olemassaoloon palataan tuotapikaa.

Huom Mikäli yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu, vaihe 2) on helppo. Jos ratkaisuja on äärettömän paljon (esimerkiksi jos ne muodostavat suoran tai tason) saadaan parametrisoitu ratkaisu.

2.5. Lineaarinen riippumattomuus ja matriisin ranki

Vektoreiden $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ lineaarikombinaatio on

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_m\mathbf{a}_m, \qquad c_i \in \mathbb{R} \quad (\text{tai } c_i \in \mathbb{C}). \tag{46}$$

Vektorit $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ ovat lineaarisesti riippumattomia (**LI**), jos

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_m\mathbf{a}_m = 0 \tag{47}$$

vain kun $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$.

Jos (47) toteutuu siten, että kaikki c_i:t eivät ole nollia, sanomme vektoreiden $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ olevan lineaarisesti riippuvia (**LD**) ja ainakin yksi niistä voidaan esittää muiden lineaarikombinaationa.

Lineaarisen yhtälöryhmän tapauksessa sen rivivektorien lineaarinen riippuvuus tarkoittaa sitä, että yhtälöitä on tarpeettoman monta. Yksinkertaisimmillaan näin käy, jos kaksi yhtälöä ovat samat.

Yhtälöryhmässä voi olla myös keskenään ristiriitaan johtavia rivejä.

Määritelmä

Matriisin $\mathbf{A}$ ranki $\mathrm{r}(\mathbf{A})$ on sen **LI** rivivektoreiden maksimilukumäärä.

Lause Riviekvivalenteille matriiseille $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ pätee $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{B})$.

Seuraus Ranki $\mathrm{r}(\mathbf{A})$ on $\mathbf{A}$:ta vastaavan porrasmatriisin nollasta poikkeavien rivien lukumäärä.

Lause Otetaan m kappaletta n-komponenttisia vektoreita ja muodostetaan niitä rivivektoreina käyttäen $m \times n-$matriisi $\mathbf{A}$. Vektorit ovat **LI**, jos $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = m$, ja **LD**, jos $\mathrm{r}(\mathbf{A}) < m$.

Lause $\mathrm{r}(\mathbf{A})$ on $\mathbf{A}$:n **LI** sarakevektoreiden maksimilukumäärä.

Seuraus Transpoosille pätee $\mathrm{r}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = \mathrm{r}(\mathbf{A})$.

Lause Olkoon annettu m kappaletta n-komponenttisia vektoreita. Jos $m > n$, niin vektorit ovat **LD**.

2.6. Yhtälöryhmän ratkaisujen olemassaolo

Tutkitaan n tuntemattoman, m yhtälön lineaarista yhtälöryhmää $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, missä $\mathbf{A}$ on $m \times n-$matriisi ja yhtälöryhmää vastaava täydennetty matriisi $\mathbf{B} = (\mathbf{A}|\mathbf{b})$ on $m \times (n+1)-$matriisi.

Lause: ratkaisujen olemassaolo

Yhtälöryhmällä on ratkaisuja $\Leftrightarrow \mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{B})$.

Lause: ratkaisujen yksikäsitteisyys

Yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu $\Leftrightarrow \mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{B}) = n$.

Jos $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{B}) = r < n$, on yhtälöryhmällä äärettömän monta ratkaisua. Tällöin voidaan löytää r kappaletta riippumattomia tuntemattomia x_i, jotka voidaan ilmaista jäljelle jäävien $n - r$ tuntemattoman $x_j = t_j$ avulla $\rightsquigarrow$ parametrisoitu ratkaisu.

Lause: ratkaisujen löytyminen

Mikäli yhtälöryhmällä on ratkaisuja, ne kaikki saadaan Gaussin tai Gaussin-Jordanin eliminoinnilla.

3. Determinantit

3.1. Lineaarinen yhtälöryhmä ja determinantit

Determinanteille kuten matriiseillekin on monenmoista käyttöä, mutta haemme motivaatiota edelleen yhtälöryhmistä, nyt $n \times n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \tag{48}$$

matriisein ilmaistuna $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, missä kerroinmatriisi $\mathbf{A} = (a_{ij})$ on tässä tapauksessa neliömatriisi. Neliömatriisin determinantti

$$D = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{49}$$

on yksi reaaliluku (kun $a_{ij} \in \mathbb{R}$), jonka opimme pian laskemaan.

Yhtälöryhmään $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ liittyen määrittelemme myös determinantit

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}, \quad (50)$$

joissa D_i saatiin D:stä korvaamalla sarake i luvuilla $b_1, \ldots, b_n$.

Lause: Cramerin sääntö

Jos $D \neq 0$, niin yhtälöryhmän $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yksikäsitteinen ratkaisu on

$$x_1 = D_1/D, \quad x_2 = D_2/D, \ \ldots \ , x_n = D_n/D. \quad (51)$$

Lisäksi:

Homogeeniselle yhtälöryhmälle $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (ja siis $\mathbf{b} = 0$) pätee:

$$D \neq 0 \ \Rightarrow \ \text{triviaaliratkaisu } \mathbf{x} = 0$$
$$D = 0 \ \Rightarrow \ \text{äärettömän monta ratkaisua}$$

Esim Nämä tulokset on helppo todistaa entuudestaan tutuille 2×2-determinanteille eli tapaukselle $n = 2$. Lasketaan...

3.2. Determinanttien laskeminen

Tapauksessa $n = 1$ determinantti on triviaalisti

$$D^{(1)} = |a_{11}| = a_{11}, \tag{52}$$

missä pystyviivat eivät ole itseisarvomerkkejä vaan determinantin merkintätapa. Determinantin ominaisuuksiin alamme päästä kiinni tapauksessa $n = 2$, jossa määrittelemme:

$$D^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{53}$$

Tämän lausekkeen voi ajatella muodostuvan seuraavasti:

$$D^{(2)} = (-1)^{1+1}a_{11}|a_{22}| + (-1)^{1+2}a_{12}|a_{21}|$$

eli kuljetaan pitkin ylempää vaakariviä ja kerrotaan sen kullakin alkiolla vastaava alideterminantti[4] ja summataan etumerkkiä vuorotellen. Tästä pääsemme eteenpäin:

Kun $n = 3$, otamme (nyt aluksi) lähtökohdaksi ylimmän rivin:

$$D^{(3)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{54}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} D^{(2)}(a_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} D^{(2)}(a_{12}) + (-1)^{1+3} a_{13} D^{(2)}(a_{13}),$$

missä $D^{(2)}(a_{ij})$ on alkiota a_{ij} vastaava $2 \times 2-$alideterminantti.[4]
Yllä $3 \times 3-$determinantti on 'kehitetty 1. rivinsä suhteen'.

Osoittautuu, että juuri tämä on oikea[5] tapa määritellä isommat determinantit pienempien determinanttien kautta.[6]

[4] Poistettu alkuperäisestä determinantista rivi i ja sarake j.
[5] Seuraa Cramerin sääntö ja paljon muuta, katso esimerkiksi §3.4 ja §4.3.
[6] Kuin venäläiset sisäkkäiset maatuska-puunuket avataan isoimmasta alkaen paitsi että nyt n-nuken sisällä on n sitä välittömästi pienempää nukkea.

Saamme aiheen määritellä kutakin $(n+1)\times(n+1)-$determinantin alkiota a_{ij} vastaavan kofaktorin

$$\boxed{\mathrm{cof}_n(a_{ij}) = (-1)^{i+j} D^{(n)}(a_{ij}).} \tag{55}$$

Sen avulla voimme kirjoittaa suhteellisen kompaktisti yleisen kaavan eli kehityssäännön $n\times n-$determinantille

$$\boxed{\text{D1)} \quad D^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\mathrm{cof}_{n-1}(a_{kj}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\mathrm{cof}_{n-1}(a_{ik}),} \tag{56}$$

missä ensimmäisessä summassa on kehitetty determinantti k:nnen rivin ja jälkimmäisessä k:nnen sarakkeen suhteen. Käytännössä se kannattaa tehdä sen rivin/sarakkeen suhteen, jossa on eniten nollia.

