Johdatus matematiikkaan

Luento 1

Mikko Salo

30.8.2017

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
UNIVERSITY OF JYVÄSKYLÄ

Sisältö

Kurssista

Johdatus matematiikkaan –kurssin tavoitteita:

- toimia *siltana* lukio-opinnoista yliopistomatematiikkaan
- esitellä *matemaattisen päättelyn perusteita*
- esitellä matematiikkaa tieteenalana ja *motivoida jatkamaan opintoja*

Kysymykset luennoilla ovat sallittuja ja toivottuja!

Kurssimateriaali

Pääasiallinen kurssimateriaali koostuu näistä luentokalvoista ja harjoitustehtävistä. Nämä tulevat kurssin kotisivulle.

Oheismateriaalia:

- Juutinen: Johdatus matematiikkaan (2014)
- Käenmäki: Johdatus matematiikkaan (2005)
- Franklin, Dauoud: Proof in Mathematics
- Hammack: Book of Proof

Kurssin tietoja löytyy kurssin kotisivuilta:

- Korppi: kurssin perustiedot
- Koppa: luentokalvot ja harjoitustehtävät

Kurssin rakenne

Kurssin laajuus 3 op ($\approx$ 79 h työskentelyä):

Luennot	18 h
Laskuharjoitukset	8 h
Itsenäinen opiskelu	40 h
Tenttiin valmistautuminen	9 h
Tentti	4 h
Yhteensä	79 h

Itsenäistä opiskelua $\approx$ 4 h / kontaktipäivä!

Matematiikkaa oppii vain laskemalla!

Tukea opiskeluun

Laskuharjoitukset (opettajatutor, 4 x 2 h)

- tehtävien oikeat ratkaisut, selitetään vaikeita kohtia

Laskuryhmä (luennoija, 4 x 2 h)

- voi tulla laskemaan tai kysymään tehtävistä

Kummiopettaja

- säännölliset tapaamiset

Ratkomo (ma, ti, to klo 14-18)

- yhteistä harjoitusten laskemista ja ohjausta

WE WANT TO HELP YOU!

Sisältö

Matematiikka

Tämän kurssin tarkoituksena on houkutella kuulijoita sukeltamaan matematiikan ihmeelliseen maailmaan.

Tällä kurssilla annetaan näytteitä matemaattisesta päättelystä. Jotkut periaatteet ovat opittavissa, mutta tärkeintä on saada kosketus matemaattiseen ajattelumaailmaan.

Tämän kurssin aiheita käsitellaan syvemmin mm. kursseilla Todistamisen perusteet ja Logiikka.

Matematiikka

Matematiikka on deduktiivinen tiede, jossa tosista premisseistä eli lähtökohdista tai ehdoista seuraa tosi johtopäätös. Koulumatematiikassa opitaan lähinnä keinoja laskea asioita ja (mahdollisesti) soveltaa annettuja kaavoja tms. Kun tekniikat monimutkaistuvat, tulee tarpeelliseksi ymmärtää niiden takana olevia käsitteitä ja periaatteita.

Matematiikan opinnoissa tarkoitus on oppia ymmärtämään laajemmin matemaattisia rakenteita ja ymmärtämään, miksi ne ovat tosia. Samalla opitaan myös tieteessä käytettävä täsmällinen argumentointitapa.

Toisaalta matematiikan opintojen aikana on tarkoitus tutustua eräisiin (mm. sovellusten kannalta) keskeisiin matematiikan teorioihin, jolta pohjalta tulee mahdolliseksi luoda uutta tietoa.

Matematiikka

Matematiikka on olemukseltaan teoreettista, vaikka monet kysymyksenasettelut lähtevät käytännöllisistä (tai muiden tieteiden esiinnostamista) ongelmista. Matematiikka sovelletaan lukuisissa eri kohteissa emmekä yleensä ajattele, että monet arkipäiväiset laitteet toimivat, koska on kehitetty tiettyjä matematiikan teorioita. (Älypuhelimet, tietokoneet, Google, kuvankäsittely, salausmenetelmät, ...)

