Johdatus matematiikkaan

Luento 2

Mikko Salo

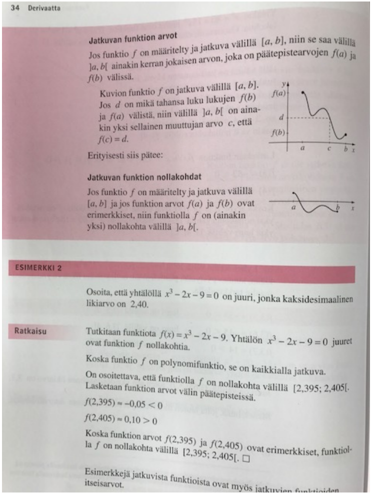
31.8.2017

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
UNIVERSITY OF JYVÄSKYLÄ

Sisältö

1. Matemaattisen tekstin osia
2. Ongelmanratkaisua
3. Matematiikan rakenteesta

Matemaattinen teksti


34 Derivaatta

Jatkuvan funktion arvot

Jos funktio f on määritelty ja jatkuva välillä $[a, b]$, niin se saa välillä $]a, b[$ ainakin kerran jokaisen arvon, joka on päätepistearvojen $f(a)$ ja $f(b)$ välissä.

Kuvion funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$. Jos d on mikä tahansa luku lukujen $f(b)$ ja $f(a)$ välistä, niin välillä $]a, b[$ on ainakin yksi sellainen muuttujan arvo c, että $f(c) = d$.

Erityisesti siis pätee:

Jatkuvan funktion nollakohdat

Jos funktio f on määritelty ja jatkuva välillä $[a, b]$ ja jos funktion arvot $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset, niin funktiolla f on (ainakin yksi) nollakohta välillä $]a, b[$.

ESIMERKKI 2

Osoita, että yhtälöllä $x^3 - 2x - 9 = 0$ on juuri, jonka kaksidesimaalinen likiarvo on 2,40.

Ratkaisu

Tutkitaan funktiota $f(x) = x^3 - 2x - 9$. Yhtälön $x^3 - 2x - 9 = 0$ juuret ovat funktion f nollakohtia.

Koska funktio f on polynomifunktio, se on kaikkialla jatkuva.

On osoitettava, että funktiolla f on nollakohta välillä $[2{,}395; 2{,}405[$. Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä.

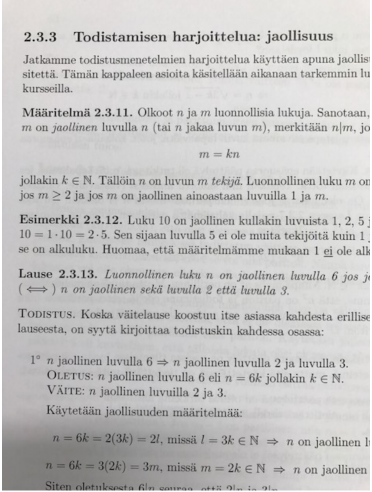
$f(2{,}395) \approx -0{,}05 < 0$

$f(2{,}405) \approx 0{,}10 > 0$

Koska funktion arvot $f(2{,}395)$ ja $f(2{,}405)$ ovat erimerkkiset, funktiolla f on nollakohta välillä $[2{,}395; 2{,}405[$. □

Esimerkkejä jatkuvista funktioista ovat myös jatkuvien funktioiden itseisarvot.

Pitkä matematiikka


2.3.3 Todistamisen harjoittelua: jaollisuus

Jatkamme todistusmenetelmien harjoittelua käyttäen apuna jaollis
sitettä. Tämän kappaleen asioita käsitellään aikanaan tarkemmin lu
kursseilla.

Määritelmä 2.3.11. Olkoot n ja m luonnollisia lukuja. Sanotaan,
m on *jaollinen* luvulla n (tai n jakaa luvun m), merkitään $n|m$, jo

$$m = kn$$

jollakin $k \in \mathbb{N}$. Tällöin n on luvun m *tekijä*. Luonnollinen luku m on
jos $m \geq 2$ ja jos m on jaollinen ainoastaan luvuilla 1 ja m.