Huom Muistutamme itseämme vielä siitä, että determinantti on jokin luku,[7] joka nyt on laskettavissa[8] kaavoista (55-56).

[7] Determinantin voi ajatella kuvauksena matriisien avaruudelta reaaliluvuille.
[8] Mutta laskutoimitusten määrä kasvaa nopeasti n:n kasvaessa.

Determinanttien (alla D) laskemisessa ovat avuksi myös seuraavat:

D2) D vaihtaa merkkiä, kun sen kaksi riviä tai kaksi saraketta vaihdetaan keskenään.

D3) Kertomalla D:n mikä tahansa rivi tai sarake vakiolla c saadaan determinantti, jonka arvo on cD.

D4) Jos D:n jokin rivi/sarake $=$ VAKIO$\times$ toinen rivi/sarake, niin $D = 0$.

D5) D:n arvo ei muutu jos sen jollekin riville/sarakkeelle lisätään muiden rivien/sarakkeiden lineaarikombinaatio.

D6) Kaksi determinanttia, joilla vain yksi rivi/sarake ovat erilaiset, voidaan laskea yhteen. Näin saadaan determinantti, joka on muuten sama kuin alkuperäiset, mutta sanottu rivi/sarake on alkuperäisten rivien/sarakkeiden summa.

D7) Transpoosille pätee $\det(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) = \det(\mathbf{A})$.

Huom Operaatioilla (2,5) voidaan determinantti saattaa ylä- tai alakolmiomuotoon, joilloin sen arvo on diagonaalielementtien tulo.

3.3. Determinantit ja matriisiranki

Olkoon $\mathbf{A}$ $m \times n-$matriisi. Silloin voidaan osoittaa seuraavat:

Lause

$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = r_0 \geq 1 \Leftrightarrow \mathbf{A}$:n suurin alimatriisi, jota vastaava determinantti on nollasta poikkeava, on $r_0 \times r_0-$matriisi.

Lause

Jos $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = r_0 \geq 1$, niin $\mathbf{A}$:n kaikkien sellaisten alimatriisien, joiden ranki $> r_0$, determinantit ovat nollia.

Lisäksi $n \times n-$neliömatriisille $\mathbf{A}$ pätee:

Lause

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n \Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0. \tag{57}$$

Huom Lauseista yllä heijastuu lineaarisen riippumattomuuden yhteys lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisuihin ja determinantin nollasta poikkeavuuteen. Todistusten ideaa kannattaa miettiä.

3.4. Determinanteista vielä

Johdattelimme $n \times n-$determinanttiin formaalia ja jälkiviisasta reittiä. Yleisesti determinantti on sarakkeidensa n-lineaarikuvaus (tarkastelemme tavallisia lineaarikuvauksia myöhemmin). Tämä ominaisuus takaa, että kahdessa/kolmessa/... ulottuvuudessa determinantilla on geometrinen tulkinta sarakkeidensa määräämien vektoreiden virittämän suunnikkaan/särmiön/... 'tilavuutena'.

Tällä geometrisella tulkinnalla on ilmeistä, miksi determinantti tulee kerrotuksi samalla luvulla kuin millä yksi sen sarake kerrotaan, kts. luvun §3.2 laskusääntö D3. Samaten on ilmeistä, että laskusääntö D6 pätee. Jos determinantin kaksi saraketta ovat samat, niin yllä mainittu 'tilavuus' on nolla, kuten determinanttikin D4:stä.

Determinantin alternoivuus, eli kertoimet $(-1)^{i+j}$, seuraa kolmesta mainitusta säännöstä. Täten tapamme määritellä determinanti ei ole suinkaan mielivaltainen, vaan lopulta ainoa mahdollinen.

4. Neliömatriisin käänteismatriisi

4.1. Käänteismatriisin ominaisuuksia

Olkoot $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{C}$ $n \times n$–neliömatriiseja ja $\mathbf{I}$ $n \times n$–yksikkömatriisi.

Määritelmä

> Jos on olemassa $n \times n$–neliömatriisi $\mathbf{B}$, jolle $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$,
> niin $\mathbf{B}$ on $\mathbf{A}$:n käänteismatriisi, merkitään $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Determinanteille pätee:

Lause

$$\det(\mathbf{AC}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{C}). \tag{58}$$

Jos nyt on $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, niin $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{I}) = 1$, joten $\det(\mathbf{B}) = 1/\det(\mathbf{A})$. Täten olletinkin

Lause

$$\det(\mathbf{A}) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \exists \text{ yksikäsitteinen } \mathbf{A}^{-1}. \tag{59}$$

Jos $\exists\ \mathbf{A}^{-1}$, niin $\mathbf{A}$ on säännöllinen eli ei-singulaarinen matriisi.
Jos $\det(\mathbf{A}) = 0$, niin $\mathbf{A}$ on singulaarinen.

Edelleen (57) ja (59) $\Rightarrow$

Lause
$$\boxed{\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n \Leftrightarrow \exists\ \mathbf{A}^{-1}. \qquad (60)}$$

Olkoon $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ olemassa. Tällöin $\det(\mathbf{B}) = 1/\det(\mathbf{A}) \neq 0$ ja on olemassa $\mathbf{B}^{-1}$ ja $\mathbf{BA} = \mathbf{BABB}^{-1} = \mathbf{BIB}^{-1} = \mathbf{BB}^{-1} = \mathbf{I}$, joten

Lause
$$\boxed{\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \qquad (61)}$$

Olettaen $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{C}$ säännöllisiksi $n \times n-$matriiseiksi ($c \neq 0$ skalaari) on

$$(\mathbf{AC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \qquad (62)$$
$$(c\mathbf{A})^{-1} = c^{-1}\mathbf{A}^{-1} \qquad (63)$$
$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A} \qquad (64)$$
$$(\mathbf{A}^{-1})^{\mathsf{T}} = (\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{-1}. \qquad (65)$$

Merkitsemme myös

$$\mathbf{A}^{-p} = (\mathbf{A}^{-1})^{p} \qquad p = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (66)$$

Näillä eväillä kertolaskut käänteismatriisilla sujuvat.

4.2. Käänteismatriisi ja yhtälöryhmä

Tarkastellaanpa yhtälöryhmää

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} . \tag{67}$$

Jos $\mathbf{A}^{-1}$ ja $\mathbf{b}$ tunnetaan, (67):n muodollinen ratkaisu saadaan kertomalla $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puolittain $\mathbf{A}^{-1}$:llä eli $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, mistä

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \tag{68}$$

Huom Käänteismatriisin $\mathbf{A}^{-1}$ laskeminen on yleisesti työlästä,[9] mutta kun se on kerran laskettu, yhtälöryhmän $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ratkaisu kaikilla annetuilla $\mathbf{b}$ saadaan matriisikertolaskulla $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

---

[9] Havaitsemme, että $\mathbf{A}^{-1}$ saadaan laskettua (67):stä ratkaisemalla x_i:t tähän tarkoitukseen vapaina muuttujina pidettävien b_j:den lineaarikombinaatioina. Käytännöllisemmät tavat laskea käänteismatriisi esitellään §4.3:ssa ja §4.4:ssä.