Ennen kunnollista soveltamista on ymmärrettävä itse matematiikkaa.

Matematiikan voi ajatella olevan eräänlainen kieli. Opintojen alussa menee yleensä jonkin verran aikaa, ennen kuin uuden kielen käyttö omaksutaan (vrt. kiinan kielen opiskelu).

Esimerkki 1

Matemaattisen päättelyn tunnusmerkkejä ovat: *varmuus* ja *täsmällisyys*. Kuinka "todistat" väitteen:

$$\frac{1}{1\,000} - \frac{1}{1\,001} < \frac{1}{1\,000\,000}?$$

Tarkistetaan laskimella?

Onko tulos luotettava? Voitko varmasti luottaa laskutarkkuuteen?

Entä väite:

$$\frac{1}{1000000} - \frac{1}{1000001} < \frac{1}{1000000000000}?$$

Esimerkki 1

Ensimmäinen saadaan helposti laskemalla:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\,000} - \frac{1}{1\,001} &= \frac{1\,001}{1\,000 \cdot 1\,001} - \frac{1\,000}{1\,000 \cdot 1\,001} \\ &= \frac{1\,001 - 1\,000}{1\,001\,000} \\ &= \frac{1}{1\,001\,000} < \frac{1}{1\,000\,000}\end{aligned}$$

koska $1\,001\,000 > 1\,000\,000$. Tarkastellaan laskua:

1. Tehdään samannimisiksi.
2. Yhdistetään osoittajat.
3. Sievennetään.
4. Huomataan, että $1\,001\,000 > 1\,000\,000$.

Esimerkki 1

- Todistus on väitteen yksityiskohtainen perustelu. Jokainen askel on niin selvästi perusteltu, että lukija/kuulija voi vakuuttua väitteen paikkansapitävyydestä.

Toinen todistus (nimittäjää ei kerrota auki):

$$\frac{1}{1\,000} - \frac{1}{1\,001} = \frac{1\,001 - 1\,000}{1\,000 \cdot 1\,001} < \frac{1}{1\,000 \cdot 1\,000} = \frac{1}{1\,000\,000}$$

koska $1\,001 > 1\,000$. Yleistyy helposti:

$$\frac{1}{1000000} - \frac{1}{1000001} = \frac{1000001 - 1000000}{1000000 \cdot 1000001} < \frac{1}{1000000 \cdot 1000000}.$$

Esimerkki 1

Edellisellä tavalla saadaan yleinen väite: jos n on mikä hyvänsä positiivinen kokonaisluku, niin

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$$

sillä $n(n+1) > n^2$.

- Samalle väitteelle voi olla useita erilaisia todistuksia.
- Todistus voi johtaa ilmiön syvälliseen ymmärtämiseen, jolloin taustalla oleva yleinen periaate paljastuu.

Esimerkki 2

Osoita, että

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 = 5\,050.$$

Sievennys ei auta, laskimella laskeminen vaatisi työtä...
Ryhmitellään luvut uudelleen:

$$\begin{aligned}
&1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 \\
&= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (50 + 51) \\
&= 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 \qquad \text{(50 kertaa)} \\
&= 50 \cdot 101 = 5\,050.
\end{aligned}$$

- Todistus on helppo ymmärtää, muttei aina helppo löytää!
- Todistuksen löytäminen vaatii usein sekä opittuja työkaluja (sieventäminen, induktio, ...) että luovuutta.

