Johdatus matematiikkaan

Luento 5

Mikko Salo

5.9.2017

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
UNIVERSITY OF JYVÄSKYLÄ

"The natural development of this work soon led the geometers in their studies to embrace imaginary as well as real values of the variable. ... It came to appear that, between two truths of the real domain, the easiest and shortest path quite often passes through the complex domain." (Paul Painlevé 1900)

Sisältö

1. Induktiosta
2. Toisen asteen yhtälö
3. Kompleksiluvut

Induktiotodistus

Induktio on hyödyllinen periaate, jonka avulla voidaan todistaa väitteitä muotoa

$$P(n) \text{ on tosi kaikille } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Induktiotodistuksessa on kolme vaihetta:

1. **Perusaskel.** Todista väite kun $n = 1$ (ts. todista $P(1)$).
2. **Induktio-oletus.** Oleta väite todeksi tapauksessa $n = k$, missä $k \geq 1$ on mielivaltainen (ts. oleta $P(k)$).
3. **Induktioaskel.** Todista väite tapauksessa $n = k + 1$, kun oletetaan, että väite on tosi tapauksessa $n = k$ (ts. todista $P(k + 1)$).

Vahva induktio

Vahvalla induktioperiaatteella voi myös todistaa väitteitä

$$P(n) \text{ on tosi kaikille } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Vahva induktiotodistus käsittää kolme vaihetta:

1. **Perusaskel.** Todista väite kun $n = 1$ (ts. todista $P(1)$).
2. **Induktio-oletus.** Oleta väite todeksi tapauksessa $n \leq k$ (ts. oleta $P(1), P(2), \ldots, P(k)$).
3. **Induktioaskel.** Todista väite tapauksessa $n = k + 1$, kun oletetaan, että väite on tosi tapauksessa $n \leq k$ (ts. todista $P(k + 1)$).

Vahva induktioperiaate seuraa tavallisesta induktiosta (miksi?).

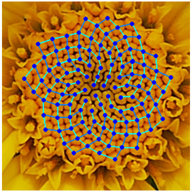
Fibonaccin luvut

Fibonaccin luvut F_n (vuodelta 1202) määritellään kaavalla

$$F_n = \begin{cases} 1, & n = 1, 2, \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & n \geq 3 \end{cases}$$

Fibonaccin lukuja: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Fibonaccin lukuja esiintyy monissa yhteyksissä (kombinatoriikka, Hilbertin 10. ongelma, tietorakenteet, taloustiede). Niitä voidaan havaita myös erilaisissa luonnossa esiintyvissä kuvioissa (mm. kukintojen rakenne).



Vahva induktio

Väite. $F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$.

Todistus. Todistetaan väite vahvalla induktiolla.

1. Perusaskel. Väite pätee kun $n = 1$ ja $n = 2$, sillä

$$\frac{(1+\sqrt{5})^1 - (1-\sqrt{5})^1}{2^1\sqrt{5}} = 1,$$

$$\frac{(1+\sqrt{5})^2 - (1-\sqrt{5})^2}{2^2\sqrt{5}} = \frac{(1+2\sqrt{5}+5) - (1-2\sqrt{5}+5)}{4\sqrt{5}} = 1.$$

2. Induktio-oletus. Oletetaan, että

$$F_\ell = \frac{(1+\sqrt{5})^\ell - (1-\sqrt{5})^\ell}{2^\ell\sqrt{5}}, \qquad \ell \leq k.$$

Vahva induktio

3. Induktioaskel. Määritelmä ja induktio-oletus antavat

$$
\begin{aligned}
F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^k - (1-\sqrt{5})^k}{2^k\sqrt{5}} + \frac{(1+\sqrt{5})^{k-1} - (1-\sqrt{5})^{k-1}}{2^{k-1}\sqrt{5}} \\
&= \frac{2(1+\sqrt{5})^k - 2(1-\sqrt{5})^k + 4(1+\sqrt{5})^{k-1} - 4(1-\sqrt{5})^{k-1}}{2^{k+1}\sqrt{5}} \\
&= \frac{(4+2(1+\sqrt{5}))(1+\sqrt{5})^{k-1} - (4+2(1-\sqrt{5}))(1-\sqrt{5})^{k-1}}{2^{k+1}\sqrt{5}} \\
&= \frac{(1+2\sqrt{5}+5)(1+\sqrt{5})^{k-1} - (1-2\sqrt{5}+5)(1-\sqrt{5})^{k-1}}{2^{k+1}\sqrt{5}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^2(1+\sqrt{5})^{k-1} - (1-\sqrt{5})^2(1-\sqrt{5})^{k-1}}{2^{k+1}\sqrt{5}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^{k+1} - (1-\sqrt{5})^{k+1}}{2^{k+1}\sqrt{5}}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Sisältö

1. Induktiosta
2. Toisen asteen yhtälö
3. Kompleksiluvut

Toiseen asteen yhtälö

Tarkastellaan toisen asteen yhtälöä

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Koulussa on opittu, että ratkaisut saadaan kaavasta

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Onko todella näin?

