Johdatus matematiikkaan

Luento 7

Mikko Salo

11.9.2017

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
UNIVERSITY OF JYVÄSKYLÄ

Sisältö

Funktioista

Lukiomatematiikassa on käsitelty reaalimuuttujan funktioita (polynomi / trigonometriset / eksponenttifunktiot jne). Yliopistossa funktiot ovat kuvauksia yleisten joukkojen välillä. Funktioita esiintyy kaikilla matematiikan kursseilla.

Määritelmä

Olkoot A ja B epätyhjiä joukkoja. Funktio eli kuvaus $f : A \to B$ on sääntö, joka liittää jokaiseen joukon A alkioon a täsmälleen yhden joukon B alkion $f(a)$. Sanotaan, että

$$f(a) \text{ on funktion } f \text{ arvo pisteessä/alkiossa } a,$$

ja $f(a)$ on alkion a kuva kuvauksessa f (merkitään $a \mapsto f(a)$).

Jos $f : A \to B$ on funktio, joukkoa A sanotaan funktion f määrittelyjoukoksi ja joukkoa B sanotaan maalijoukoksi.

Esimerkki 1

Olkoot $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{a, b, c\}$. Säännöt

$$f(1) = a, \quad f(2) = c, \quad f(3) = b$$
$$g(1) = b, \quad g(2) = a, \quad g(3) = b$$

määrittelevät funktiot $f : A \to B$ ja $g : A \to B$. Toisaalta sääntö

$$h(1) = a, \quad h(1) = b, \quad h(2) = c$$

ei ole funktio $A \to B$, sillä pisteellä 1 on kaksi kuva-alkiota ja pisteellä 3 ei ole yhtään.

Huomautus. Funktiolle g pätee $g(1) = g(3)$, ja alkio c ei ole minkään pisteen kuva. Tämä on sallittua funktion määritelmässä.

Esimerkki 2: funktioita vai ei?

a) Säännöt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ja $g : \mathbb{R} \to [0, \infty[$, $g(x) = x^2$ ovat funktioita (eroavat vain maalijoukon osalta).

b) Sääntö $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $h(n) = \frac{n}{2}$ ei ole funktio, sillä $\frac{n}{2} \notin \mathbb{Z}$ kun n on pariton. Sääntö $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(n) = \frac{n}{2}$ on funktio.

c) Sääntö $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $\frac{m}{n} \mapsto \frac{mn}{m^2+n^2+1}$ ei ole funktio, sillä esim. pisteet $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{6}$ antaisivat eri funktion arvon, mutta $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.

d) Sääntö $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $\frac{m}{n} \mapsto \frac{mn}{m^2+n^2}$ on funktio (miksi?).

e) Sääntö $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, missä $p(n)$ on n:s alkuluku, on hyvin määritelty funktio. Tälle funktiolle tunnetaan lausekkeita, mutta ne eivät ole helposti laskettavissa.

Funktioista

Seuraavat tärkeät ominaisuudet, joita annetulla funktiolla saattaa (tai ei saata) olla, ansaitsevat erityiset nimet:

Määritelmä

Funktion $f : A \to B$ sanotaan olevan

- injektio jos eri pisteillä on eri kuvat, ts.

$$f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$$

- surjektio jos jokainen maalijoukon alkio on jonkin pisteen kuva, ts.

$$\text{jokainen } b \in B \text{ on muotoa } b = f(a) \text{ jollekin } a \in A$$

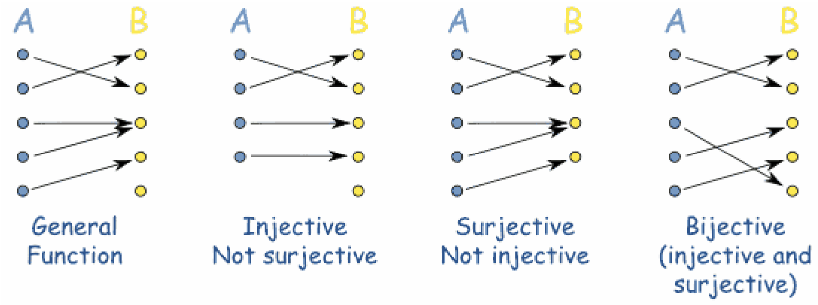
- bijektio jos se on sekä injektio että surjektio.