Esimerkki 2.3.12. Luku 10 on jaollinen kullakin luvuista 1, 2, 5 j
$10 = 1 \cdot 10 = 2 \cdot 5$. Sen sijaan luvulla 5 ei ole muita tekijöitä kuin 1 j
se on alkuluku. Huomaa, että määritelmämme mukaan 1 ei ole alk

Lause 2.3.13. *Luonnollinen luku n on jaollinen luvulla 6 jos j
($\Longleftrightarrow$) n on jaollinen sekä luvulla 2 että luvulla 3.*

TODISTUS. Koska väitelause koostuu itse asiassa kahdesta erillise
lauseesta, on syytä kirjoittaa todistuskin kahdessa osassa:

1° n jaollinen luvulla 6 $\Rightarrow$ n jaollinen luvulla 2 ja luvulla 3.
OLETUS: n jaollinen luvulla 6 eli $n = 6k$ jollakin $k \in \mathbb{N}$.
VÄITE: n jaollinen luvuilla 2 ja 3.
Käytetään jaollisuuden määritelmää:

$$n = 6k = 2(3k) = 2l, \text{ missä } l = 3k \in \mathbb{N} \Rightarrow n \text{ on jaollinen l}$$

$$n = 6k = 3(2k) = 3m, \text{ missä } m = 2k \in \mathbb{N} \Rightarrow n \text{ on jaollinen}$$

Siten oletuksesta $6|n$ seuraa, että $2|n$ ja $3|n$

Yliopiston luentomoniste

Matemaattinen teksti

Matematiikka on luonnontieteiden kieli. Opintojen alussa menee yleensä aikaa, ennen kuin uuden kielen käyttö omaksutaan (vrt. kiinan kielen opettelu).

Matemaattisen tekstin osia ovat mm.

- *määritelmät*
- *esimerkit*
- *väitteet* (lause / teoreema / propositio / lemma)
- *todistukset*
- symbolit, aksioomat, konjektuurit, kuvat, numeeriset esimerkit, ...

Määritelmät

Määritelmä antaa lyhyen nimen matemaattiselle käsitteelle. Usein määritelmässä annetaan myös sisältö symbolille.

Esimerkkimääritelmä 1

Reaaliluku x on *rationaaliluku*, jos se voidaan kirjoittaa muodossa $x = \frac{m}{n}$ joillekin kokonaisluvuille m ja n, missä $n \geq 1$.

Esimerkkimääritelmä 2

Reaaliluvun x *itseisarvo* on luku

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Määritelmät ovat yksi tärkeimmistä matemaattisen kielen osista. Ne on syytä omaksua kirjaimellisesti!

Esimerkit

Matemaattiset määritelmät ja väitteet saattavat (aluksi!) näyttää vaikeasti omaksuttavilta. Niitä on usein hyödyllistä lähestyä esimerkkien (ja vastaesimerkkien) kautta.

Määritelmä

Kokonaisluku n on *jaollinen* positiivisella kokonaisluvulla m, jos

$$n = km$$

jollekin kokonaisluvulle k. (Merkitään $m|n$.) Luku $n \geq 2$ on *alkuluku*, jos se on jaollinen ainoastaan luvuilla 1 ja n.

Esimerkki

- Luku 12 on jaollinen luvulla 3 (sillä $12 = 4 \cdot 3$).
- Luku 10 ei ole jaollinen luvulla 3 (sillä jos $10 = k \cdot 3$, niin $k = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$, mikä ei ole kokonaisluku).
- Luku 11 on alkuluku (se on jaollinen vain luvuilla 1 ja 11).

Lauseet

Väitteissä eli *lauseissa* pyritään ilmaisemaan yleinen tosiseikka. Lauseet ovat monesti esimerkiksi muotoa

"Jos oletus P on voimassa, niin ominaisuus Q on totta."