Esimerkki 3

Osoita, että[1]

$$\sqrt[8]{8!} < \sqrt[9]{9!}$$

Yritetään löytää todistus. Yksinkertaistetaan lauseketta korottamalla potenssiin $8 \cdot 9 = 72$ (juuret häviävät):

$$(8!)^9 < (9!)^8$$

Ei vielä ratkennut. Kirjoitetaan potenssit auki:

$$\underbrace{(8!)(8!)\dots(8!)}_{\text{9 kertaa}} < \underbrace{(9!)(9!)\dots(9!)}_{\text{8 kertaa}}$$

Nyt huomataan, että $9! = (8!) \cdot 9$. Tästä saadaan

$$\underbrace{(8!)(8!)\dots(8!)}_{\text{9 kertaa}} < \underbrace{(8!)(8!)\dots(8!)}_{\text{8 kertaa}} \cdot 9^8$$

[1]Kertoma: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

Esimerkki 3

Edellä saatiin

$$(8!)^9 < (8!)^8 \cdot 9^8$$

Jakamalla luvulla $(8!)^8$ saadaan

$$8! < 9^8, \qquad \text{eli} \qquad 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 8 < \underbrace{9 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 9}_{\text{8 kertaa}}.$$

Tämä on totta, sillä vertailemalla tuloja tekijä tekijältä oikealla puolella esiintyy aina suurempi tekijä kuin vasemmalla.

Onko väite $\sqrt[8]{8!} < \sqrt[9]{9!}$ nyt todistettu? Ei ole! Osoitimme että:

Jos $\sqrt[8]{8!} < \sqrt[9]{9!}$, niin $8! < 9^8$, mikä on tosi.

Esimerkki 3

- Todistusta etsitään usein kokeilemalla erilaisia asioita suttupaperilla. Lopuksi varsinainen todistus kirjoitetaan siististi ylös, usein ”käänteisessä järjestyksessä”.

Väite. $\sqrt[8]{8!} < \sqrt[9]{9!}$

Todistus. Koska $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 8 < 9^8$, pätee

$$8! < 9^8$$

Kertomalla molemmat puolet luvulla $(8!)^8$ saadaan

$$(8!)^9 < ((8!) \cdot 9)^8 = (9!)^8.$$

Korottamalla molemmat puolet potenssiin $\frac{1}{72}$ saadaan väite

$$\sqrt[8]{8!} < \sqrt[9]{9!}. \qquad \square$$

Esimerkki 4

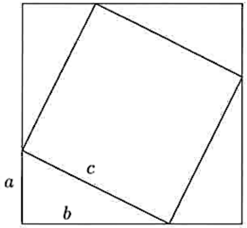
Pythagoraan lause

Suorakulmaiselle kolmiolle pätee

$$a^2 + b^2 = c^2$$

missä a ja b ovat kateettien pituudet, ja c on hypotenuusan pituus.

Klassinen lause ($\sim$ 500 e.Kr.), noin 400 tunnettua todistusta. Geometrisissa (ja muissakin) todistuksissa hyvät kuvat ovat oleellisia! Apukuva:



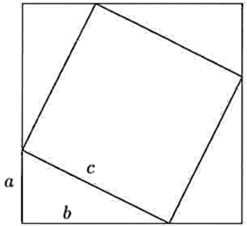
Esimerkki 4

Lause. $a^2 + b^2 = c^2$

Todistus. Apukuvan ison neliön pinta-ala on $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Neljän kolmion + yhden neliön ala on puolestaan $4\frac{ab}{2} + c^2$. Täten

$$a^2 + 2ab + b^2 = 4\frac{ab}{2} + c^2.$$

Tästä saadaan väite $a^2 + b^2 = c^2$. $\square$



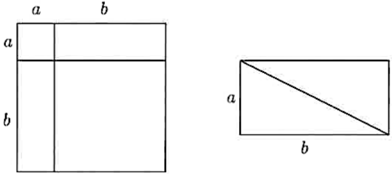
Esimerkki 4

Todistuksessa käytettiin binomin neliökaavaa

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

sekä suorakulmaisen kolmion alan kaavaa $A = \frac{1}{2}ab$.