Funktioista

Injektio: kahdella eri alkiolla ei voi olla samaa kuvaa

Surjektio: jokainen maalijoukon alkio on jonkin pisteen kuva

Bijektio: injektio ja surjektio, 1-1 vastaavuus A:n ja B:n välillä



Esimerkki

a) Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ ei ole injektio (sillä esim. $f(0) = f(2\pi) = 0$) eikä surjektio (sillä $-1 \leq f(x) \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten f ei saavuta esim. arvoa 10).

b) Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 7$ on injektio (sillä

$$f(x) = f(y) \implies 2x+7 = 2y+7 \implies 2x = 2y \implies x = y)$$

ja surjektio (kaikille $y \in \mathbb{R}$ löytyy $x \in \mathbb{R}$ jolle $f(x) = y$, riittää valita $x = \frac{y-7}{2}$). Siis f on myös bijektio.

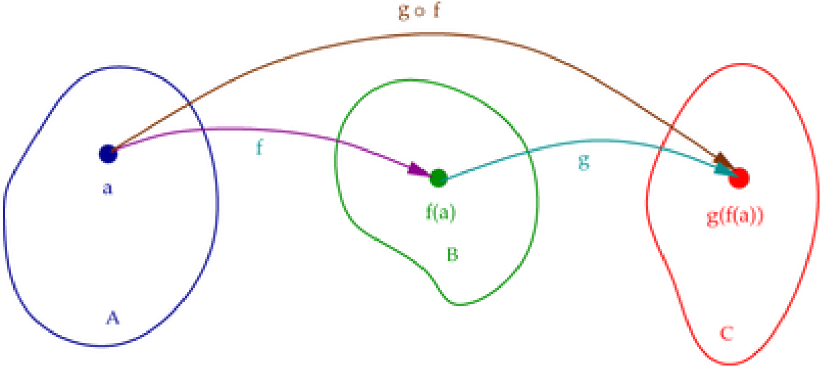
c) Funktio $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[, f(x) = x^2$ ei ole injektio (sillä esim. $f(1) = f(-1) = 1$) mutta on surjektio (jokainen $y \in [0, \infty[$ on muotoa $y = f(x)$ jollekin $x \in \mathbb{R}$, riittää valita $x = \sqrt{y}$).

Yhdistetty funktio

Määritelmä

Olkoot $f : A \to B$ ja $g : B \to C$ funktioita. Funktioiden f ja g yhdistetty funktio $g \circ f$ on funktio

$$g \circ f : A \to C, \quad (g \circ f)(a) = g(f(a)).$$



Esimerkki

a) Olkoot

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 3x + 1,$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \sin x.$$

Yhdistetyt funktiot

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (g \circ f)(x) = \sin(3x + 1),$$
$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(x) = 3 \sin x + 1.$$

b) Olkoot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x$ ja $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$. Funktio $g \circ f$ ei ole hyvin määritelty, sillä f saa negatiivisia arvoja joille $g(f(x))$ ei ole määritelty. Funktio $f \circ g$ on hyvin määritelty $[0, \infty[\to \mathbb{R}, (f \circ g)(x) = -\sqrt{x}$.

Käänteisfunktio

Jos $f : A \to B$ on bijektio, niin jokaiselle $b \in B$ löytyy täsmälleen yksi $a \in A$, jolle $f(a) = b$. Tämä sääntö määrittelee funktion f käänteisfunktion

$$f^{-1} : B \to A.$$

Siis bijektiolle f voidaan määritellä käänteisfunktio $g = f^{-1}$, ja tämä toteuttaa ehdot

$$g(f(a)) = a \text{ kaikille } a \in A, \quad f(g(b)) = b \text{ kaikille } b \in B.$$

Toisaalta ylläolevat ehdot täyttävä kuvaus g on olemassa jos ja vain jos f on bijektio (miksi?), ja tällöin välttämättä $g = f^{-1}$.

Esimerkki

Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 7$. Aiemmin osoitettiin, että f on injektio ja surjektio. Siis f on bijektio, joten sillä on käänteisfunktio f^{-1}. Etsitään lauseke käänteisfunktiolle.

Olkoon $y \in \mathbb{R}$. Nyt $f^{-1}(y)$ on määritelmän mukaan se piste $x \in \mathbb{R}$, jolle $f(x) = y$. Täytyy siis löytää x, jolle pätee

$$2x + 7 = y.$$

Ratkaistaan yhtälö: täytyy olla $2x = y - 7$, joten $x = \frac{y-7}{2}$. Täten funktion f käänteisfunktio on

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \frac{y-7}{2}.$$

Sisältö

Joukkojen mahtavuus

Äärellisessä joukossa $\{1, 2, \ldots, n\}$ on n alkiota. Matematiikassa myös äärettömien joukkojen, esim. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ tai $\mathbb{R}$, käsittely on arkipäivää.