"Kaikille x, jotka toteuttavat ehdon $P(x)$, pätee $Q(x)$."

Matemaattisessa tekstissä esiintyy monennimisiä lauseita:

- *Lause* (teoreema): päätulos tai tärkeä lause
- *Propositio*: vähempiarvoinen, mutta itsessään kiinnostava lause
- *Lemma* (apulause): lauseen tai proposition todistuksessa hyödynnettävä tulos
- *Korollaari* (seurauslause): lause, joka seuraa suoraan toisesta lauseesta

Lauseet

Esimerkkilause (Kolmioepäyhtälö)

Kaikille reaaliluvuille a ja b pätee

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Esimerkkipropositio

Jos a ja b ovat reaalilukuja, niin pätee

$$2ab \leq a^2 + b^2.$$

Esimerkkilemma

Jokaiselle reaaliluvulle x pätee

$$x \leq |x|.$$

Todistukset

- Todistus on väitteen yksityiskohtainen perustelu. Jokainen askel on niin selvästi perusteltu, että lukija/kuulija voi vakuuttua väitteen paikkansapitävyydestä.

Propositio. Jos a ja b ovat reaalilukuja, niin pätee

$$2ab \leq a^2 + b^2.$$

Väite voidaan kirjoittaa muodossa $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$.
Huomataan, että vasen puoli on binomin neliö[1].

Todistus. Kaikille reaaliluvuille a, b pätee $(a - b)^2 \geq 0$.
Binomin neliökaavan nojalla tästä seuraa

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0.$$

Lisäämällä molemmille puolille $2ab$ saadaan $a^2 + b^2 \geq 2ab$. $\square$

[1] $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Todistukset

Lemma

Jokaiselle reaaliluvulle x pätee $x \leq |x|$.

Todistus.

Tapaus 1. $x \geq 0$. Tällöin $|x| = x$, ja selvästi

$$x = |x| \leq |x|.$$

Tapaus 2. $x < 0$. Tällöin $|x| = -x$, ja saadaan

$$x < 0 < -x = |x|.$$

Siis väite "$x \leq |x|$" on tosi kaikille reaaliluvuille x. $\square$

Todistukset

Lause (Kolmioepäyhtälö)

Kaikille reaaliluvuille a ja b pätee

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Kuten lemman todistuksessa, voitaisiin jakaa osatapauksiin:

- $a \geq 0, b \geq 0$
- $a < 0, b \geq 0, a+b \geq 0$
- $a < 0, b \geq 0, a+b < 0$
- $a \geq 0, b < 0, a+b \geq 0$
- $a \geq 0, b < 0, a+b < 0$
- $a < 0, b < 0$

(Kattavatko kaikki tapaukset?) Näin saataisiin työläs todistus lauseelle.

Todistukset

Lyhyempi todistus saadaan käyttäen lemmaa ($x \leq |x|$):

Lause. Kaikille reaaliluvuille a ja b pätee

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Todistus.
Tapaus 1: $a + b \geq 0$. Tällöin lemman nojalla

$$|a + b| = a + b \leq |a| + b \leq |a| + |b|.$$

Tapaus 2: $a + b < 0$. Nyt

$$|a + b| = -a - b \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|.$$

Tässä käytettiin itseisarvon määritelmää ja lemmaa. $\square$

Konjektuurit

Matematiikassa tunnetaan useita väitteitä, ns. konjektuureja, joita ei ole vielä pystytty todistamaan (tai osoittamaan vääräksi).

Goldbachin konjektuuri. (Goldbach 1742) Jokainen parillinen luku $n \geq 2$ on kahden alkuluvun summa.

Riemannin hypoteesi. (Riemann 1859) Riemannin ζ-funktion

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

ei-reaaliset nollakohdat ovat muotoa $s = \frac{1}{2} + it$, t reaaliluku.

Symbolit

Matemaattisen kielen tehokkuus perustuu osittain siihen, että monimutkaisia käsitteitä voidaan kuvata lyhyesti symboleilla.