4.3. Käänteismatriisi adjungoidun matriisin kautta

Määritelmä Säännöllisen $n \times n-$matriisin adjungoitu matriisi[10] on

$$\boxed{\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = [\operatorname{cof}(\mathbf{A})]^{\mathrm{T}},} \tag{69}$$

missä $\operatorname{cof}(\mathbf{A})$ on $\mathbf{A}$:n kofaktorimatriisi

$$\boxed{\operatorname{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \operatorname{cof}_{n-1}(a_{11}) & \operatorname{cof}_{n-1}(a_{12}) & \cdots & \operatorname{cof}_{n-1}(a_{1n}) \\ \operatorname{cof}_{n-1}(a_{21}) & \operatorname{cof}_{n-1}(a_{22}) & \cdots & \operatorname{cof}_{n-1}(a_{12}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \operatorname{cof}_{n-1}(a_{n1}) & \operatorname{cof}_{n-1}(a_{n2}) & \cdots & \operatorname{cof}_{n-1}(a_{nn}) \end{pmatrix},} \tag{70}$$

missä kofaktorit eli luvut $\operatorname{cof}_{n-1}(a_{ij})$ määriteltiin (55):ssa.

Nyt voimme kirjoittaa 'käänteismatriisin kaavan'

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \operatorname{adj}(\mathbf{A})/\det(\mathbf{A}).} \tag{71}$$

[10] Varo: Tällä termillä on lineaarialgebrassa muutakin käyttöä.

4.4. Käänteismatriisi alkeisrivitoimitusten kautta

Käytännössä (71):ssa pitää laskea $\mathbf{A}$:n alideterminantteja kaikissa kertaluvuissa, joten menetelmä ei ole tehokas suurille matriiseille. Haemme siksi ratkaisua alkeisrivitoimituksin (vrt. §2.2), jotka matriisikertolaskuja varten esitämme alkeismatriiseina:

1) $\mathbf{R}(i_1 + c i_2) \leftrightarrow$ lisää riviin i_1 rivi i_2 kerrottuna c:lla
2) $\mathbf{R}(i_1, i_2) \leftrightarrow$ vaihda rivit i_1 ja i_2
3) $\mathbf{R}(ci) \leftrightarrow$ kerro rivi i luvulla $c \neq 0$.

Esimerkiksi 3×3–matriiseille seuraavat alkeisrivitoimitukset R saadaan kertomalla $\mathbf{A}$ vastaavalla $\mathbf{R}$-matriisilla:

$$\mathbf{R}(2{+}c3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}(c3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Oletetaan nyt $\mathbf{A}$ säännölliseksi $n\times n$–matriisiksi. Tällöin pätee:

$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, missä $\mathbf{B}$ on redusoitu porrasmatriisi.

Säännöllisyys & neliömatriisiys $\Rightarrow \mathbf{A} \sim \mathbf{I}$.

Edellisen perusteella löytyy alkeisrivitoimitukset eli alkeismatriisit $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots, \mathbf{R}_N$, joiden tulo $\mathbf{R} = \mathbf{R}_N \cdots \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1$ siten, että $\mathbf{RA} = \mathbf{I}$. Täten $\mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{RI}$. Siis

$$\mathbf{R}_N \cdots \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1\mathbf{A} = \mathbf{RA} = \mathbf{I} \tag{72}$$

$$\mathbf{R}_N \cdots \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1\mathbf{I} = \mathbf{RI} = \mathbf{A}^{-1} \tag{73}$$

Nämä yhtälöt voidaan tulkita algoritmiksi:

> Otetaan lähtökohdaksi $n \times 2n$–matriisi $(\mathbf{A}|\mathbf{I})$.
> Valitaan $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots, \mathbf{R}_N$ siten, että $\mathbf{A}$ muuntuu $\mathbf{I}$:ksi.
> Tällöin $\mathbf{I}$ muuntuu $\mathbf{A}^{-1}$:ksi.

= Gaussin-Jordanin menetelmä käänteismatriisin laskemiseksi

Huom Meillä on nyt kaava determinantille (56), sen kautta käänteismatriisille (71), ja edelleen yhtälöryhmän ratkaisulle (68). Kun n on suuri, on silti aihetta turvautua alkeisrivitoimituksiin perustuviin algoritmeihin. Numeriikkaa varten on kehitetty lisäksi approksimatiivisia menetelmiä (kurssi Numeeriset menetelmät).

5. Vektoriavaruudet ja lineaarikuvaukset

5.1. Vektoriavaruus

Joukko olioita (esimerkiksi tavalliset $\mathbb{R}^n$:n vektorit) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots$ muodostaa vektoriavaruuden $\mathcal{V}$, jos niiden joukossa on määritelty yhteenlasku ja skalaarilla kertominen (skalaarit c, c_1, c_2), joille

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v} \in \mathcal{V} && (74)\\
c\mathbf{v}_1 &= \mathbf{v} \in \mathcal{V} && (75)\\
\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 && (76)\\
(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) && (77)\\
\exists\ \mathbf{0} \in \mathcal{V} \text{ siten, että } \mathbf{v} + \mathbf{0} &= \mathbf{v}\ \forall\ \mathbf{v} \in \mathcal{V} && (78)\\
\forall\ \mathbf{v} \in \mathcal{V}\ \exists\ -\mathbf{v} \in \mathcal{V},\ \text{jolle } \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) &= 0 && (79)\\
c_1(c_2\mathbf{v}) &= (c_1c_2)\mathbf{v} && (80)\\
1\mathbf{v} = \mathbf{v} & && (81)\\
c(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= c\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2 && (82)\\
(c_1 + c_2)\mathbf{v} &= c_1\mathbf{v} + c_2\mathbf{v} && (83)
\end{aligned}
$$

Jos $c_i \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), niin on $\mathcal{V}$ reaalinen (kompleksinen) vektoriavaruus.

Vektoreiden $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}$ mielivaltainen lineaarikombinaatio kuuluu $\mathcal{V}$:hen:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_m\mathbf{v}_m \in \mathcal{V} \quad \forall\ c_i. \tag{84}$$

Vektorijoukko $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}$, $i = 1, 2, ..., m$, on **LI** mikäli (muutoin **LD**)

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0} \ \Leftrightarrow\ c_i = 0\ \forall\ i \tag{85}$$

Määritelmä

Vektoriavaruus $\mathcal{V}$ on *n*-ulotteinen, jos siitä löytyy korkeintaan n kpl **LI** vektoreita. Tämä n vektorin joukko virittää $\mathcal{V}$:n ja on $\mathcal{V}$:n kanta. Joukon vektorit ovat kantavektoreita.

Vektoriavaruuden kanta ei ole yksikäsitteinen. Myös (äärettömän) moni muu n vektorin joukko voi olla **LI** ja toimia kantana.

Jokainen vektori $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ voidaan ilmaista valitussa kannassa $\{\mathbf{v}_i\}$ kantavektoreiden lineaarikombinaationa

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n. \tag{86}$$

5.2. Sisätuloavaruus

Määritelmä Vektoriavaruus $\mathcal{V}$ on reaalinen sisätuloavaruus, jos kaikilla $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}$ on olemassa $\mathbf{v}_1$:n ja $\mathbf{v}_2$:n sisätulo $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbb{R}$, jolle kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{v}_i \in \mathcal{V}$ ja $c_i \in \mathbb{R}$ pätee:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) && (87)\\
(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) &= c_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) + c_2(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) && (88)\\
(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0 \text{ ja: } (\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{v} = \mathbf{0}. && (89)
\end{aligned}
}
$$

Vektorit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eli ne ovat ortogonaaliset, jos $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$.