Nämäkin voidaan perustella:

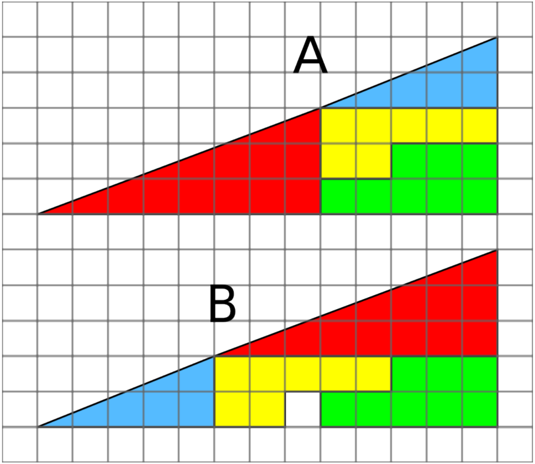


Voisi edelleen kysyä, miksi suorakulmion ala on sivujen tulo tms. Näin jatkamalla päästään tilanteeseen, jossa jokainen välivaihe on perusteltavissa aksioomilla (perusoletuksilla).

Tämän kurssin päättelyt perustuvat tunnettuihin ominaisuuksiin.

Esimerkki 4

Kuvien kanssa on syytä olla huolellinen:



Mikä menee vikaan? (Vihje: hakusana ”Curry triangle”.)

Matematiikka tieteenalana ja yhteiskunnassa

Mikko Salo

30.8.2017

Osa kalvoista: Mikko Parviainen

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
UNIVERSITY OF JYVÄSKYLÄ

Matematiikka

”Mathematics is the study of quantity, structure, space, and change.”

”Mathematicians seek out patterns and use them to formulate new conjectures. Mathematicians resolve the truth of falsity of conjecture by mathematical proof.”

- Wikipedia, 2017

Matematiikka

“Mathematics, the science of structure, order, and relation that has evolved from elemental practices of counting, measuring, and describing the shapes of objects.”

” Mathematics has been an indispensable adjunct to the physical sciences and technology … and in the quantitative aspects of the life sciences.”

- Encyclopedia Britannica, 2017

Matematiikka

- Luonnontieteiden kieli
- Tutkii abstrakteja rakenteita
- Eksakti ja universaali tiede

”A mathematician is a device for turning coffee into theorems.”

- Paul Erdös

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
UNIVERSITY OF JYVÄSKYLÄ

Matematiikan luonteesta

Cédric Villani (Fieldsin mitali 2010)
TED talk: *What’s so sexy about math?*

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

- **10 professoria**

- **5 akatemiatutkijan projektia**
- **2 European Research Council (ERC) –projektia**
- **2 Suomen akatemian tutkimuksen huippuyksikköä**

Opintoja tukevia toimenpiteitä 2017

- 1. vuonna:
  - Calculus / Johdatus matemaattiseen analyysiin
- Kummiopettajatoiminta
- Ratkomo

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
UNIVERSITY OF JYVÄSKYLÄ

Tutkimuksen ja opetuksen pääalat

- Matemaattinen analyysi
  - Osittaisdifferentiaaliyhtälöt
  - Geometrinen analyysi
  - Inversio-ongelmat
- Opettajakoulutus
- Stokastiikka
- Tilastotiede

Opettajat
– Lukiot, peruskoulut, ammattioppilaitokset
– Yliopistot ja ammattikorkeakoulut

Tutkijat
– Yliopistot
– Valtion tutkimuslaitokset (VTT, THL, Tilastokeskus)
– Yritykset

Monipuoliset työmahdollisuudet

Asiantuntijat
– Logistiikka
– Teollisuus
– Rahoitusala (pankit, eläkeyhtiöt, sijoitusyhtiöt)
– Vakuutusala

Opettajat

- aineenopettajan pätevyyden antava FM-tutkinto
- Matematiikan opinnot + pedagogiset ja muiden opetettavien aineiden opinnot
- opiskelijavalinnan yhteydessä (suoravalinta) tai myöhemmässä vaiheessa