Erityisen hyödyllisiä ovat kreikkalaiset aakkoset:

Sisältö

Ongelmanratkaisua

Seuraavaksi käydään läpi muutamia ohjeita matemaattisten ongelmien ratkaisuun ja todistusten löytämiseen, käyttäen apuna shakkilautaesimerkkiä.

Parhaiten näitä asioita oppii tekemällä ja harjoittelemalla:

Matematiikkaa oppii vain laskemalla!

Ongelmanratkaisua

G. Pólya esitteli kirjassaan "How to Solve It?" (1945) seuraavat askeleet matemaattisen ongelman ratkaisuun:

1. *Ymmärrä ongelma.*
2. *Tee suunnitelma.*
3. *Toteuta suunnitelma.*
4. *Arvioi ratkaisuasi.* Voisiko sitä parantaa?

Ongelmanratkaisua

Ongelma

Tarkastele neliön muotoista $n \times n$ ruudukkoa (n riviä ja n saraketta). Leikataan kaksi ruutua pois, vastakkaisista kulmista yksi. Tehtävänä on täyttää jäljelle jäänyt ruudukko kahden ruudun suorakaiteilla (1×2 ”dominolaatoilla”). Kuinka onnistuu? Vai onnistuuko lainkaan?

Ongelmanratkaisua

1. Ymmärrä ongelma.

Kokeillaan ensin pieniä arvoja ($n = 2, 3, 4$).

Melko nopeasti huomaamme, että kaksiruutuiset palikat peittävät yhteensä parillisen määrän ruutuja. Täten $n^2 - 2$ on parillinen ja siten myös n^2 on parillinen. Siis myös luvun n tulee olla parillinen. SEIS! Onko näin todella? Ymmärrämmekö tämän täysin?

Tässä vaiheessa matemaatikko määrittelee mitä parillisuudella tarkoitetaan:

Määritelmä

Kokonaisluku n on parillinen, jos on olemassa sellainen kokonaisluku k, jolle $n = 2k$.

Ongelmanratkaisua

Määritelmä

Kokonaisluku n on parillinen, jos $n = 2k$ jollekin kokonaisluvulle k. Luku n on pariton, jos $n = 2k + 1$ jollekin kokonaisluvulle k.[1]

Lisäksi tarvitsimme tietoa, että ”kaksiruutuiset palikat peittävät yhteensä parillisen määrän ruutuja”. (Onko tämä totta?) On, se seuraa parillisuuden määritelmästä. Siis $n^2 - 2$ on parillinen. Seuraava askel: onko myös n parillinen? On, palaamme siihen pian.

Mitä olemme saaneet selville alkuperäisen ongelman ratkaisemiseksi? Arvaamme, että peitto ei onnistu parittomilla n. Onnistuisiko parillisilla n?

[1] Jokainen kokonaisluku on joko parillinen tai pariton (ei molempia).

Ongelmanratkaisua

2. Tee suunnitelma

Huomaamme, että parillisuus ja parittomuus voivat olla hyödyksi ongelman ratkaisussa. Laudassa, josta on poistettu kulmat, on $n^2 - 2$ ruutua. Jos kaksiruutuisia palikoita on k kappaletta, ne peittävät $2k$ ruutua. Jaetaan tarkastelu kahteen osaan:

n **pariton.** Arvaamme, että peittäminen ei onnistu, kun n on pariton. Yritetään osoittaa, että jos n on pariton, niin $n^2 - 2$ on pariton. Tällöin $n^2 - 2$ ei voi olla muotoa $2k$ kokonaisluvulle k.

n **parillinen.** Huomataan, että tällöin sekä $n^2 - 2$ että $2k$ ovat parillisia, joten täytyy kokeilla jotain muuta. Yritetään käyttää shakkilaudan ruutujen väriä.

Ongelmanratkaisua

3. Toteuta suunnitelma

Käsitellään tapaus, jossa n on pariton. Täytyy osoittaa:

Väite. Jos n on pariton, niin $n^2 - 2$ on pariton.