Vektorin $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ pituus eli normi on

$$\boxed{||\mathbf{v}|| = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})} \geq 0.} \tag{90}$$

Nollasta poikkeava $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ voidaan normittaa yksikkövektoriksi:

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/||\mathbf{v}|| \quad \Rightarrow \quad ||\hat{\mathbf{v}}|| = 1. \tag{91}$$

Tällöin $\hat{\mathbf{v}}$:n sanotaan olevan normitettu.

Lauseita Kaikille $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}$ pätevät Cauchyn-Schwartzin epäyhtälö

$$|(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)| \leq ||\mathbf{v}_1|| \, ||\mathbf{v}_2||, \tag{92}$$

kolmioepäyhtälö

$$||(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)|| \leq ||\mathbf{v}_1|| + ||\mathbf{v}_2|| \tag{93}$$

sekä suunnikassääntö

$$||(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)||^2 + ||(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)||^2 = 2(||\mathbf{v}_1||^2 + ||\mathbf{v}_2||^2) \tag{94}$$

Huom Määritelmät ja lauseet yllä tuntuvat järkeenkäypäisiltä, kun ajatelemme avaruuksia $\mathbb{R}^n$ pienillä n. Ne pätevät kuitenkin kaikissa $\mathbb{R}^n$ sekä muunkinlaisille vektoriavaruuksille, joita ovat esimerkiksi:

$$\mathcal{P}_n = \{p \,|\, p \text{ on polynomi } \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ astetta } \leq n\}$$

$$\mathcal{F} = \{f \,|\, f \text{ on funktio } \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{M}_{m \times n} = \{\mathbf{A} \,|\, \mathbf{A} \text{ on } m \times n\text{–matriisi}\}$$

Sisätulon keksiminen näille avaruuksille saa(ttaa) mietityttää vielä.

5.3. Lineaarikuvaus ja sitä vastaava matriisi

Määritelmiä

Olkoot $\mathcal{V}$ ja $\mathcal{W}$ vektoriavaruuksia sekä $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ ja $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$.
Kuvauksessa (muunnoksessa) $F : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lähtöjoukon vektori $\mathbf{v}$ kuvautuu maalijoukon vektoriksi $\mathbf{w}$, merkitään $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{w}$ tai $\mathbf{w} = F(\mathbf{v})$.
Tällöin sanomme, että vektori $\mathbf{w}$ on vektorin $\mathbf{v}$ kuva kuvauksessa F.

F on lineaarikuvaus, mikäli $\forall\ \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}$ ja $\forall\ c \in \mathbb{R}$ pätee

$$\boxed{\begin{aligned} F(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= F(\mathbf{v}_1) + F(\mathbf{v}_2) && (95) \\ F(c\mathbf{v}) &= cF(\mathbf{v}) && (96) \end{aligned}}$$

Lineaarikuvauksilla on mukavia ominaisuuksia, mm.

$$F(\mathbf{0}_{\mathcal{V}}) = \mathbf{0}_{\mathcal{W}}, \tag{97}$$

missä teimme eron lähtö- ja maalipuolen nollavektorien välillä, ja

$$F(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1 F(\mathbf{v}_1) + c_2 F(\mathbf{v}_2). \tag{98}$$

Nämä on helppo todistaa lineaarikuvauksen määritelmästä lähtien.

Tarkastelemme seuraavaksi lineaarikuvauksia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Lineaarikuvaus voidaan esittää matriisina, kunhan valitsemme avaruuksille $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ ja $\mathcal{W} = \mathbb{R}^m$ kantavektorit. Valitaan niille nyt luonnolliset kannat eli standardikannat

$$\hat{\mathbf{i}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{i}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{i}}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{99}$$

$$\hat{\mathbf{j}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{j}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{j}}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{100}$$

Kumpikin kanta on ortonormitettu eli kantavektorit ovat keskenään ortogonaaliset ja kunkin kantavektorin pituus on 1, sisätulona tuttu pistetulo $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$.

Lineaarikuvauksen matriisiesityksen $F(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$ saamme tarkastelemalla kantavektorien[11] kuvia

$$\mathbf{w}^{(k)} = F(\hat{\mathbf{i}}_k) = \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{i}}_k. \tag{101}$$

Esimerkiksi lähtöpuolen kantavektorin $\hat{\mathbf{i}}_1$ (eli yllä $k{=}1$) kuva on

$$\mathbf{w}^{(1)} = \begin{pmatrix} w_1^{(1)} \\ w_2^{(1)} \\ \vdots \\ w_m^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Nyt alkiot a_{i1} ovat ratkaistavissa: $a_{11} = w_1^{(1)}, \ldots, a_{m1} = w_m^{(1)}$ ja samaan tapaan kaikilla $k = 1, \ldots, n$ on

$$a_{1k} = w_1^{(k)},\ a_{21} = w_2^{(k)}, \ldots,\ a_{mk} = w_m^{(k)} \tag{102}$$

[11] Matriisin $\mathbf{A}$ alkiot a_{ij} riippuvat valituista kannoista ja myös kantavektoreiden järjestyksestä.

Lineaarikuvausta $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vastaava matriisi $\mathbf{A}$ saadaan siis asettamalla kantavektoreiden $\hat{\mathbf{i}}_k$ kuvat $\mathbf{A}$:n sarakkeiksi:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} w_1^{(1)} & w_1^{(2)} & \cdots & w_1^{(n)} \\ w_2^{(1)} & w_2^{(2)} & \cdots & w_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_m^{(1)} & w_m^{(2)} & \cdots & w_m^{(n)} \end{pmatrix} \tag{103}$$

Kun vektorit $\hat{\mathbf{i}}_k$ olivat kantavektoreita ja kun esitimme niiden kuvat $\mathbf{w}^{(k)}$ kannassa $\hat{\mathbf{j}}_k$, on (103) matriisin $\mathbf{A}$ esitys kannoissa $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}$ ja $\{\hat{\mathbf{j}}_l\}$.

Näin saamme Lauseen:

Jokaista lineaarikuvausta $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vastaa yksikäsitteinen muotoa (103) oleva matriisi $\mathbf{A}$ siten, että $F(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v} \ \forall \ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Tämä vastaavuus on yksikäsitteinen niin kauan kun pidämme kannat samoina. Palaamme myöhemmin kantojen vaihtoon neliömatriisien tapauksessa; todettakoon determinantin ja jäljen sellaisessa toimituksessa tietyin ehdoin säilyvän.

5.4. Käänteiskuvauks ja yhdistetty kuvaus

Jos nyt lineaarikuvausta $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vastaava neliömatriisi $\mathbf{A}$ on säännöllinen, niin on olemassa $\mathbf{A}^{-1}$, joka vastaa käänteiskuvausta $F^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Siten myös F^{-1} on lineaarikuvaus ja

$$\boxed{\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{w}.} \tag{104}$$

Jos taasen $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ ja $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, ja näitä kuvauksia vastaavat matriisit ovat $\mathbf{A}$ (s.e. $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{w}$) ja $\mathbf{B}$ (s.e. $\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{v}$), niin yhdistettyä kuvausta $F \circ G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vastaa matriisi $\mathbf{C}$ siten että

$$\boxed{\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{y}.} \tag{105}$$

Siis yhdistettyä kuvausta vastaa tulomatriisi $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}$ ja täten kahden lineaarikuvauksen yhdistetty kuvaus on lineaarikuvaus.[12]

[12] Matriisiesityksen kannalta on oleellista, että 'keskimmäiselle' avaruudelle $\mathbb{R}^p$ käytetään samaa kantaa kummassakin kuvauksessa. Lisäksi olemme jo oppineet, että neliömatriisien tapauksessa pätee $\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$.