Toiseen asteen yhtälö

Oletetaan, että $a \neq 0$. Jaetaan yhtälö a:lla ja yritetään täydentää neliöksi:

$$
\begin{aligned}
& ax^2 + bx + c = 0 \\
\iff & x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\
\iff & x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \\
\iff & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.
\end{aligned}
$$

Nyt jos $b^2 - 4ac \geq 0$ (missä $b^2 - 4ac$ on ns. diskriminantti), voidaan ottaa neliöjuuri ja saadaan

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Tästä saadaan ratkaisukaava $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Toisen asteen yhtälö

Toisen asteen yhtälöllä on siis kaksi (mahdollisesti yhtäsuurta) ratkaisua, aina kun $b^2 - 4ac \geq 0$.

Mikä menee pieleen kun $b^2 - 4ac < 0$? Tarkastellaan yksinkertaista tapausta missä $a = 1$, $b = 0$ ja $c = 1$ (jolloin $b^2 - 4ac = -4$):

$$x^2 + 1 = 0.$$

Tällöin pitäisi olla

$$x^2 = -1.$$

Kaikille reaaliluvuille x pätee $x^2 \geq 0$, joten mikään reaaliluku ei ratkaise tätä yhtälöä.

Matemaatikko kysyy: voitaisiinko luvun tai ratkaisun käsitettä laajentaa niin, että yhtälö saadaan ratkaistua?

Toisen asteen yhtälö

Kuvitellaan, että on olemassa kuvitteellinen luku $\sqrt{-1}$, jolle pätee $(\sqrt{-1})^2 = -1$ (Cardano 1545). Tällöin $\sqrt{-1}$ olisi yhtälön

$$x^2 = -1$$

ratkaisu (ja $-\sqrt{-1}$ olisi toinen ratkaisu).

Ajatusleikistä voi seurata ongelmia: lasketaan

$$-1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Tämä ei voi olla totta.

Ongelma tulee siitä, että reaalilukujen neliöjuuren laskusäännöt eivät aina päde ”kuvitteellisille luvuille”. Annetaan seuraavaksi näille luvuille tarkka määritelmä, joka mahdollistaa toisen asteen yhtälön ratkaisun kaikissa tapauksissa.

Sisältö

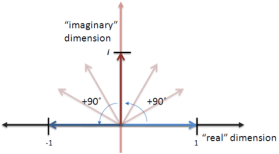
1. Induktiosta
2. Toisen asteen yhtälö
3. Kompleksiluvut

Kompleksiluvut

Tarkastellaan tason vektoreita (a, b), missä a ja b ovat reaalilukuja. Ajatellaan, että x-akseli koostuu reaaliluvuista, ja y-akseli koostuu "kuvitteellisista luvuista" (imaginääriluvuista).

Halutaan asettaa tason vektoreille uusi laskutoimitus, ns. kertolasku, jolle pätee

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0).$$



Koska x-akseli koostuu reaaliluvuista, tämä tarkoittaisi sitä, että vektori $(0, 1)$ vastaa lukua $\sqrt{-1}$ (sen neliö on -1).

Tämän uuden laskutoimituksen ansiosta tason vektoreita voi ajatella kompleksilukuina.

Kompleksiluvut

Käytännössä kompleksilukuja ajatellaan olioina

$$z = a + ib, \qquad a,\ b \text{ reaalilukuja.}$$

Tässä i on ns. imaginääriyksikkö (vastaa vektoria $(0, 1)$).
Yhteenlasku tapahtuu kuten tason vektoreilla:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d).$$

Kertolaskua varten riittää tietää kaava $i^2 = -1$. Jos tämän muistaa, niin kompleksilukuja voi kertoa niin kuin reaalilukuja:

$$(a+ib)(c+id) = ac+a(id)+(ib)c+(ib)(id) = ac-bd+i(ad+bc)$$

Seuraavan kalvon määritelmä takaa, että tämä on mahdollista (ja että yhteen- ja kertolaskussa termien järjestyksellä ei ole väliä tms).

Kompleksiluvut

Määritelmä.

Kompleksiluku on pari $z = (a, b)$, missä a ja b ovat reaalilukuja.

Imaginääriyksikkö on kompleksiluku $i = (0, 1)$.

Kahden kompleksiluvun $z = (a, b)$ ja $w = (c, d)$ summa ja tulo määritellään kaavoilla

$$\begin{aligned} z + w &= (a + c, b + d), \\ zw &= (ac - bd, ad + bc). \end{aligned}$$

Reaaliluku a vastaa kompleksilukua $(a, 0)$.

Huomautus. Määritelmistä seuraa, että jokainen kompleksiluku $z = (a, b)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$z = a + ib.$$

Kertolaskun määritelmästä seuraa, että $i^2 = -1$.

Kompleksiluvut

Perustellaan näitä tarkemmin määritelmistä lähtien:

Lause

Olkoot a, b, c, d reaalilukuja. Tällöin pätee:

1. $i^2 = -1$.
2. Kompleksiluku $z = (a, b)$ voidaan kirjoittaa muodossa $z = a + ib$.
3. $a(c + id) = ac + i(ad)$. (Reaaliluvulla kertominen)
4. $(ib)(c + id) = -bd + i(bc)$. (Imaginääriluvulla kertominen)

Todistus.