Joukkojen koon vertailuun on matematiikassa useita menetelmiä. Tällä kurssilla tutustutaan ”mahtavuuden” käsitteeseen, joka mittaa ”joukon alkioiden lukumäärää”.

Lisäksi pohditaan äärettömyyden käsitettä mahtavuuden ja äärettömien joukkojen avulla, ja nähdään, että jotkut äärettömyydet ovat suurempia kuin toiset.

Esimerkki

Olkoon

$$
\begin{aligned}
A &= \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}, \\
B &= \{n \in \mathbb{N} \,:\, n \text{ on parillinen}\} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}.
\end{aligned}
$$

Kummassa joukossa on enemmän alkioita?

Selvästi B on A:n aito osajoukko, ja jossain mielessä B sisältää vain ”puolet” A:n alkioista. Toisaalta joukkojen A ja B alkiot voidaan laittaa 1-1 vastaavuuteen:

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots
\end{array}
$$

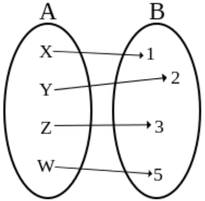
Täten joukoissa A ja B voi ajatella olevan yhtä monta alkiota.

Joukkojen mahtavuus

Määritelmä

Joukot A ja B ovat yhtä mahtavia, merkitään $|A| = |B|$, jos on olemassa jokin bijektio $f : A \to B$.

Muistetaan, että $f : A \to B$ on bijektio jos se on injektio (eri alkioilla on eri kuvat) ja surjektio (jokainen B:n alkio on jonkin A:n alkion kuva). Bijektio antaa siis 1-1 vastaavuuden A:n ja B:n alkioiden välillä.



On tietyssä mielessä luonnollista, että jos A:n ja B:n välillä on bijektio, niin A:ssa ja B:ssa on yhtä monta alkiota.

Joukkojen mahtavuus

Lause

Joukot $A = \mathbb{N}$ ja $B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ on parillinen}\}$ ovat yhtä mahtavia.

Todistus.

Määritellään funktio $f : A \to B$, $f(n) = 2n$. Tällöin f on injektio:

$$f(m) = f(n) \implies 2m = 2n \implies m = n.$$

Lisäksi f on surjektio, sillä jokainen joukon B alkio (eli parillinen luku) on muotoa $2n$ jollekin $n \in \mathbb{N}$. Siis f on bijektio $A \to B$, joten A ja B ovat yhtä mahtavat. $\square$

Äärelliset joukot

Määritelmä

- Joukko A on äärellinen, jos $A = \emptyset$ tai A on yhtä mahtava kuin $\{1, 2, \ldots, n\}$ jollekin $n \in \mathbb{N}$. Tällöin merkitään $|A| = n$.
- Joukko A on ääretön, jos se ei ole äärellinen.

Esimerkkejä

- Olkoon $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, missä $a_j \neq a_k$ kun $j \neq k$. Tällöin funktio $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$, $f(j) = a_j$ on bijektio (miksi?). Siis $|A| = n$.
- Joukkojen $\{1, 2, \ldots, m\}$ ja $\{1, 2, \ldots, n\}$ välillä on bijektio jos ja vain jos $m = n$ (miksi?), joten merkintä $|\{a_1, \ldots, a_n\}| = n$ on hyvin määritelty.

Äärettömät joukot

Yksinkertaisin ääretön joukko on $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Edellä nähtiin, että

$$|\{n \in \mathbb{N} \,:\, n \text{ on parillinen}\}| = |\mathbb{N}|.$$

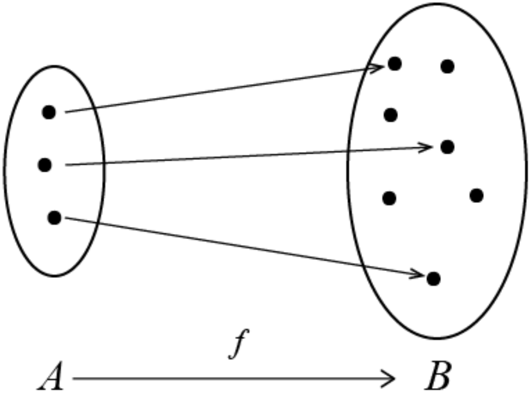
Voidaan kysyä: onko olemassa ääretöntä joukkoa, joka on mahtavampi kuin $\mathbb{N}$?

Määritelmä

- Joukko A on aidosti vähemmän mahtava kuin joukko B, merkitään $|A| < |B|$, jos on olemassa injektio $f : A \to B$ mutta ei ole olemassa bijektiota $A \to B$.
- Joukko A on numeroituvasti ääretön, jos $|A| = |\mathbb{N}|$.
- Joukko A on ylinumeroituva, jos $|\mathbb{N}| < |A|$.

