Johdatus matematiikkaan

Luento 6

Mikko Salo
6.9.2017

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
UNIVERSITY OF JYVÄSKYLÄ

Sisältö

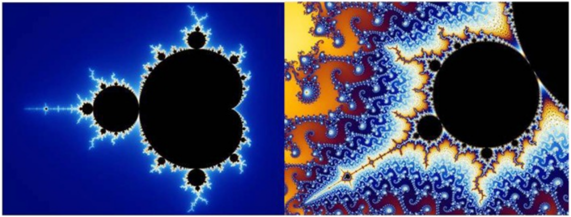
1. Kompleksitaso
2. Joukko-oppia

Kompleksiluvut

Edellisellä luennolla huomattiin, että toisen asteen yhtälö ratkeaa aina, jos ratkaisujen annetaan olla kompleksilukuja.

Osoittautuu, että kompleksiluvuilla on paljon sovelluksia mm.

- fysiikassa (sähkömagnetiikka, kvanttimekaniikka)
- insinööritieteissä (signaalinkäsittely, sähköverkot)
- matematiikassa (fraktaalit, lukuteoria)



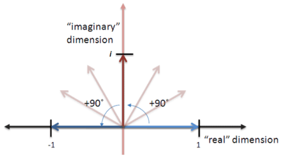
Esitetään seuraavaksi geometrinen tulkinta kompleksiluvuille.

Kompleksiluvut

Kertausta. Tarkastellaan tason vektoreita (a, b), missä a ja b ovat reaalilukuja. Ajatellaan, että x-akseli koostuu reaaliluvuista, ja y-akseli koostuu imaginääriluvuista.

Halutaan asettaa tason vektoreille uusi laskutoimitus, ns. kertolasku, jolle pätee

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0).$$



Koska x-akseli koostuu reaaliluvuista, tämä tarkoittaisi sitä, että vektori $(0, 1)$ vastaa lukua $\sqrt{-1}$ (sen neliö on -1).

Tämän uuden laskutoimituksen ansiosta tason vektoreita voi ajatella kompleksilukuina.

Kompleksiluvut

Määritelmä.
Kompleksiluku on pari $z = (a, b)$, missä a ja b ovat reaalilukuja.

Imaginääriyksikkö on kompleksiluku $i = (0, 1)$.

Kahden kompleksiluvun $z = (a, b)$ ja $w = (c, d)$ summa ja tulo määritellään kaavoilla

$$\begin{aligned} z + w &= (a + c, b + d), \\ zw &= (ac - bd, ad + bc). \end{aligned}$$

Reaaliluku a vastaa kompleksilukua $(a, 0)$.

Huomautus. Määritelmistä seuraa, että jokainen kompleksiluku $z = (a, b)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$z = a + ib.$$

Kertolaskun määritelmästä seuraa, että $i^2 = -1$.

Geometrinen tulkinta

Kompleksiluku $z = (a, b) = a + ib$ voidaan piirtää tason vektorina (a, b). Yhteenlasku tapahtuu kuten tason vektoreilla:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d).$$

Kompleksiluvun $z = a + ib$ normi eli pituus $|z|$ määritellään kuten vastaavan vektorin pituus:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Kompleksiluvun $z = a + ib$ kompleksikonjugaatti on $\bar{z} = a - ib$ (peilaus x-akselin suhteen).

Mikä on kompleksilukujen kertolaskun geometrinen tulkinta?

Kertolasku

Olkoot z ja w kompleksilukuja, joille pätee $|z| = |w| = 1$. Siis z ja w vastaavat tason yksikköympyrän kehäpisteitä.

Yksikköympyrän pisteet ovat muotoa $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Siis

$$z = (\cos\alpha, \sin\alpha),$$

$$w = (\cos\beta, \sin\beta),$$

joillekin reaaliluvuille α ja β (voidaan valita $0 \le \alpha, \beta < 2\pi$).

Kompleksilukujen kertolaskun määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} zw &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= \cos\alpha\,\cos\beta + i\cos\alpha\,\sin\beta + i\sin\alpha\,\cos\beta + i^2\sin\alpha\,\sin\beta \\ &= \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta + i(\cos\alpha\,\sin\beta + \sin\alpha\,\cos\beta) \\ &= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta).^{1} \end{aligned}$$

[1] $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta, \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta$

Kertolasku

Jokainen kompleksiluku z on muotoa $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ missä $r = |z|$ ja α on ns. suuntakulma (argumentti). Saadaan:

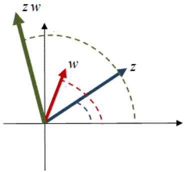
Lause. Kompleksilukujen z ja w tulo on

$$zw = rs(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$$

kun $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ja $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$.

Siis kompleksilukujen z ja w kertolaskussa

- pituudet r ja s kerrotaan keskenään
- suuntakulmat α ja β lasketaan yhteen



Erityisesti i vastaa suuntakulmaa 90°, joten

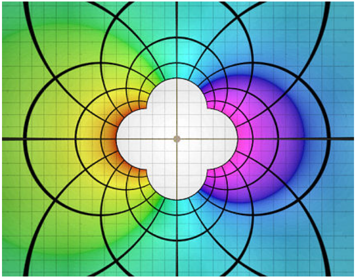
i:llä kertominen $= 90^\circ$ kierto vastapäivään.