Todistus. Olkoon n pariton. Tällöin $n = 2k + 1$ jollekin kokonaisluvulle k. Lasketaan $n^2 - 2$ käyttämällä binomin neliökaavaa[1]:

$$\begin{aligned} n^2 - 2 &= (2k+1)^2 - 2 = (2k)^2 + 2 \cdot (2k) \cdot 1 + 1^2 - 2 \\ &= 4k^2 + 4k - 1 = 2(2k^2 + 2k - 1) + 1. \end{aligned}$$

Siis $n^2 - 2 = 2m + 1$ missä $m = 2k^2 + 2k - 1$ on kokonaisluku, joten määritelmän mukaan $n^2 - 2$ on pariton. $\square$

[1] $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Ongelmanratkaisua

Harjoitus: osoita, että peittäminen ei onnistu myöskään kun n on parillinen. (Vihje: poistetut kulmat ovat samanväriset.)

4. Arvioi ratkaisua

Mitä opittiin?

- erikoistapaukset ($n = 2, 3, \ldots$) voivat olla valaisevia
- parillisuus ja parittomuus voivat olla hyödyllisiä tällaisten ongelmien ratkaisussa
- myös shakkilaudan väritystä voi hyödyntää
- yleistyykö ratkaisu erimuotoisille laudoille tai laatoille?
- voisiko ratkaisun löytää muillakin tavoilla?

Ongelmanratkaisua

Osoitetaan, että kun n on pariton, niin $n \times n$ ruudukkoa, josta on poistettu kaksi kulmaruutua, ei voi peittää 1×2 laatoilla.

Edetään hieman eri tavalla ja tehdään *vastaoletus*: oletetaan, että voidaan peittää. Tällöin $n^2 - 2 = 2m$ missä m on dominolaattojen lukumäärä. Siis $n^2 - 2$ on parillinen.

Toisaalta oletettiin, että n on pariton. Siis $n = 2k + 1$ jollekin kokonaisluvulle m. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} n^2 - 2 = (2k+1)^2 - 2 &= (2k)^2 + 2 \cdot (2k) \cdot 1 + 1^2 - 2 \\ &= 4k^2 + 4k - 1 = 2(2k^2 + 2k - 1) + 1. \end{aligned}$$

Siis $n^2 - 2$ on pariton. Tämä on *ristiriita*, sillä yllä nähtiin, että $n^2 - 2$ on parillinen! Täten peittäminen on mahdotonta.

Ongelmanratkaisua

Tämä oli esimerkki *epäsuorasta todistuksesta*: väite

Jos n on pariton, niin peittäminen on mahdotonta

todistettiin tekemällä *vastaoletus* (peittäminen onnistuu), josta johdettiin *ristiriita* oletuksen (n on pariton) kanssa.

Molemmat todistukset perustuivat samaan laskuun, ja siihen, että luku on joko parillinen ja pariton (taas epäsuora todistus).

Suora ja epäsuora todistus ovat tärkeitä matemaattisia todistusmenetelmiä. Niistä lisää huomenna.

Vääräksi osoittaminen

Joskus voimme saada todistettavaksi lauseen, joka ei olekaan totta. Väitteen

Kaikille x pätee ominaisuus $P(x)$

vääräksi osoittamiseksi riittää löytää yksi x, jolle $P(x)$ ei päde. (Tätä kutsutaan vastaesimerkiksi.)

Väite. Kaikille reaaliluvuille x pätee $x^2 - 4x + 4 > 0$.

Yritykset osoittaa väite oikeaksi epäonnistuvat, joten yritetään löytää vastaesimerkki. Jos $x = 2$, niin väite saa muodon $2^2 - 4 \cdot 2 + 4 > 0$, eli $0 > 0$, mikä on epätosi. Vastaesimerkki $x = 2$ kumoaa väitteen.