6. Neliömatriisin ominaisarvo-ongelma

6.1. Ominaisarvo-ongelma

Johdannoksi: Ominaisarvo-ongelma[13] näyttää äkkipäätään kaukaa haetulta mutta – kuten tulemme näkemään – se antaa avaimen siihen mitä annettu matriisi (tai sitä vastaava lineaarikuvaus) 'tekee'. Lisäksi sille on monta suoraa käyttökohdetta fysiikassa (mm. ominaistaajuudet, ominaistilat). Kysymyksenasettelu kuuluu: Annetulle neliömatriisille $\mathbf{A}$ jossain kannassa mitkä vektorit $\mathbf{x}$ vain 'venyvät' ja kuinka paljon, kun niihin operoidaan ko. matriisilla? Osoittautuu, että jos löydämme kyseiset ns. ominaisvektorit, saamme niiden kautta vektoriavaruudelle kannan, jossa $\mathbf{A}$ on yksinkertaisimmassa muodossaan.

Määritelmä

Olkoon $\mathbf{A}$ $n \times n-$matriisi. Vektori $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ on $\mathbf{A}$:n ominaisvektori, jos $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$, missä λ on jokin luku (skalaari $\in \mathbb{R}$ tai $\in \mathbb{C}$). Tällöin $\mathbf{x}$ on ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori.

[13] On muitakin kuin ominaisarvo-ongelmia kuin matriisin oao.

Ratkaistavana on siis ominaisarvo-yhtälö

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.} \tag{106}$$

Jos on $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$ eli on löydetty ominaisarvo λ_i ja sitä vastaava ominaisvektori $\mathbf{x}_i$, saattaa olla muitakin ominaisvektoreita, jotka vastaavat samaa ominaisarvoa. Jos ominaisarvoa λ_i vastaa k kpl **LI** ominaisvektoreita, λ_i on $k-$kertaisesti degeneroitunut.

Huom Jos $\mathbf{x}_i$ on ominaisvektori, niin myös esim. $5\mathbf{x}_i$ on samaa ominaisarvoa vastaava ominaisvektori, mutta nämä ovat **LD**.

Kirjoitetaanpa (106) toisin käyttäen $n \times n-$yksikkömatriisia $\mathbf{I}$:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{107}$$

Tämä on n lineaarisen yhtälön *homogeeninen* yhtälöryhmä

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases} . \tag{108}$$

Muistamme (§3.1), että homogeenisella yhtälöryhmällä on ei-triviaaleja ratkaisuja, jos kerroindeterminantti on nolla. Vaadimme siis, että $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ eli

$$\boxed{P_n(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0} \tag{109}$$

Selvästi $P_n(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ on λ:n n:nnen asteen polynomi, **A**:n ominaisarvo-ongelman karakteristinen polynomi.

Yhtälöä $P_n(\lambda) = 0$ kutsumme **A**:n karakteristiseksi yhtälöksi, jonka ratkaisuina saamme **A**:n ominaisarvot $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$

Ratkaistuamme ominaisarvot λ_i syötämme ne yksi kerrallaan (108):een ja ratkaisemme niitä vastaavat ominaisvektorit.

Ominaisarvoa λ_i vastaavien **LI** ominaisvektoreiden virittämä vektoriavaruus on kyseisen ominaisarvon ominaisavaruus.

Ominaisarvo-ongelma ratkeaa[14] siis seuraavin askelin:

1) Muodosta polynomi $P_n(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$
2) Hae yhtälön $P_n(\lambda) = 0$ juuret $\lambda_1(m_1), \lambda_2(m_2), \ldots, \lambda_\ell(m_\ell)$
3) Etsi yhtälöryhmän $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ratkaisujoukko $\{\mathbf{x}\}_i$ eli ominaisvektorit kullekin $i = 1, 2, \ldots, \ell$.

Algebran peruslauseen nojalla $P_n(\lambda)$:lla on kompleksitasossa n nollakohtaa,[15] joten se voidaan saattaa muotoon

$$P_n(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_\ell)^{m_\ell},$$

missä $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\ell$ ovat yhtälön $P_n(\lambda) = 0$ erisuuret juuret, m_i on λ_i:n (algebrallinen) multiplisiteetti ja $m_1 + \ldots + m_\ell = n$.

[14] Karakteristisen yhtälön ratkaiseminen ei yleisessä tapauksessa ole helppoa; ratkaisukaavatkin ovat olemassa vain 4. asteen yhtälöön saakka. Fysiikassa voidaan kuitenkin usein hyödyntää symmetrioita ongelman pilkkomisessa paloihin. Lisäksi monissa tilanteissa **A** on harva eli sisältää paljon nollia.

[15] Lineaarialgebran teorian (johon emme mene) näkökulmasta laajennamme jo §6.2-4:ssä käsittelyä 'kompleksisen tapauksen' (lisää §8:ssa) suuntaan.

6.2. Joitakin tuloksia ominaisarvoille

Olkoon $\mathbf{A}$ edelleen $n \times n-$matriisi. Sen ominaisarvoille pätee:

Lause

Jos $\mathbf{A}$ on yläkolmio- tai alakolmio- tai diagonaalimatriisi,

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$$

eli tällöin ominaisarvot ovat $\mathbf{A}$:n diagonaalialkiot.

Lause

Eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat **LI**. Siis: Jos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, ovat eri ominaisarvoja ja $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{,2}, \ldots, \mathbf{x}_p$ vastaavia ominaisvektoreita, niin $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{,2}, \ldots, \mathbf{x}_p$ ovat **LI**.

Lause

Olkoon ominaisarvon λ multiplisiteetti m. Olkoon k kpl sitä vastaavia **LI** ominaisvektoreita, missä $1 \leq k \leq m$. Tällöin λ:aa vastaavan kyseisten ominaisvektoreiden virittämän ominaisavaruuden dimensio on k. Sanomme, että λ:n degeneraatio (eli geometrinen multiplisiteetti) on k.

Lause

Matriiseilla $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{A}^T$ on samat ominaisarvot.

Lause λ_i ovat $\mathbf{A}$:n ominaisarvot $\Rightarrow$ $c\lambda_i$ ovat $c\mathbf{A}$:n ominaisarvot, missä $c \in \mathbb{R}$. $c\mathbf{A}$:n ominaisvektorit $=$ $\mathbf{A}$:n ominaisvektorit.

Lause $\sum_i \lambda_i m_i = \mathrm{Tr}(\mathbf{A})$ (m_i on juuren λ_i multiplisiteetti)

Lause $\prod_i \lambda_i^{m_i} = \det(\mathbf{A})$ (m_i on juuren λ_i multiplisiteetti)

Seuraus Karakteristisen polynomin $P_n(\lambda)$ vakiotermi on $\det(\mathbf{A})$ eli edellisessä lauseessa oleva juurten λ_i tulo.

Viimeisiä kahta lausetta ja seurausta voi hyödyntää esim. saadun ratkaisun tarkistamisessa (huomaa myös sivun 52 alaviite 15).

Esim Luentoesimerkkejä:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

6.3. Karakteristisen polynomin kompleksisista juurista

Olkoon $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $n \times n-$neliömatriisi, jossa $a_{ij} \in \mathbb{R}\ \forall\ i, j$. Tällöin karakteristinen polynomi $P_n(\lambda)$ on reaalilukukertoiminen ja siten algebran peruslauseen mukaan sen juuret λ_k ovat reaalisia ja/tai esiintyvät kompleksilukupareina

$$\lambda_k = a + b\mathrm{i}, \qquad \lambda_k^* = a - bi, \qquad a, b \in \mathbb{R}. \tag{110}$$

Tällöin pätee

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^* \mathbf{x}_k^* = \lambda_k^* \mathbf{x}_k^*, \tag{111}$$

missä matriisin $\mathbf{A} = (a_{ij})$ kompleksikonjugaatti on $\mathbf{A}^* = (a_{ij}^*)$. Nyt eli §6:ssa $\mathbf{A}$ on kuitenkin reaalialkioinen, joten

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_k^* = \lambda_k^* \mathbf{x}_k^*, \tag{112}$$

jolloin 'kompleksisessa tapauksessa' (katso §8) sanomme, että $\mathbf{A}$:n ominaisarvoa λ_k^* vastaa ominaisvektori $\mathbf{x}_k^*$.