1. $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$
2. $a + ib = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = (a, 0) + (0, b) = (a, b).$
3. $a(c + id) = (a, 0) \cdot (c, d) = (ac, ad) = ac + i(ad).$
4. $(ib)(c + id) = (0, b) \cdot (c, d) = (-bd, bc) = -bd + i(bc).$ $\square$

Esimerkkejä

Edellisen kalvon lauseen avulla voidaan laskea:

$$
\begin{aligned}
i^2 &= -1 \\
i^3 &= i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \\
i^4 &= i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = 1 \\
i^5 &= i^4 \cdot i = (1) \cdot i = i \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Lisäksi

$$(3 + 2i) + (4 - 3i) = (3 + 4) + (2 - 3)i = 7 - i$$

ja

$$(3 + 2i)(4 - 3i) = 3 \cdot 4 - (2 \cdot (-3)) + i(2 \cdot 4 - 3 \cdot 3) = 18 - i.$$

Paluu toiseen asteen yhtälöön

Olkoot a, b, c reaalilukuja ja $a \neq 0$. Yritetään ratkaista yhtälö $az^2 + bz + c = 0$, missä z on nyt kompleksiluku:

$$\begin{aligned} & az^2 + bz + c = 0 \\ \iff & z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \\ \iff & z^2 + 2 \cdot z \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \\ \iff & \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \end{aligned}$$

Kuten aiemmin, jos $b^2 - 4ac \geq 0$, yhtälölle saadaan kaksi reaalista ratkaisua

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Paluu toiseen asteen yhtälöön

Oletetaan nyt, että $b^2 - 4ac < 0$, ja yritetään ratkaista

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \qquad (*)$$

Jos $z + \frac{b}{2a} = \pm i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ (missä neliöjuuri on hyvin määritelty, sillä $4ac - b^2 > 0$), määritelmien mukaan $(*)$ toteutuu.

Lause. Olkoot a, b, c reaalilukuja ja $a \neq 0$. Yhtälön $az^2 + bz + c = 0$ (kompleksiluku)ratkaisut ovat

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{jos } b^2 - 4ac \geq 0,$$

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \qquad \text{jos } b^2 - 4ac < 0.$$

Esimerkki

Ratkaistaan yhtälö

$$z^2 + 2z + 2 = 0.$$

Nyt $4ac - b^2 = 4 \cdot 1 \cdot 2 - 2^2 = 4$, joten ratkaisukaavan mukaan

$$z = \frac{-2 \pm i\sqrt{4}}{2 \cdot 1} = -1 \pm i.$$

Varmistetaan, että nämä ovat todella ratkaisuja:

$$(-1+i)^2 + 2(-1+i) + 2 = (-1)^2 + 2(-1)i + i^2 - 2 + 2i + 2 = 0,$$

$$(-1-i)^2 + 2(-1-i) + 2 = (-1)^2 + 2(-1)(-i) + (-i)^2 - 2 - 2i + 2 = 0.$$

Jakolasku

Kompleksiluvuille voidaan määritellä yhteen- ja kertolaskun lisäksi jakolasku.

Määritelmä. Jos $z = (a, b) \neq (0, 0)$ on kompleksiluku, määritellään kompleksiluku $\frac{1}{z}$ (z:n käänteisluku) kaavalla

$$\frac{1}{z} = (\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}).$$

Jos z, w ovat kompleksilukuja, $w \neq 0$, määritellään $\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}$.

Huomautus. Käänteisluvun kaavan muistaa laskusta

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Jakolasku

Esimerkkejä.

(a) Jos $z = (a, b) \neq (0, 0)$, pätee aina

$$z \cdot \frac{1}{z} = (a + ib)(\frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}) = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} + i\frac{ab - ab}{a^2 + b^2} = 1.$$

(b) $\frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3-4i}{3^2+4^2} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i.$

(c) $\frac{2-5i}{3+4i} = (2 - 5i)\frac{1}{3+4i} = (2 - 5i)(\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i) = -\frac{14}{25} - \frac{23}{25}i.$

Kompleksiluvut

Edellä määriteltiin kompleksiluvut reaalilukupareina, joiden kertolasku on muotoa

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Huomattiin, että kompleksiluvuilla voi laskea samaan tapaan kuin reaaliluvuilla: kompleksilukujen joukko on ns. kunta. Myös reaaliluvut ja rationaaliluvut ovat kuntia. Kompleksilukujen eräs etu on se, että toisen (ja korkeamman!) asteen yhtälöillä on aina ratkaisuja kompleksilukujen joukossa.

Edellinen käsittely oli luonteeltaan algebrallinen (määriteltiin abstrakti rakenne ja tutkittiin sen ominaisuuksia). Esitetään huomenna geometrinen tulkinta kompleksiluvuille.

Esitehtävä huomiselle

Tutustu Juutisen Johdatus matematiikkaan –luentomonisteen lukuun 1 (Joukko-oppia).