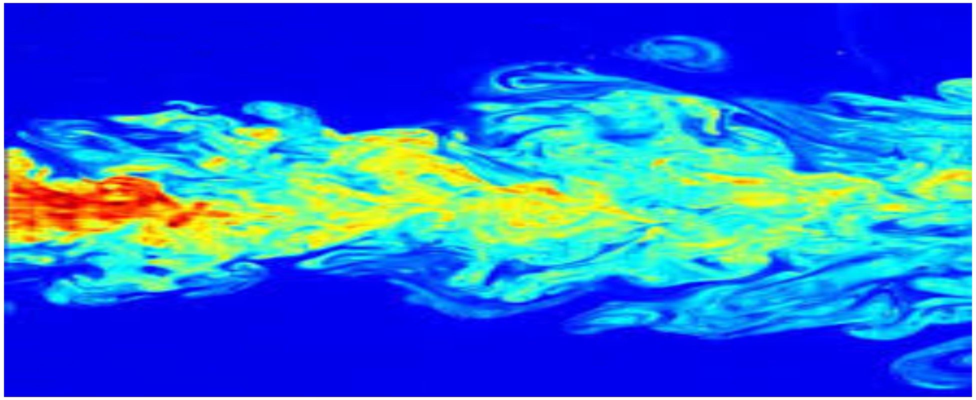
Tutkijat

Navier-Stokesin osittaisdifferentiaaliyhtälöt: ratkaisun olemassaolo ja säännöllisyys

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x,t)$$

$$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

Clay Mathematics Institute 1 000 000 $ palkintotehtävä

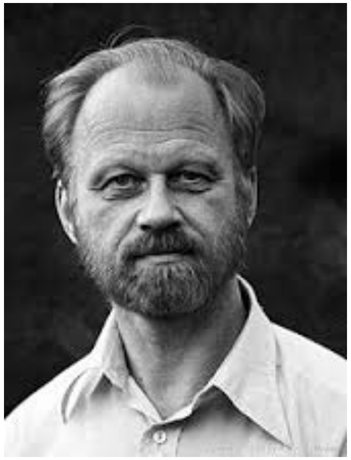


Hilbertin 19. ja 20. ongelma

Onko tietyillä osittaisdifferentiaaliyhtälöillä aina sileä ratkaisu?