6.4. Erityisistä reaalisista matriisesista

Olkoon lineaarikuvausta $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vastaava $n \times n-$matriisi $\mathbf{A} = (a_{ij})$ edelleen reaalinen eli $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$. Tällöin

> matriisi $\mathbf{A}$ on symmetrinen, jos $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$.
>
> matriisi $\mathbf{A}$ on antisymmetrinen, jos $\mathbf{A}^\mathsf{T} = -\mathbf{A}$.
>
> matriisi $\mathbf{A}$ on ortogonaalinen, jos $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}^{-1}$.

Antisymmetrisen matriisin $\mathbf{A}$ diagonaalialkioille $a_{ii} = -a_{ii}$, joten

$$a_{ii} = 0. \tag{113}$$

Jos nyt $\mathbf{B}$ on mielivaltainen $n \times n-$matriisi, niin

$$\mathbf{B} = \mathbf{S} + \mathbf{A}, \tag{114}$$

missä $\mathbf{S}$ on symmetrinen ja $\mathbf{A}$ on antisymmetrinen ja

$$\mathbf{S} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{B}^\mathsf{T}) \qquad \mathbf{A} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{B}^\mathsf{T}). \tag{115}$$

Lause

> Symmetrisen $n \times n-$matriisin ominaisarvot ovat reaaliset ja sen ominaisvektoreista voidaan muodostaa $\mathbb{R}^n$:n ortonormitettu kanta. Eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat ortogonaaliset.

Lause

> Antisymmetrisen matriisin karakteristisen polynomin juuret λ ovat joko nollia tai täysin imaginaarisia eli $\lambda = \pm bi$.

Olkoon $\mathbf{A}$ sitten ortogonaalinen. Tällöin pätevät Lauseet:

1) $\mathbf{A}$ säilyttää sisätulon eli $\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{a}$ ja $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, missä $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b}$. $\mathbf{A}$ säilyttää myös normin $||\mathbf{a}||$.
2) Olkoon $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ matriisin $\mathbf{A}$ sarakevektorit. $\mathbf{A}$ on ortogonaalinen $\Leftrightarrow (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \delta_{ij}$. Sama pätee rivivektoreille.
3) $\mathbf{A}$:n determinantti on $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$.
4) Karakteristisen polynomin juuret $\lambda = a \pm bi$ ja $|\lambda| = 1$.

Huom Yllä olemme 'sallineet' reaalisille matriiseille kompleksiset 'ominaisarvot' (katso alaviitettä 15) sekä 'ominaisvektorit' (§6.3). Jälkimmäiset asustavat kompleksisessa vektoriavaruudessa (§8).

7. Neliömatriisin diagonalisointi ja neliömuodot

7.1. Similaariset matriisit

Seuraavassa **A**, **B** ja **U** ovat $n \times n-$matriiseja. Määrittelemme:

Neliömatriisit **A** ja **B** ovat similaariset, jos on olemassa neliömatriisi **U** siten, että

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}. \tag{116}$$

Tätä kutsutaan similariteettimuunnokseksi.

Similaaristen matriisien karakteristisille polynomeille pätee

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) &= \det(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} - \lambda\mathbf{U}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{U}) = \det(\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{U}) \\ &= \det(\mathbf{U}^{-1})\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\det(\mathbf{U}) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}),\end{aligned}$$

koska $\det(\mathbf{U}^{-1}) = 1/\det(\mathbf{U})$. Täten similaarisilla matriiseilla on sama karakteristinen polynomi, joten saadaan:

Lause

$$\boxed{\text{Similaarisilla matriiseilla on samat ominaisarvot.} \quad (117)}$$

7.2. Reaalisen matriisin diagonalisointi

Seuraavassa **A**, **U** ja **D** ovat $n \times n-$matriiseja. Määritelmä:

Neliömatriisi **A** on diagonalisoituva, jos on olemassa säännöllinen neliömatriisi **U** siten, että

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \text{diag}(d_1, d_2, ..., d_n). \tag{118}$$

Diagonaalimatriisille $\mathbf{D} \equiv \text{diag}(d_1, d_2, ..., d_n)$ pätee

$$\det(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \iff (d_1 - \lambda)(d_2 - \lambda)\cdots(d_n - \lambda) = 0,$$

joten (117) $\Rightarrow$ **D**:n ja **A**:n ominaisarvot ovat $d_1, d_2, ..., d_n$.

Lause: Similariteettimuunnoksen matriisi **U** sisältää sarakkeinaan **A**:n **LI** ominaisvektorit (oltava **LI** jotta $\det(\mathbf{U}) \neq 0$).

Lause: **A** on diagonalisoituva $\Leftrightarrow$ **A**:lla on n **LI** ominaisvektoria.

Seuraus: **A**:lla on n eri ominaisarvoa $\Rightarrow$ **A** on diagonalisoituva.

Huom $\boxed{\text{Diagonalisoiminen} \leftrightarrow \text{ominaisarvo-ongelma ratkaiseminen.}}$

Koska oli $\mathbf{D} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, saamme myös

$$\mathbf{AU} = \mathbf{UD} \tag{119}$$

millä voi helposti (vain matriisituloja) tarkistaa saamansa tuloksen.

Esim Sivun 54 ensimmäiselle esimerkkimatriisille on

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{U}^{-1} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Matriisiteorian keskeinen tulos on spektraalilause:

Lause

Reaalisen matriisin **A** diagonalisoi ortogonaalimatriisi **U** $\Leftrightarrow$ **A** on symmetrinen.

Todistus suuntaan $\Rightarrow$ on helppo, suuntaan $\Leftarrow$ käytetään luvun §6.4 ensimmäistä lausetta symmetriselle matriiseille.

Huom Symmetriset matriisit tulevat fysiikassa vastaan usein (hitausmomentti ja 'kytketyt värähtelyt' kurssilla Mekaniikka); tärkeä ominaisuus: ominaisarvojen ja -vektoreiden reaalisuus.

7.3. Neliömuodot

Määritelmä

Funktio $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on neliömuoto, jos

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{A}\, \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{120}$$

missä kerroinmatriisi $\mathbf{A}$ on symmetrinen $n \times n-$neliömatriisi.

Similariteettimuunnoksen ($\mathbf{U}$ on ortogonaalimatriisi: $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\mathsf{T}$)

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n),$$

tuottamat uudet koordinaatit $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ovat

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{y},$$

joten

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{U}\mathbf{y})^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{D}\mathbf{y} \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2. \end{aligned}$$

Täten olemme saaneet neliömuodon pääakseliesityksen eli kanonisen muodon

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \equiv Q(y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{121}$$

missä λ_i:t ovat alkuperäisen kerroinmatriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvot.

Esim Tarkastellaan funktiota (huomaa $\mathbf{A}$-matriisin symmetrisointi)

$$q(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 7x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Nyt diagonalisoivaksi matriisiksi saadaan $\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, missä etutekijä takaa sarakkeiden normituksen, ja pääakselimuodoksi

$$Q(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 3y_1^2 + 8y_2^2.$$

7.4. Neliömuodot ja tasokäyrät

Esim Jatketaan esimerkkiä edellä kirjoittamalla $q(x_1, x_2) = 24$, mikä määrittelee (x_1, x_2)-tasossa käyrän, jonka yhtälö on

$$4x_1^2 + 4x_1x_2 + 7x_2^2 = 24. \qquad (*)$$

Edellisen esimerkin perusteella tämän pääakselimuoto on

$$3y_1^2 + 8y_2^2 = 24 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y_1^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{y_2^2}{(\sqrt{3})^2} = 1,$$

mikä on (y_1, y_2)-tason ellipsin yhtälö. Tämä olisi vaikea nähdä alkuperäisestä yhtälöstä $(*)$: vinossa oleva ellipsi (x_1, x_2)-tasossa.