Geometrinen tulkinta

Muillekin kompleksilukujen laskuille on geometrinen tulkinta. Esimerkiksi luvun $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \neq 0$ käänteisluku

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{r}(\cos\alpha - i\sin\alpha).$$

Kompleksitason neliö kuvautuu kuvauksessa $f(z) = \frac{1}{z}$ oikealla puolella olevaksi joukoksi:



(YouTube: Moebius transformations revealed)

Sisältö

Joukko-oppia

Matemaattiset totuudet ilmaistaan usein joukko-opin kielellä. Modernin matematiikan perustana on Zermelo-Fraenkelin joukko-oppi ZFC ($\sim$ 1922, 9 aksioomaa). Tällä kurssilla

- joukko on kokoelma objekteja (alkioita, jäseniä)
- jokaisesta alkiosta voidaan sanoa, kuuluuko se joukkoon vai ei

Joukkoa merkitään kaarisulkeilla $\{\cdots\}$. Esimerkkejä:

- Kokoelma $A = \{1, 2, 3\}$ on joukko, jonka alkiot ovat 1, 2 ja 3. Luvut 4 tai $\sqrt{2}$ eivät kuulu joukkoon A.
- $B = \{\text{nelijalkaiset eläimet}\}$ on joukko, jonka jäseniä ovat mm. hevoset ja lehmät. Ihmiset tai strutsit eivät kuulu joukkoon B.

Merkintöjä

$x \in A$	(x kuuluu joukkoon A)
$x \notin A$	(x ei kuulu joukkoon A)
$A \subset B$	(joukko A on joukon B osajoukko, myös $A \subseteq B$)
$A \not\subset B$	(joukko A ei ole joukon B osajoukko)
$A = B$	(A ja B ovat samat joukot)
$\emptyset$	(tyhjä joukko)

A on B:n osajoukko jos jokainen A:n alkio on myös B:n alkio. A ja B ovat samat joukot jos niissä on täsmälleen samat alkiot (ts. $A \subset B$ ja $B \subset A$). Tyhjässä joukossa ei ole yhtään alkiota.

Jos A koostuu alkioista x, jotka toteuttavat ehdon $P(x)$, merkitään

$$\begin{aligned} A &= \{x : x \text{ toteuttaa ehdon } P(x)\} \\ &= \{x \mid x \text{ toteuttaa ehdon } P(x)\}. \end{aligned}$$

Lukujoukkoja

Tällä kurssilla on nähty monenlaisia lukujoukkoja. Annetaan näille nyt merkinnät:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} && \text{(luonnolliset luvut)}\\
\mathbb{Z} &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} && \text{(kokonaisluvut)}\\
\mathbb{Q} &= \{\frac{m}{n} \ : \ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} && \text{(rationaaliluvut)}\\
\mathbb{R} &= \{x \ : \ x \text{ reaaliluku}\} && \text{(reaaliluvut)}\\
\mathbb{C} &= \{a + bi \ : \ a, b \in \mathbb{R}\} && \text{(kompleksiluvut).}
\end{aligned}$$

Pätee

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Huom! Usein määritellään $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (ei tällä kurssilla).

Esimerkkejä

- Jos $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 5\}$, niin
  - $1 \in A$ ja $1 \in B$
  - $0 \notin A$ ja $0 \in B$
  - $A \subset B$
  - $A \subset \mathbb{N}$
  - $B \subset \mathbb{Z}$ mutta $B \not\subset \mathbb{N}$
- Jokaiselle joukolle A pätee aina $A \subset A$ ja $\emptyset \subset A$ (jälkimmäistä voi pitää määritelmänä).
- Joukolle $C = \{n \in \mathbb{N} : \sqrt{n} < 3\}$ pätee
$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$
- Joukolle $D = \{k^2 : k \in \mathbb{Z}, |k| < 4\}$ pätee
$$D = \{0, 1, 4, 9\}.$$

Välit

Reaaliakselin välejä, missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$, merkitään

$$
\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\} && \text{(suljettu väli)} \\
]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\} && \text{(avoin väli)} \\
[a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x < b\} && \text{(puoliavoin väli)} \\
]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \leq b\} && \text{(puoliavoin väli)}
\end{aligned}
$$

Sulkujen kanssa pitää olla tarkkana:

- $[a, b]$ on suljettu väli
- $\{a, b\}$ on kahden alkion joukko (alkiot voivat toistua eikä niiden järjestyksellä ole väliä):

$$\{a, b\} = \{b, a\} = \{b, a, a, b, b\}$$

- (a, b) on järjestetty pari, jossa a on ensimmäinen ja b toinen alkio (joskus (a, b) on myös avoin väli $]a, b[$)

Joukkomerkinnöistä

Myös joukkomerkintöjen kanssa kannattaa olla tarkkana. Esimerkiksi merkintä

$$A = \{2, 4, 8, \dots\}$$

on liian epämääräinen, ja voisi tarkoittaa vaikka joukkoja

$\{2^k : k \in \mathbb{N}\}$ tai $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ on parillinen eikä ole jaollinen 6:lla}\}$.