Yleisiä ohjeita

1. **Ymmärrä ongelma.**
   - Varmista, että ymmärrät tehtävässä esiintyvät käsitteet.
   - Palauta mieleen määritelmät. Kirjoita ne tarvittaessa itsellesi auki.
   - Onko tehtävässä jotain tuttua, oletko nähnyt samanlaisia aikaisemmin? Voitko lainata ratkaisumenetelmiä?
   - Yksinkertaista, tutki erikoistapauksia.
   - Kokeile, etsi sääntöjä, yhdenmukaisuuksia, esimerkkejä.

Yleisiä ohjeita

2. Tee suunnitelma.

- Piirrä kuva tai tee malli.
- Muunna ongelmaa. Kokeile, helpottuuko ongelma lisäämällä oletuksia tms.
- Voiko jakaa osatapauksiin (parillinen/pariton tms)?
- Valitse hyvät merkinnät (huonot vaikeuttavat ratkaisua).
- Voiko ongelmassa hyödyntää symmetriaa tai skaalausta?
- Kokeile epäsuoraa todistusta. Mitä tapahtuu, jos väite ei pätisikään?
- Etene takaperin: jos väite pätisi, mitä siitä seuraisi? (Ratkaisukeinoa voi hakea näinkin.)
- Muista todistustekniikat: suora ja epäsuora todistus, induktiotodistus, kyyhkyslakkaperiaate, ”pienin jolle”, tms.

Yleisiä ohjeita

3. Toteuta suunnitelma.

- Kehitä suunnitelman etsimisvaiheessa saamiasi ideoita, yhtä kerrallaan, sekoittamatta niitä.
- Älä luovuta liian helposti. Mutta huomatessasi, ettei ongelma ratkea, laita keino sivuun ja yritä muuta keinoa.
- Lue huolella kirjoittamasi todistus. Varmistu, että se on vedenpitävä ja että toinenkin voi sen ymmärtää.

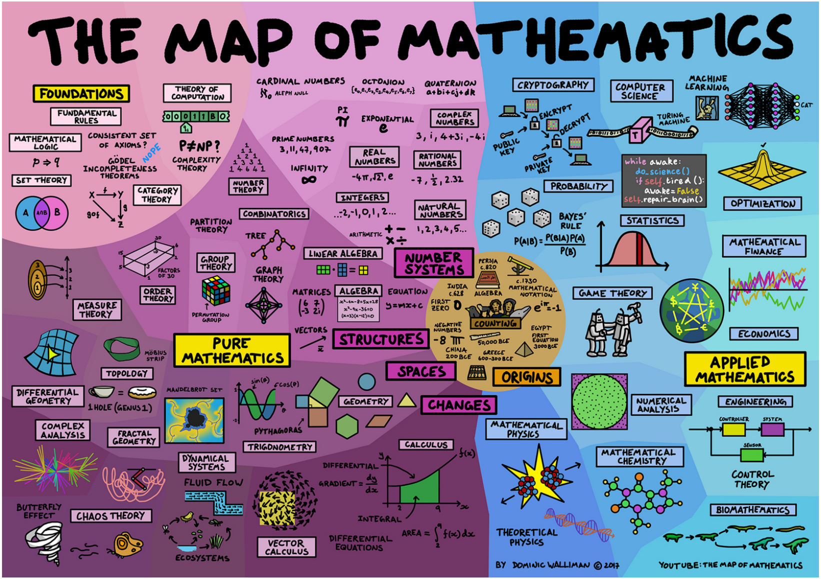
4. Arvioi ratkaisuasi.

- Tutki, miksi pääsit ratkaisuun tai miksi et. Mieti, miksi strategiasi toimi, tai jos ei toiminut, miksi se ei toiminut. Opi virheistäsi ja onnistumisistasi.
- Yritä ymmärtää todistuksesi tai ratkaisusi paremmin.
- Yritä yksinkertaistaa todistustasi tai ratkaisuasi.
- Yritä yleistää tekemääsi päättelyä. Antaako sama(nlainen) argumentti enemmän? Voidaanko oletuksia heikentää?