Yleinen toisen asteen tasokäyrä (kartioleikkaus) on muotoa

$$q(x_1, x_2) = Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2 + Dx_1 + Ex_2 + F = 0. \qquad (122)$$

Kolme ensimmäistä termiä ovat neliömuoto, jonka pääakseliesitys on diagonaalinen. Ne määräävät koordinaatiston kierron. Termit Dx_1 ja Ex_2 muunnetaan uusiin koordinaatteihin samalla kierrolla.

Yhtälön (122) mahdollinen ratkaisu on (yksi piste, suora tai) yksi neljästä standardikartioleikkauksesta:

1) Ympyrä (säde r):

$$y_1^2 + y_2^2 = r^2$$

2) Ellipsi (puoliakselit a ja b):

$$\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$$

3) Hyperbeli (puoliakselien pituudet c ja d):

$$\frac{y_1^2}{c^2} - \frac{y_2^2}{d^2} = 1 \quad \text{tai} \quad \frac{y_2^2}{c^2} - \frac{y_1^2}{d^2} = 1$$

4) Paraabeli (etäisyys kärjestä polttopisteeseen e):

$$y_1^2 = ey_2 \quad \text{tai} \quad y_2^2 = ey_1$$

Huom Tapauksessa $n = 3$ neliömuodot johtavat toisen asteen pintoihin (joskus yhdeksi pisteeksi, suoraksi tai tasoksi).

8. Kompleksiset vektoriavaruudet

8.1. Kompleksinen sisätuloavaruus

Olkoon $\mathcal{V}$ vektoriavaruus siten, että luvun §5.1 ehdot täyttyvät, mutta skalaarilla kertominen tapahtuu kompleksiluvulla. Kyseessä on tällöin kompleksinen vektoriavaruus.

Siitä saadaan kompleksinen sisätuloavaruus varustamalla se sisätulolla $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbb{C}$, jolle kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{v}_i \in \mathcal{V}$ ja $c_i \in \mathbb{C}$ on:

$$\boxed{\begin{aligned} (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)^* && (123) \\ (c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) &= c_1^*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) + c_2^*(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) && (124) \\ (\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0 \text{ ja: } (\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= 0 \ \Leftrightarrow \ \mathbf{v} = \mathbf{0}. && (125) \end{aligned}}$$

Nytkin sanotaan $\mathbf{v}_1$:n ja $\mathbf{v}_2$:n olevan ortogonaaliset, jos $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$.

Lisäksi sisätulon ominaisuuksista (123,124) seuraa, että $\forall\ c \in \mathbb{C}$

$$(\mathbf{v}_1, c\mathbf{v}_2) = (c\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)^* = [c^*(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)]^* = c(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)^* = c(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2). \tag{126}$$

Se on 1. argumentin suhteen antilineaarinen: $(c\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)=c^*(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ ja 2. argumentin suhteen lineaarinen: $(\mathbf{v}_1,c\mathbf{v}_2)=c(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$. Sisätulo kokonaisuutena on seskilineaarinen.

Olkoon $\mathbf{A}$ kompleksialkioinen $n\times n-$matriisi. Määritelmä:

Matriisin $\mathbf{A}$ Hermiten konjugaatti[16] $\mathbf{A}^\dagger$ on matriisi

$$\mathbf{A}^\dagger=(\mathbf{A}^*)^\mathsf{T} \tag{127}$$

Avaruus, jossa liikumme, on $\mathbb{C}^n$. Sen mielivaltaisille vektoreille $\mathbf{a},\mathbf{b}$ sisätuloksi kelpaa eli ehdot (123-125) toteuttaa

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=\mathbf{a}^\dagger\mathbf{b}=\begin{pmatrix}a_1^* & a_2^* & \cdots & a_n^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=a_1^*b_1+a_2^*b_2+\ldots+a_n^*b_n, \tag{128}$$

jolloin vektorin $\mathbf{a}$ normi on

$$||\mathbf{a}||=\sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})}=\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2+\ldots+|a_n|^2}\geq 0. \tag{129}$$

[16] Terminologiaa: Tätä(kin) kutsutaan usein adjungaatiksi.

8.2. Kompleksialkioisia matriiseja

Olkoon $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, kompleksialkioinen matriisi. Tällöin

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} + \mathrm{i}\mathbf{S}, \qquad \mathbf{R} = (r_{ij}),\ \mathbf{S} = (s_{ij}), \tag{130}$$

missä $r_{ij}, s_{ij} \in \mathbb{R}$. Matriisin $\mathbf{A}$ kompleksikonjugaatti on

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{R} - \mathrm{i}\mathbf{S}. \tag{131}$$

Kompleksialkioisille matriiseille $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ pätee ($c \in \mathbb{C}$)

$$(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger \tag{132}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^\dagger = \mathbf{A}^\dagger + \mathbf{B}^\dagger \tag{133}$$

$$(c\mathbf{A})^\dagger = c^*\mathbf{A}^\dagger \tag{134}$$

$$(\mathbf{A}^\dagger)^\dagger = \mathbf{A} \tag{135}$$

$$\mathbf{I}^\dagger = \mathbf{I} \tag{136}$$

Neliömatriisille eli $n \times n-$matriisille $\mathbf{A}$, jos sen käänteismatriisi on olemassa, pätee

$$(\mathbf{A}^{-1})^\dagger = (\mathbf{A}^\dagger)^{-1} \tag{137}$$

Olkoon $\mathbf{A}$ $n \times n-$neliömatriisi. Tällöin

matriisi $\mathbf{A}$ on hermiittinen, jos $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}$.
matriisi $\mathbf{A}$ on antihermiitttinen, jos $\mathbf{A}^\dagger = -\mathbf{A}$.
matriisi $\mathbf{A}$ on unitaarinen, jos $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{-1}$.

Unitaariselle matriisille $\mathbf{A}$ on

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{I} = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}. \tag{138}$$

Hermiten konjugaatin determinantti on

$$\det(\mathbf{A}^\dagger) = [\det(\mathbf{A})]^*. \tag{139}$$

Huom Nyt nähdään vastaavuudet aiempaan (vrt. §6.4):
Reaalialkioiselle matriisille on $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$, joten reaalinen...

...hermiittinen matriisi on symmetrinen eli $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$.

...antihermiittinen matriisi on antisymmetrinen eli $\mathbf{A}^\mathsf{T} = -\mathbf{A}$.

...unitaarinen matriisi on ortogonaalinen $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}^{-1}$.

8.3. Kompleksialkioisten matriisien ominaisuuksia

Seuraavassa kaikki matriisit ovat $n \times n-$neliömatriiseja.

Lause: Hermiittisen matriisin ominaisarvot ovat reaaliset: $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Lause: Antihermiittisen matriisin ominaisarvot ovat joko nollia tai täysin imaginaarisia: $\lambda_i = \pm bi$.

Lause: Unitaarisen matriisin ominaisarvot ovat joko reaalisia tai kompleksisia mutta aina ykkösen pituisia: $|\lambda_i| = 1 \ \forall \ i$.