Myöskään merkintä $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in A\}$, tai

$$R = \{\text{kaikki joukot } A \text{, joille } A \notin A\} \quad (\text{Russellin paradoksi})$$

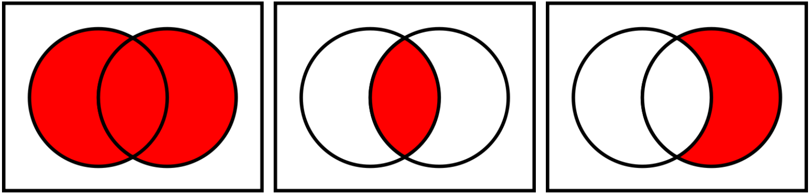
ei tuota järkevää joukkoa.

Joukko-operaatioita

Olkoot A ja B joukkoja. Määritellään

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= \{x : x \in A \text{ tai } x \in B\} && (\text{yhdiste}) \\
A \cap B &= \{x : x \in A \text{ ja } x \in B\} && (\text{leikkaus}) \\
B \setminus A &= \{x : x \in B \text{ ja } x \notin A\} && (\text{erotus})
\end{aligned}
$$

Joukko-operaatioita voi havainnollistaa Venn-diagrammeilla:

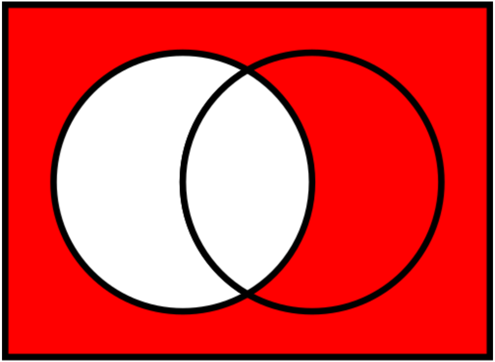


$A \cup B$ $A \cap B$ $B \setminus A$

Joukko-operaatioita

Jos on tiedossa jokin perusjoukko X, jonka osajoukkoja käsitellään, määritellään joukon A komplementti (X:n suhteen)

$$\complement A = A^{\complement} = X \setminus A.$$



$$A^{\complement} = X \setminus A$$

Esimerkki

Olkoot

$$\begin{aligned} A &= \{0, 1, \alpha, \beta\}, \\ B &= \{1, 2, \beta\}, \\ C &= \{3, 4, \gamma\}. \end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{0, 1, 2, \alpha, \beta\}, \\ A \cap B &= \{1, \beta\}, \\ A \setminus B &= \{0, \alpha\}, \\ B \setminus A &= \{2\}, \\ (A \cap B) \cup C &= \{1, 3, 4, \beta, \gamma\}. \end{aligned}$$

Joukko-operaatioita

Useamman kuin kahden joukon joukko-operaatiot määritellän kuten kahden joukon tapauksessa. Esimerkiksi

$$A \cup B \cup C \quad = \{x : x \in A \text{ tai } x \in B \text{ tai } x \in C\} \quad (\text{yhdiste}).$$

Yleisemmin, jos A_n ovat joukkoja ($n \in \mathbb{N}$), määritellään

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad = \{x : x \in A_n \text{ jollekin } n \in \mathbb{N}\} \quad (\text{yhdiste})$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad = \{x : x \in A_n \text{ kaikille } n \in \mathbb{N}\} \quad (\text{leikkaus})$$

Esimerkki

Kysymys. Olkoon $A_n = [0, \frac{1}{n}]$ kun $n \in \mathbb{N}$. Määritä

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{ja} \quad \cap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Vastaus. Pätee $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = [0,1]$ ja $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$. Perustelu:

"$\cup_{n=1}^{\infty} A_n \subset [0,1]$": Olkoon $x \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Määritelmän mukaan $x \in A_n$ jollekin $n \in \mathbb{N}$, ts. $x \in [0, 1/n]$. Tällöin $x \in [0,1]$.

"$[0,1] \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$": Olkoon $x \in [0,1]$. Koska $[0,1] = A_1$, saadaan $x \in A_1$ ja määritelmän mukaan $x \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

"$\cap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \{0\}$": Olkoon $x \in \cap_{n=1}^{\infty} A_n$. Tällöin $x \in [0, 1/n]$ kaikille $n \in \mathbb{N}$, joten ainakin $x \geq 0$. Jos $x > 0$, löytyy $k \in \mathbb{N}$ jolle $1/k < x$. Tällöin $x \notin [0, 1/k]$ mikä on mahdotonta. Siis ainoa mahdollisuus on $x = 0$, ja saadaan $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \{0\}$.

"$\{0\} \subset \cap_{n=1}^{\infty} A_n$": Pätee $0 \in A_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten määritelmän mukaan $0 \in \cap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Esitehtävä maanantaille

Tutustu Juutisen Johdatus matematiikkaan –luentomonisteen lukuihin 3 (Funktioista) ja 4 (Joukkojen mahtavuus).