Sisältö

1. Matemaattisen tekstin osia
2. Ongelmanratkaisua
3. Matematiikan rakenteesta

Map of Mathematics (katso YouTube)



Matematiikan rakenteesta

Matematiikka on valtava tieteenala, eikä matematiikan aloille ole kanonista luokittelua.

Suuntaa-antavaa jaottelua:

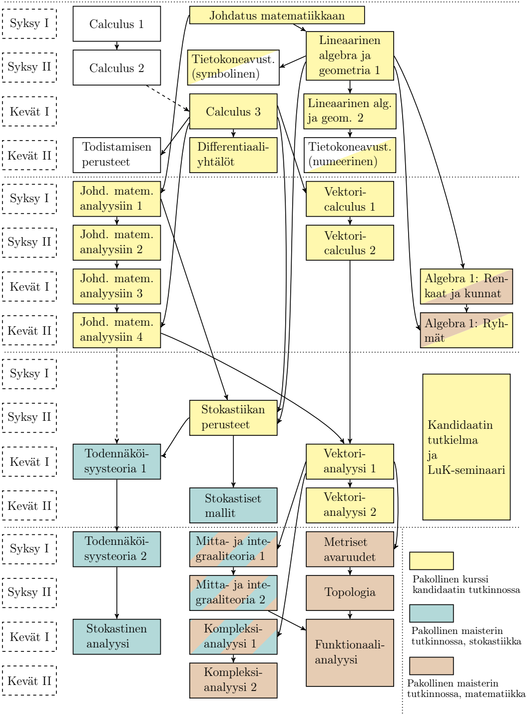
- puhdas matematiikka: abstraktien rakenteiden tutkimus itsenäisenä tieteenalana
- sovellettu matematiikka: sovelluksia luonnon-, insinööri- ja taloustieteisiin, tietotekniikkaan ja teollisuuteen
- logiikka ja matematiikan perusteet

Jaottelu on keinotekoinen: puhtaalla matematiikalla on sovelluksia, ja sovellukset motivoivat teoriaa.

Matematiikan rakenteesta

Matematiikan tutkinto-ohjelman opinnot kuuluvat enimmäkseen "puhtaan matematiikan" piiriin. Karkeasti:

- analyysi: derivaatan, integraalin ja funktioiden tutkimuksesta kasvanut laaja teoria
- algebra: abstraktien rakenteiden ja lukualueiden tutkimus
- geometria: muotojen ja avaruuksien teoria
- stokastiikka: todennäköisyyksien ja satunnaisuuden teoria


Syksy I
Syksy II
Kevät I
Kevät II
Calculus 1
Calculus 2
Johdatus matematiikkaan
Lineaarinen algebra ja geometria 1
Tietokoneavust. (symbolinen)
Calculus 3
Lineaarinen alg. ja geom. 2
Todistamisen perusteet
Differentiaaliyhtälöt
Tietokoneavust. (numeerinen)
Johd. matem. analyysiin 1
Vektori-calculus 1
Johd. matem. analyysiin 2
Vektori-calculus 2
Johd. matem. analyysiin 3
Algebra 1: Renkaat ja kunnat
Johd. matem. analyysiin 4
Algebra 1: Ryhmät
Kandidaatin tutkielma ja LuK-seminaari
Stokastiikan perusteet
Todennäköisyysteoria 1
Vektorianalyysi 1
Stokastiset mallit
Vektorianalyysi 2
Todennäköisyysteoria 2
Mitta- ja integraaliteoria 1
Metriset avaruudet
Mitta- ja integraaliteoria 2
Topologia
Stokastinen analyysi
Kompleksianalyysi 1
Funktionaalianalyysi
Kompleksianalyysi 2
Pakollinen kurssi kandidaatin tutkinnossa
Pakollinen maisterin tutkinnossa, stokastiikka
Pakollinen maisterin tutkinnossa, matematiikka

Esitehtävä huomiselle

Tutustu Juutisen Johdatus matematiikkaan –luentomonisteen lukuihin 2.3.2–2.3.4.