Olkoon $\mathbf{A}$ sitten unitaarinen. Tällöin pätevät Lauseet:

1) $\mathbf{A}$ säilyttää sisätulon eli $\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{a}$ ja $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{b} \Rightarrow$
   $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \ \Leftrightarrow \ \mathbf{u}^\dagger \mathbf{v} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b}$.
   Siten $\mathbf{A}$ säilyttää myös normin $||\mathbf{a}||$.
2) Olkoon $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ matriisin $\mathbf{A}$ sarakevektorit. $\mathbf{A}$ on unitaarinen $\Leftrightarrow (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \delta_{ij}$. Sama pätee rivivektoreille.
3) $\mathbf{A}$:n determinantti on $|\det(\mathbf{A})| = 1$.

Jos $\mathbf{B}$ on mielivaltainen $n \times n-$matriisi, niin

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{A}, \tag{140}$$

missä $\mathbf{H}$ on hermiittinen ja $\mathbf{A}$ on antihermiittinen ja

$$\mathbf{H} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{B}^\dagger) \qquad \mathbf{A} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{B}^\dagger). \tag{141}$$

Lisäksi voidaan osoittaa, että:

Lause | Hermiittisen, antihermiittisen ja unitaarisen $n \times n-$matriisin ominaisvektoreista $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ voidaan muodostaa $\mathbb{C}^n$:n ortonormitettu kanta, jolle $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$.

Lause | Hermiittisen ja antihermiittisen matriisin eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat ortogonaaliset.

Nyt spektraalilause saa muodon (vrt. sivu 60)

Lause | $\mathbf{A}$:n diagonalisoi unitaarinen matriisi $\mathbf{U}$
$\Leftrightarrow \ \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} \ \Leftarrow \ \mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$.

8.4. Hermiittiset neliömuodot

Määritelmä

Funktio $q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ on hermiittinen neliömuoto, jos

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{x}^\dagger \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \sum_{ij} x_i^* a_{ij} x_j, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (142)$$

missä kerroinmatriisi $\mathbf{A}$ on hermiittinen $n \times n-$neliömatriisi.

Similariteettimuunnoksen ($\mathbf{U}$ on unitaarimatriisi: $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger$)

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

tuottamat uudet koordinaatit ovat

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{y},$$

joten

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \mathbf{x}^\dagger \mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{U}\mathbf{y})^\dagger \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{y}^\dagger \mathbf{U}^\dagger \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{y}^\dagger \mathbf{D}\mathbf{y} \\ &= \lambda_1 |y_1|^2 + \lambda_2 |y_2|^2 + \ldots + \lambda_n |y_n|^2. \end{aligned}$$

Täten olemme saaneet hermiittisen neliömuodon pääakseliesityksen eli kanonisen muodon

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i^* a_{ij} x_j$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |y_i|^2 \equiv Q(y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{143}$$

missä λ_i:t ovat alkuperäisen kerroinmatriisin **A** ominaisarvot.

Pääakselimuodosta, muistaen hermiittisen matriisin ominaisarvot reaalisiksi, seuraa, että $q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$.

Huom Neliömuodot ovat hyvä esimerkki siitä, että ominaisarvot ja ominaisvektorit tavoittavat jotain **A**:lle ja sitä vastaavalle lineaarikuvaukselle ominaista/karakteristista.

Huom Hermiittisten matriisien ominaisarvojen reaalisuus on oleellista kvanttimekaniikassa: hermiittisiä operaattoreita vastaavat fysikaaliset observaabelit ovat reaalisia.

9. Ortogonaalisista funktiojoukoista

9.1. Funktioavaruus ja funktioiden sisätulo

Olkoon aluksi annettu n funktiota $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, joiden määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$:n väli, $\varphi_i : [a, b] \to \mathbb{C}$. Oletetaan funktiot φ_i lineaarisesti riippumattomiksi, jolloin ne muodostavat kannan joukolle $\mathcal{V}$, jonka 'vektorit' $f(x)$ ovat lineaarikombinaatioita

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x), \tag{144}$$

missä kertoimet $c_i \in \mathbb{C}$. Selvästikin tämän joukon asukit $f, g, h \in \mathcal{V}$ toteuttavat luvun §5.1 vaatimukset, esimerkiksi

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &\in \mathcal{V} \\ cf(x) &\in \mathcal{V} \\ f(x) + g(x) &= g(x) + f(x) \\ (f(x) + g(x)) + h(x) &= f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Täten $\mathcal{V}$ on vektoriavaruus, jonka dimensio on n. Tällöin

$$(f, g) = \int_a^b f^*(x)g(x)w(x)dx, \tag{145}$$

missä $w(x)$ on valittu painofunktio [esim. $w(x) = 1$], toteuttaa luvun §8.1 kompleksisen sisätulon vaatimukset.

Kantafunktiojoukko $\{\varphi_i\}$ on ortogonaalinen, jos

$$(\varphi_i, \varphi_j) = 0, \text{kun } i \neq j. \tag{146}$$

Jos tämän lisäksi $||\varphi_i|| = 1 \; \forall \; i$, missä normi $||f|| = \sqrt{(f, f)}$, on $\{\varphi_i\}$ ortonormitettu:

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}. \tag{147}$$

Huom Fysikaalisesta sovelluksesta riippuen rajataan funktioiden ominaisuuksia esim. välin $[a, b]$ päätepisteissä (tai väli voi olla myös $[-\infty, \infty]$) siten, niillä on päätepisteissä tietyt arvot ja varmistetaan, että tarvittavat integraalit suppenevat.

9.2. Joitakin ortogonaalisia funktiojoukkoja

Suuri harppaus: On uskottavaa (ei triviaalia), että edelläoleva on yleistettävissä ääretönulotteiseen tapaukseen. Lisäksi funktiot φ_i (ja siten f) voivat olla kahden tai useamman muuttujan funktioita.

Sen osoittaminen, että jokin funktiojoukko todella virittää esim. kaikkien neliöintegroituvien funktioiden muodostaman avaruuden (täydellisyys), jää seuraavalle kurssille. Tällä kurssilla kuitenkin kuuluu esitellä joitakin ortogonaalisia funktiojoukkoja:

Trigonometriset funktiot (alla $n, m = 1, 2, 3, \ldots$)

$$\int_0^\pi \cos nx \, \cos mx = \frac{\pi}{2}\delta_{nm} \qquad \int_0^\pi \sin nx \, \sin mx = \frac{\pi}{2}\delta_{nm}$$

Legendren polynomit

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x \qquad P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x) - [xP_n(x) - P_{n-1}(x)]/(n+1)$$

ovat ortogonaalisia, integroimisvälinä $[-1, 1]$.

Palloharmoniset funktiot

Pyörimismäärän **L** kvanttimekaaninen tarkastelu pallokoordinaateissa johtaa funktioihin, joiden yleinen lauseke voitaisiin kirjoittaa Legendren polynomien $P_n(x)$ avulla; alla niistä esimerkkeinä alimpia kvanttitiloja vastaavat:

$$Y_{00}(\theta,\phi) = 1/\sqrt{4\pi} \qquad Y_{10}(\theta,\phi) = \sqrt{3/4\pi}\cos\theta$$

$$Y_{1,\pm 1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{3/8\pi}\sin\theta\, e^{\pm i\phi}, \ldots$$

Nämä ovat ortonormitettuja:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y^*_{lm}(\theta,\phi) Y_{l'm'}(\theta,\phi) d\theta d\phi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}.$$

Funktiot Y_{lm} ovat pyörimismääräoperaattoreiden ominaisfunktioita (tavallisesti z-akseli valitaan kvantitusakseliksi) seuraavasti:

$$\mathbf{L}^2 Y_{lm} = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm} \qquad L_z Y_{lm} = \hbar m Y_{lm},$$

mistä ominaisarvot voidaan suoraan lukea (ks. fysa106 ja fysa235).