Ennio De Giorgi
1928-1996

John Nash
1928-2015

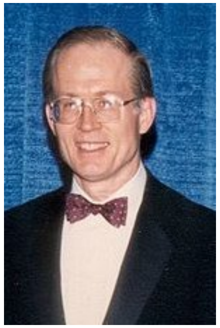


Jürgen Moser
1928-1999

Optioiden hinnoittelu

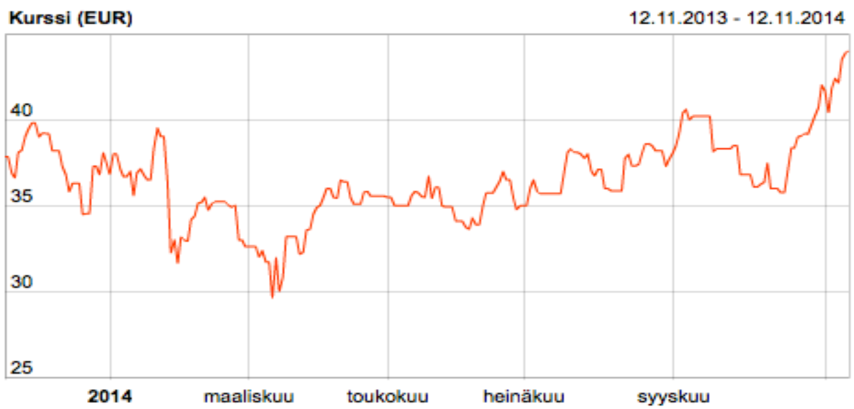
Norbert Wiener
1894-1964

Kiyoshi Itō
1915-2008



Fisher Black
1938-1995

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$



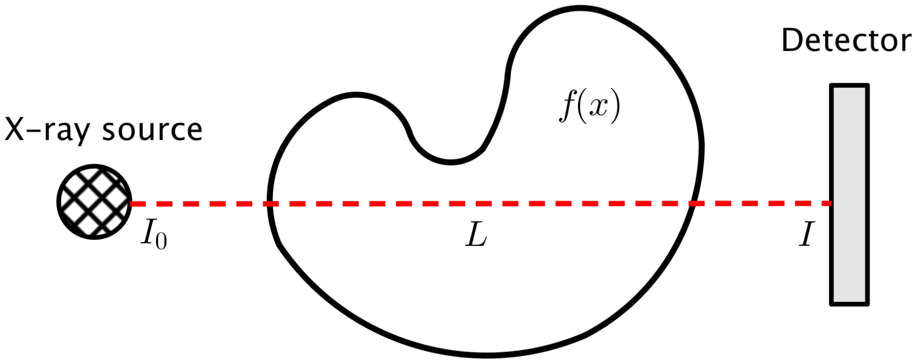
Myron Scholes
Platinum Grove

Robert C. Merton
MIT

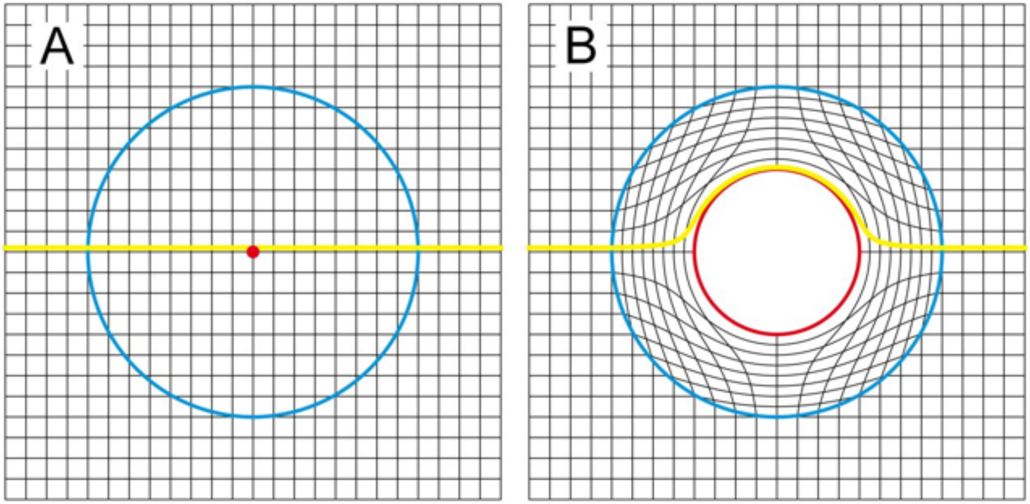
JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
UNIVERSITY OF JYVÄSKYLÄ

Inversio-ongelmat

Matemaattisia menetelmiä lääketieteelliseen kuvantamiseen



Näkymättömyys



Miten Harry Potterin näkymättömyysviitta voitaisiin oikeasti rakentaa?

Työvertailu 2014

WALL STREET JOURNAL

"The best jobs of 2014"
(200 rated jobs)

Kriteerit

- ✓ Stressi
- ✓ Työympäristö
- ✓ Fyysinen vaativuus
- ✓ Palkka
- ✓ Kehitysmahdollisuudet

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
UNIVERSITY OF JYVÄSKYLÄ

Best Jobs of 2014: 1. Mathematician

BLS Median Annual Salary: $101,360

Projected Job Growth by 2022: 23%

Jobs Rated Score (the lower the better): 63

Careers in mathematics are diverse and rewarding. Mathematicians rank among the more well-compensated in the 2014 Jobs Rated report. The field also has a positive outlook for continued future growth.

Esitehtävä huomiselle

Tutustu Petri Juutisen luentomonisteen "Johdatus matematiikkaan" lukuun 2.3.1