Mahtavuuksien vertailua

Siis pätee $|A| < |B|$, jos on olemassa injektio $A \to B$ ("B sisältää ainakin A:n verran alkioita"), mutta A ja B eivät ole yhtä mahtavia.



Mahtavuuksien vertailua

Lause

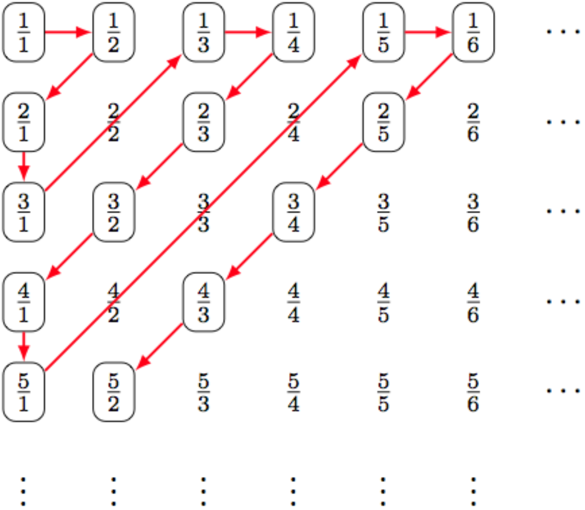
Joukot $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Q}$ ovat numeroituvasti äärettömiä (ts. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$).

Väite $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ osoitetaan luettelemalla kokonaisluvut:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \cdots \end{array}$$

Mahtavuuksien vertailua

Väite $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ osoitetaan luettelemalla rationaaliluvut:



Mahtavuuksien vertailua

Toiset äärettömyydet ovat suurempia kuin toiset:

Lause (Cantor 1874)

Reaalilukujen joukko on ylinumeroituva (ts. $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$).

Todistus. Funktio $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \ g(n) = n$, on injektio. Riittää osoittaa, että ei ole bijektiota $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Tehdään vastaoletus: löytyy bijektio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Tällöin reaalilukujen desimaaliesitykset voitaisiin luetella seuraavasti:

$$\begin{array}{ll} f(1) & d_{11}, d_{12} d_{13} d_{14} \ldots \\ f(2) & d_{21}, d_{22} d_{23} d_{24} \ldots \\ f(3) & d_{31}, d_{32} d_{33} d_{34} \ldots \\ \vdots & \qquad \vdots \end{array}$$

Tässä d_{j1} on luvun $f(j)$ kokonaisosa, ja $0 \leq d_{jk} \leq 9$ kun $k \geq 2$.

Mahtavuuksien vertailua

Muodostetaan desimaaliluku $b = b_1{,}b_2b_3b_4\ldots$, joka ei esiinny luettelossa, käyttämällä Cantorin diagonaaliargumenttia:

$$
\begin{array}{ll}
f(1) & d_{11}{,}d_{12}d_{13}d_{14}\ldots \\
f(2) & d_{21}{,}d_{22}d_{23}d_{24}\ldots \\
f(3) & d_{31}{,}\, d_{32}d_{33}d_{34}\ldots \\
\vdots & \qquad \vdots
\end{array}
$$

Määritellään $b_1 = d_{11} + 2$, ja kun $k \geq 2$ määritellään

$$
b_k = \begin{cases} 3, & \text{jos } d_{kk} = 2, \\ 2, & \text{jos } d_{kk} \neq 2. \end{cases}
$$

Tällöin b:n k:s desimaali eroaa $f(k)$:n k:nnesta desimaalista, joten b ei ole muotoa $f(k)$ millekään k. Tämä on ristiriita, sillä vastaoletuksen mukaan $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ oli bijektio. $\square$

Mahtavuuksien vertailua

On siis osoitettu, että $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$. On olemassa vielä mahtavampia joukkoja kuin $\mathbb{R}$, sillä

$$|\mathbb{R}| < |\mathcal{P}(\mathbb{R})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))| < \dots$$

missä $\mathcal{P}(A)$ on joukon A potenssijoukko (eli kaikkien A:n osajoukkojen joukko). Voidaan myös kysyä:

Kontinuumihypoteesi (Cantor 1878)

Onko olemassa joukkoa A, jolle $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$?

Ehkä hieman yllättäen on todistettu, että Zermelo-Fraenkelin joukko-opissa (ZFC) ei ole riittävästi ilmaisuvoimaa ratkaisemaan kontinuumihypoteesia suuntaan tai toiseen.